Λύσεις κριτηρίου 15

ΘΕΜΑ Α

Α1. (β) **Α2.** (β) **Α3.** (δ) **Α4.** (γ) **Α5.** α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. (ii)

Ο αριθμός των περιστροφών που κάνει ο τροχός στο πρώτο δευτερόλεπτο είναι:

$$N_1 = N_{0\to1} = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} = \frac{\alpha_\gamma}{4\pi}\Delta t^2_{0\to1} = \frac{\alpha_\gamma}{4\pi} \quad (1)$$

Ο αριθμός των περιστροφών που κάνει ο τροχός στο δεύτερο δευτερόλεπτο είναι:

$$N_2 = N_{1\to2} = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\alpha_\gamma\Delta t^2_{0\to2} - \frac{1}{2}\alpha_\gamma\Delta t^2_{0\to1}\right) = \frac{1}{4\pi}\alpha_\gamma(4-1) = \frac{3}{4\pi}\alpha_\gamma \quad (2)$$

Ο αριθμός των περιστροφών που κάνει ο τροχός στο τρίτο δευτερόλεπτο είναι:

$$N_3 = N_{2\to3} = \frac{\Delta\theta_3}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\alpha_\gamma\Delta t^2_{0\to3} - \frac{1}{2}\alpha_\gamma\Delta t^2_{0\to2}\right) = \frac{1}{4\pi}\alpha_\gamma(9-4) = \frac{5}{4\pi}\alpha_\gamma \quad (3)$$

Διαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{N_{0\to1}}{N_{1\to2}} = \frac{\Delta t^2_{0\to1}}{\left(\Delta t^2_{0\to2} - \Delta t^2_{0\to1}\right)} = \frac{1}{3} \quad (4)$

Διαιρώντας τις (1) και (3) κατά μέλη έχουμε: $\frac{N_1}{N_3} = \frac{N_{0\to1}}{N_{2\to3}} = \frac{\Delta t^2_{0\to1}}{\left(\Delta t^2_{0\to3} - \Delta t^2_{0\to2}\right)} = \frac{1}{5} \quad (5)$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις (4) και (5) και έχουμε:

$$\frac{N_{0\to1}}{N_{1\to2}}\frac{N_{0\to1}}{N_{2\to3}} = \frac{1}{15} \to N_2 \cdot N_3 = 15\, N_1^2$$

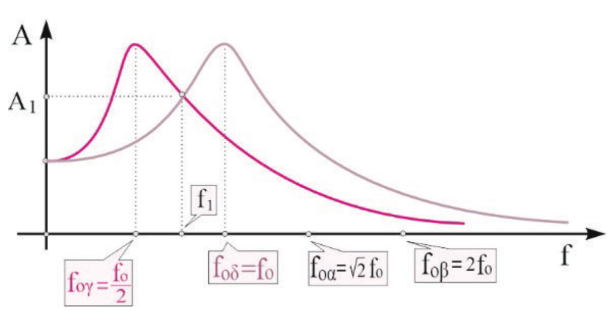
Β2. (i)

Οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης των συστημάτων είναι:

$$f_{o(\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2}f_o \ ,$$

$$f_{o(\beta)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}} = 2f_o \ ,$$

$$f_{o(\gamma)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{4m}} = \frac{f_o}{2} \ , \ f_{o(\delta)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = f_o$$



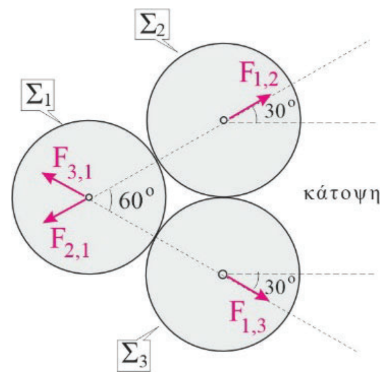
Έχουμε 4 διαφορετικές καμπύλες συντονισμού από τις οποίες οι (γ) , (δ) πρέπει να έχουν σημείο τομής που αντιστοιχεί στο ίδιο πλάτος A_1 για τη συγκεκριμένη συχνότητα f_1 του διεγέρτη (σανίδα) .

Άρα η f_1 πρέπει να είναι μεταξύ των δύο ιδιοσυχνοτήτων $f_{0(\gamma)} = f_0/2$ και $f_{o(\delta)}=f_o$. Μόνο η συχνότητα $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_o$ ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη.

Έχουμε 4 διαφορετικές καμπύλες συντονισμού από τις οποίες οι (γ) , (δ) πρέπει να έχουν σημείο τομής που δείχνει το ίδιο πλάτος A_1 για τη συγκεκριμένη συχνότητα f_1 του διεγέρτη (σανίδα) . Άρα η f_1 πρέπει να είναι μεταξύ των δύο ιδιοδυχνοτήτων $f_{0(\gamma)} = f_0/2$ και $f_{o(\delta)}=f_o$. Μόνο η συχνότητα

$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}f_o$ ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη.

B3. (ii)



Αφού η κινητική ενέργεια που χάνει η σφαίρα 1 κατά την κρούση είναι 64% έχουμε:

$$K_1' = \frac{36}{100}K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{36}{100}\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 \Rightarrow \upsilon_1 = 0,6\upsilon_o \quad (1)$$

Από τη διατήρηση της ορμής στον άξονα y'y έχουμε:

$$m_2\upsilon_2\eta\mu30^0 = m_3\upsilon_3\eta\mu30^0 \Rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_3 \quad (2)$$

Από την διατήρηση της ορμής στον άξονα x'x έχουμε:

$$m_1\upsilon_o = -m_1\upsilon_1 + m_3\upsilon_3\sigma\upsilon\nu30^0 + m_2\upsilon_2\sigma\upsilon\nu30^0 \Rightarrow 1,6m_1\upsilon_0 = 2m_2\upsilon_2\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$1,6m_1\upsilon_0 = m_2\upsilon_2\sqrt{3} \Rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_3 = \frac{1,6}{\sqrt{3}}\frac{m_1}{m_2}\upsilon_0 \quad (3)$$

Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + 2\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow m_1\upsilon_o^2 = m_1\upsilon_1^2 + 2m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$m_1\upsilon_o^2 - 0,36m_1\upsilon_o^2 = 2m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow 0,64m_1\upsilon_o^2 = 2m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$0,64m_1\upsilon_o^2 = 2m_2\frac{2,56}{3}\frac{m_1^2}{m_2^2}\upsilon_o^2 \Rightarrow$$

$$0,64 = 2\frac{2,56}{3}\frac{m_1}{m_2} \Rightarrow m_2 = \frac{512}{192}m_1 = \frac{8}{3}m_1$$

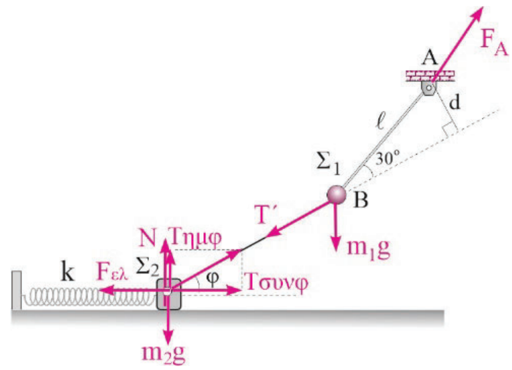
ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την ισορροπία του $Σ_2$ στον οριζόντιο άξονα έχουμε ότι:

$$Tσυνφ = kΔl = 8N \quad (1)$$

Από την ισορροπία του m_2 στον κατακόρυφο άξονα και εφόσον $N=m_2g/2=6N$ θα έχουμε:

$$Tημφ + N = m_2g \Rightarrow Tημφ = 6N \quad (2)$$



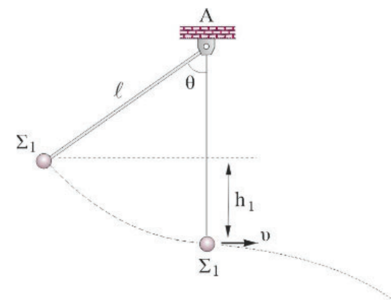
Από (1) και (2) έχουμε:

$$ημ^2φ + συν^2φ = \frac{36}{T^2} + \frac{64}{T^2} \Rightarrow T = 10N$$

Από (2) βρίσκουμε ότι η γωνία φ έχει ημφ=0,6 και συνφ=0,8, άρα εφφ=3/4.

Γ2. Για την οριζόντια βολή του σφαιριδίου ισχύουν οι σχέσεις

$$y = \frac{1}{2}gt^2, \ x = υt$$



και απ' αυτές προκύπτει η παραβολική εξίσωση της τροχιάς

$$y = \frac{gx^2}{2υ^2}$$

Από την εξίσωση τροχιάς βρίσκουμε την ταχύτητα που έχει το σφαιρίδιο τη στιγμή που αποκολλάται:

$$y = \frac{5x^2}{6} = \frac{10x^2}{2υ^2} \Rightarrow υ = \sqrt{6} \ m/s$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας για το σφαιρίδιο έχουμε:

$$m_1gh_1 = \frac{1}{2}m_1υ^2 \Rightarrow h_1 = \frac{υ^2}{2g} = 0,3m$$

Από τον μοχλοβραχίονα βρίσκουμε το μήκος της ράβδου

$$\ell = \frac{d}{ημ30^0} = 10\sqrt{2}cm$$

$$L = m_1υ\ell = 0,1kg \cdot \sqrt{6}m/s \cdot 0,1\sqrt{2}m \Rightarrow L = 0,02\sqrt{3} \ Kg\frac{m^2}{s}$$

Γ3. Αφού η ορμή σχηματίζει γωνία 45ᵒ με το οριζόντιο δάπεδο θα έχουμε:

$$εφ45^0 = \frac{p_y}{p_χ} = \frac{υ_y}{υ} = 1 \Rightarrow υ_y = \sqrt{6} \ m/s$$

Άρα, το χρονικό διάστημα κίνησης του σφαιριδίου είναι:

$$\upsilon_y = g\,\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\upsilon_y}{g} = 0{,}1\sqrt{6}\,s$$

Άρα, το ύψος είναι: $h = \frac{1}{2}g\Delta t^2 = 0{,}3m$

Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του σφαιριδίου είναι:

$$\frac{dU}{dt} = -m_1 g\upsilon_y = -\sqrt{6}\ J/s$$

Γ4. Από την ΑΔΕΤ έχουμε: $E = K + U = 4U \Rightarrow \frac{1}{2}\kappa A^2 = 4\frac{1}{2}\kappa x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{2} = \pm 0{,}02m$

Επειδή ψάχνουμε τη δεύτερη φορά και η θετική φορά της ταλάντωσης είναι προς τα δεξιά, η απομάκρυνση είναι αρνητική, άρα: $x = -0{,}02m$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Στη θέση ισορροπίας του συστήματος θα ισχύει ότι: $(m+M)g\ \eta\mu\varphi = k\ \Delta l \quad (1)$

Σε μία τυχαία θέση του συστήματος κάτω από τη θέση ισορροπίας έχουμε: $\Sigma F = -k(\Delta l + x) + (m+M)g\ \eta\mu\varphi \Rightarrow \Sigma F = -k\ x$

Άρα το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με D=k=400N/m. Για να βρούμε τη σταθερά επαναφοράς του κάθε σώματος έχουμε:

$$\frac{D_m}{k} = \frac{m\omega^2}{(m+M)\omega^2} \Rightarrow D_m = \frac{m}{(m+M)}k = \frac{400}{4}\frac{N}{m} \Rightarrow D_m = 100\frac{N}{m}$$

$$\frac{D_M}{k} = \frac{M\omega^2}{(m+M)\omega^2} \Rightarrow D_M = \frac{M}{(m+M)}k = \frac{1200}{4}\frac{N}{m} \Rightarrow D_M = 300\frac{N}{m}$$

Δ2. Το σύστημα αφήνεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι ίσο με το Δl:

$$A = \frac{(m+M)g\ \eta\mu\varphi}{k} = 0{,}05m$$

Η στατική τριβή θα παίρνει την μεγαλύτερη τιμή της στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης γιατί εκεί είναι αντίρροπη της συνιστώσας της B_x και θα πρέπει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας του. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη για αρμονική ταλάντωση του σώματος m στη θέση αυτή και έχουμε: $-T_{\sigma\tau} + mg\eta\mu\varphi = -D_m A \Rightarrow T_{\sigma\tau} = mg\eta\mu\varphi + D_m A \quad (1)$

Η στατική τριβή θα πρέπει να είναι:

$$T_{\sigma\tau} \le \mu_s N \rightarrow mg\eta\mu\varphi + D_m A \le \mu_s mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow mg\eta\mu\varphi + \frac{m}{(m+M)}\kappa\frac{(m+M)g\ \eta\mu\varphi}{k} \le \mu_s mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$2mg\eta\mu\varphi \le \mu_s mg\sigma\upsilon\nu\varphi \to \mu_s \ge 2\ \varepsilon\varphi\varphi \Rightarrow \mu_s \ge 2\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \mu_{s,min} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

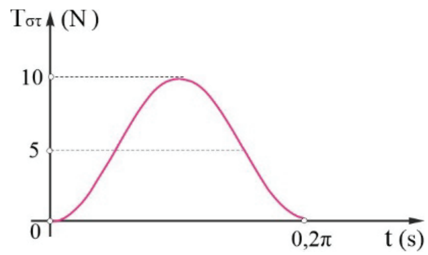
Δ3. Βρίσκουμε την εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου. Επειδή το σώμα ξεκινάει από την ακραία θετική απομάκρυνση θα είναι $\varphi_o=\pi/2$ rad άρα θα έχουμε:

$$y = A\ \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = A\ \eta\mu\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t + \varphi_0\right) \Rightarrow y = 0,05\ \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(S.I.)$$

Για το σώμα m θα ισχύει ότι:

$$\Sigma F = -D_m y \Rightarrow T_{\sigma\tau} - mg\eta\mu\varphi = -D_m y \Rightarrow$$
$$T_{\sigma\tau} = mg\eta\mu\varphi - D_m y \Rightarrow$$
$$T_{\sigma\tau} = 5 - 100\cdot 0,05\ \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow T_{\sigma\tau} = 5 - 5\sigma\upsilon\nu 10t\,(S.I.)$$

Η γραφική παράσταση της στατικής τριβής με τον χρόνο σε μία περίοδο είναι:



Δ4. Στη θέση ισορροπίας του το σύστημα έχει μέγιστη ταχύτητα:

$$\upsilon = \omega A = 10\cdot 0,05m = 0,5\ m/s$$

Με τον αποχωρισμό του σώματος μάζας m αλλάζει η θέση ισορροπίας και η νέα θέση απέχει από το φυσικό μήκος απόσταση:

$$Mg\ \eta\mu\varphi = k\Delta l' \Rightarrow \Delta l' = \frac{3}{80}\ m$$

Εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ αμέσως μετά τον αποχωρισμό και στην ακραία θέση για να βρούμε το νέο πλάτος ταλάντωσης του σώματος M:

$$\frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}k(\Delta l - \Delta l')^2 \Rightarrow$$

$$A' = \sqrt{\frac{M\upsilon^2}{k} + (\Delta l - \Delta l')^2} = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{400} + \left(\frac{1}{20} - \frac{3}{80}\right)^2}\ m = \sqrt{\frac{3}{1600} + \frac{1}{6400}}\ m \Rightarrow A' = \frac{\sqrt{13}}{80}m$$

Άρα η επί τις εκατό μεταβολή στην ενέργεια είναι:

$$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}kA'^2 - \frac{1}{2}kA^2}{\frac{1}{2}kA^2}100\% = \frac{A'^2 - A^2}{A^2}100\% = \frac{\frac{13}{6400} - \frac{1}{400}}{\frac{1}{400}}100\% = \frac{\frac{-3}{6400}}{\frac{1}{400}}100\% \Rightarrow$$

$$\pi\% = -\frac{1200}{64}\% = -18,75\%$$