Λύσεις κριτηρίου 19

ΘΕΜΑ Α

Α1. (α) **Α**2. (β) **Α**3. (δ) **Α**4. (γ) **Α**5. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. (iii)

Εάν ο άνθρωπος, μάζας m, σταθεί δεξιά από το $Σ_2$ τότε επιλέγουμε να πάρουμε τη συνισταμένη των ροπών ως προς το δεξιό στήριγμα. Στην οριακή περίπτωση, επειδή χάνεται η επαφή με το στήριγμα $Σ_1$, η δύναμη από αυτό θα μηδενιστεί άρα θα έχουμε:

$$-mgd_2 + \frac{MgL}{6} = 0 \Rightarrow mgd_2 = \frac{MgL}{6} \quad (1)$$

Εάν ο άνθρωπος σταθεί αριστερά από το $Σ_1$ τότε επιλέγουμε να πάρουμε τη συνισταμένη των ροπών ως προς το αριστερό στήριγμα. Στην οριακή περίπτωση, επειδή χάνεται η επαφή με το στήριγμα $Σ_2$, η δύναμη από αυτό θα μηδενιστεί άρα θα έχουμε:

$$mgd_1 - \frac{MgL}{4} = 0 \Rightarrow mgd_1 = \frac{MgL}{4} \quad (2)$$

Διαιρούμε τις εξισώσεις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε $\frac{d_1}{d_2} = 1,5$.

Β2. (i)

Σε χρονικό διάστημα ίσο με $\Delta t = 2,5T$ από την έναρξη της ταλάντωσής της η κοιλία διανύει απόσταση S=10Α΄=20Α=λ, όπου Α είναι το πλάτος του τρέχοντος κύματος.

Από την τετμημένη του διαγράμματος βρίσκουμε το πλάτος των τρεχόντων κυμάτων:

$$y_{max} = A' \Rightarrow \sqrt{0,01}\,m^2 = 2A \Rightarrow A = 0,05m$$

Άρα, το μήκος κύματος είναι: $\lambda = 20A = 1m$

Από την τεταγμένη του διαγράμματος βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα των κυμάτων:

$$\upsilon_{max}^2 = (\omega A')^2 \Rightarrow 1 = \omega 2A \Rightarrow \omega = 10 rad/s$$

Άρα, οι εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων είναι:

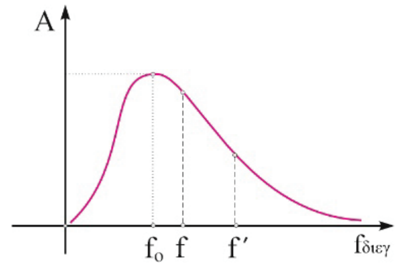
$$y_1 = 0,05ημ(10t - 2\pi x), \quad y_2 = 0,05ημ(10t + 2\pi x)$$

Β3. (ii)

Έστω d η απόσταση ανάμεσα στο Ο και στο φελλό, οπότε αρχικά θα ισχύει ότι $d = 2\lambda$. Μετά αλλάζει η συχνότητα ταλάντωσης και το μήκος κύματος, η ταχύτητα όμως του κύματος δεν αλλάζει, γιατί αυτή εξαρτάται μόνο από το μέσο διάδοσης. Η απόσταση ανάμεσα στα σημεία Ο και Φ θα είναι $d = \frac{7\lambda'}{2}$. Επομένως η τελική συχνότητα του διεγέρτη είναι μεγαλύτερη από την αρχική αφού:

$$2\lambda = \frac{7\lambda'}{2} \Rightarrow \frac{2\upsilon}{f} = \frac{7\upsilon}{2f'} \Rightarrow f' = \frac{7f}{4}$$

Η ιδιοσυχνότητα είναι ίση με $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$. Άρα, η συχνότητα του διεγέρτη ήταν αρχικά μεγαλύτερη από την ιδιοσυχνότητα του συστήματος και έπειτα έγινε ακόμα μεγαλύτερη.



Αυτό σημαίνει ότι αρχικά στο διάγραμμα πλάτους-συχνότητας διεγέρτη βρισκόμασταν δεξιά από την συχνότητα συντονισμού, ενώ τελικά απομακρυνόμαστε ακόμα πιο πολύ από την κορυφή του διαγράμματος. Επομένως τόσο το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης όσο και το πλάτος του κύματος τελικά θα μειωθούν.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τις ταχύτητες των κυμάτων βρίσκουμε τα μήκη κύματος στα δύο υλικά μέσα:

$$\lambda_1 = \frac{\upsilon_1}{f} = \frac{\upsilon_1}{\frac{\omega}{2\pi}} \Rightarrow \lambda_1 = 0,5\text{m} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\upsilon_2}{f} = \frac{\upsilon_1}{\frac{\omega}{2\pi}} \Rightarrow \lambda_2 = 0,2\text{m}$$

Οι εξισώσεις των τρεχόντων κυμάτων είναι:

$y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi(10t+2x)(\text{S.I.})$ και $y_2 = 0,2\eta\mu 2\pi(10t-5x)(\text{S.I.})$

Γ2. Όταν η πηγή περνάει για δεύτερη φορά από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής της και έχει αρνητική ταχύτητα έχει παρέλθει χρόνος ίσος με: $\Delta t = \frac{3T}{2} = 0,15\text{s}$

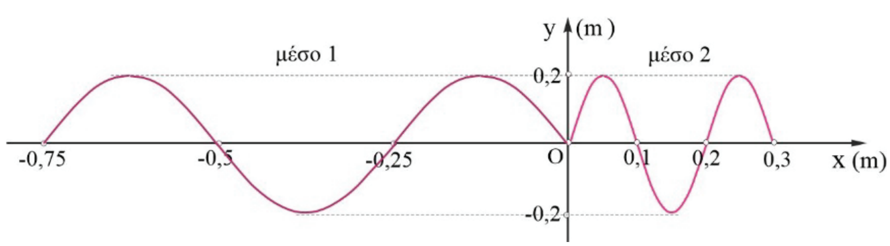
Σε αυτό το χρονικό διάστημα το κύμα 1 έχει φθάσει στη θέση

$x = -\upsilon_1 \Delta t = -0,75\text{m}$, σε απόσταση 1,5 λ_1.

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το κύμα 2 έχει φθάσει στη θέση

$x' = \upsilon_2 \Delta t = 0,3\text{m}$, σε απόσταση 1,5 λ_2.

Άρα τα στιγμιότυπα είναι:



Γ3. Η απομάκρυνση του σημείου που βρίσκεται στη θέση x= -1m τη χρονική στιγμή t_1=0,325s είναι:

$$y_1 = 0,2\eta\mu 2\pi(3,25-2)\text{m} = 0,2\text{m}$$

Άρα η επιτάχυνσή του είναι: $\alpha = -\omega^2 y_1 = -800 \text{ m/s}^2$

Γ4. Η διαφορά φάσης ανάμεσα στα σημεία Κ και Λ μετά την έναρξη της ταλάντωσής τους είναι:

$$\varphi_\Lambda - \varphi_\kappa = \pi \text{ rad}$$

Γ5. i) Τα σημεία είναι σε αντίθεση φάσης και προηγείται η φάση του σημείου Λ, δηλαδή έχουν διαρκώς αντίθετες απομακρύνσεις (με εξαίρεση τη θέση ισορροπίας) και αντίθετες ταχύτητες. Για τις απομακρύνσεις θα ισχύει ότι:

$$\frac{y_\Lambda}{y_\kappa} = \frac{0,2\eta\mu(\varphi_\kappa + \pi)}{0,2\eta\mu\varphi_\kappa} = -1 \Rightarrow y_\Lambda = -y_\kappa = -0,1\text{m}$$

ii) Για τις ταχύτητες σε κάθε στιγμή ισχύει ότι: $\frac{\upsilon_\Lambda}{\upsilon_\kappa} = \frac{4\pi\,\sigma\upsilon\nu(\varphi_\kappa + \pi)}{4\pi\,\sigma\upsilon\nu\varphi_\kappa} = -1 \Rightarrow \upsilon_\Lambda = -\upsilon_\kappa < 0$

Η ταχύτητα του σημείου Λ είναι:

$$\text{E=K+U} \Rightarrow \upsilon_\Lambda = -\omega\sqrt{A^2 - y_\Lambda^{\ 2}} = -20\pi\sqrt{0,04 - 0,01}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \upsilon_\Lambda = -2\pi\sqrt{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

iii) Η οριζόντια απόσταση των θέσεων ισορροπίας των δύο σημείων είναι: $\Delta x = 0,95\text{m}$

Η κατακόρυφη απόστασή τους αφού βρίσκονται σε αντίθεση φάσης είναι: $\Delta y = 0,2\text{m}$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{0,9425}\text{m} \Rightarrow d = 0,97\text{m}$

ΘΕΜΑ Δ

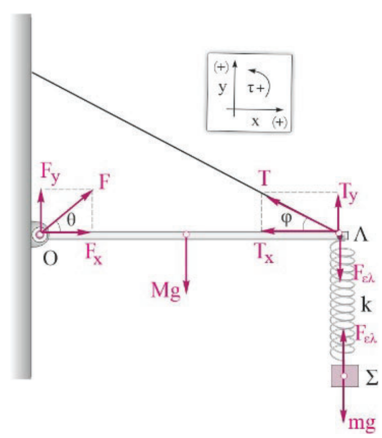
Δ1. Από την ισορροπία του σώματος Σ έχουμε:

$$\Delta l = \frac{mg}{k} = 0,1\text{m}$$

Από την ισορροπία της ράβδου ως προς το Ο έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(O)}=0 \Rightarrow T_y L - F_{\varepsilon\lambda} L - Mg\frac{L}{2} = 0$$

$$T_y = 15\text{N},\ \ T = 30\text{N},\ T_x = 15\sqrt{3}\text{N}$$



Από την ισορροπία της ράβδου στον οριζόντιο άξονα:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x = 15\sqrt{3}\text{N}$$

Από την ισορροπία της ράβδου στον κατακόρυφο άξονα:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + T_y = Mg + F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow F_y = 5\text{N}$$

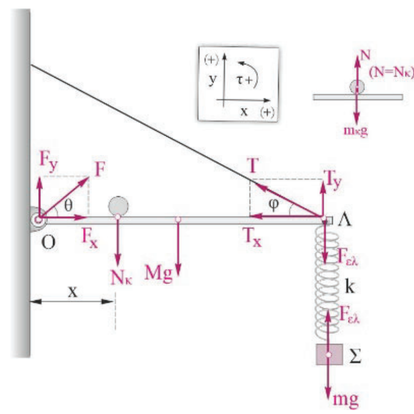
Η δύναμη από την άρθρωση είναι: $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=10\sqrt{7}N$

και σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα με $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{F_y}{F_x}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

Δ2. Η γωνία περιστροφής του κυλίνδρου είναι: $\Delta\varphi=2\pi N=25\ rad$

Η ακτίνα του κυλίνδρου είναι: $R=\dfrac{L}{\Delta\varphi}=\dfrac{1}{25}m=0{,}04m$

Δ3. Υποθέτοντας ότι σε μία τυχαία στιγμή ο κύλινδρος απέχει x από το σημείο Ο θα έχουμε:



$$\Sigma\tau_{(o)}=0\Rightarrow T_yL-F_{\varepsilon\lambda}\ L-Mg\frac{L}{2}-m_\kappa gx=0\Rightarrow$$

$$\frac{T}{2}-10-5-10x=0\Rightarrow\ T=30+20x\quad(1)$$

Ο κύλινδρος έχει επιτάχυνση: $L=\dfrac{1}{2}\alpha_{cm}t^2\Rightarrow\alpha_{cm}=\dfrac{2L}{t^2}=2\dfrac{m}{s^2}$

Άρα, η μετατόπιση δίνεται από τη σχέση:

$$x=\frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2=t^2\quad(2)$$

Από (1) και (2) έχουμε: $T=30+20t^2$ (S.I.), με $0\le t\le 1s$

Δ4. Το νήμα μπορεί να λυγίσει μόνο στην περίπτωση που η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στην ράβδο έχει φορά προς τα πάνω. Αυτό σημαίνει ότι το ελατήριο πρέπει να έχει συσπειρωθεί κατά y σε σχέση με το φυσικό του μήκος. Από την ισορροπία των ροπών στην οριακή περίπτωση που η τάση του νήματος γίνεται μηδενική παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_{(o)}=0\Rightarrow k\ y\ L-Mg\frac{L}{2}=0\Rightarrow 100y-5=0\Rightarrow y=0{,}05m$$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης στην περίπτωση αυτή δεν πρέπει να υπερβαίνει την τιμή:

$$A=\Delta l+y=0{,}15m$$

Το νήμα μπορεί να σπάσει, όταν η δύναμη ελατηρίου ασκείται στη ράβδο με φορά προς τα κάτω. Η μεγαλύτερη τιμή που παίρνει η δύναμη του ελατηρίου είναι στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης άρα θα έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(o)}=0\Rightarrow -F_{\varepsilon\lambda}L-Mg\frac{L}{2}+T_{o\rho\iota\alpha\kappa o,y}L=0\Rightarrow -F_{\varepsilon\lambda}-5+25=0\Rightarrow F_{\varepsilon\lambda}=20N$$

Όμως: $F_{\varepsilon\lambda} = 20N \Rightarrow k(\Delta l + A') = 20 \Rightarrow \Delta l + A' = 0,2m \Rightarrow A' = 0,1m$

Άρα, το πλάτος της ταλάντωσης ώστε οριακά να μην κόβεται το νήμα θα πρέπει να είναι οριακά μικρότερο από 0,1m. Επομένως για να μην κόβεται και να μην λυγίζει το νήμα θα πρέπει το πλάτος της ταλάντωσης να μην υπερβαίνει την τιμή 0,1m .

Δ5. Η εξίσωση απομάκρυνσης-χρόνου εάν την t=0 το σώμα ξεκινάει από την ακραία θετική θέση είναι:

$$y = A'\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0,1\ \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\ (S.I.)$$