Λύσεις κριτηρίου 20

ΘΕΜΑ Α

Α1.β Α2.δ Α3.γ Α4.α Α5. α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. (iii)

Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ για τη $Σ_1$ για να υπολογίσουμε την ταχύτητά της στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της:

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \Rightarrow u_1 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Η κρούση της $Σ_1$ με τη $Σ_2$ οδηγεί σε ανταλλαγή ταχυτήτων διότι $m_2 = m_1$:

$$u_2' = u_1 = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ για τη $Σ_3$ μετά την κρούση:

$$m_3 gh' = \frac{1}{2} m_3 u_3'^2 \to u_3' = \sqrt{\frac{gh}{2}}.$$

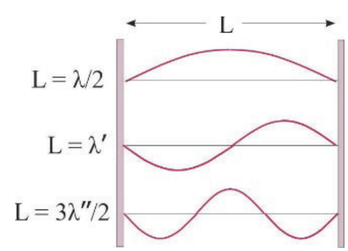
Επειδή η κρούση της $Σ_3$ με την $Σ_2$ είναι κεντρική και ελαστική έχουμε ότι:

$$u_3' = \frac{2m_2}{m_3 + m_2} u_2' \Rightarrow u_3' = \frac{2m_2}{m_3 + m_2} \sqrt{2gh} \Rightarrow u_3' = \sqrt{\frac{gh}{2}} = \frac{2m_2}{m_3 + m_2} \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$m_3 + m_2 = 4m_2 \quad \Rightarrow \quad m_3 = 3m_2 = 3m_1$$

Β2. (iii)

Μία χορδή με ακλόνητα και τα δύο άκρα μπορεί να πάρει μόνο συγκεκριμένα σχήματα, όπως τα διπλανά:



Άρα το μήκος της χορδής είναι:

$$L = \frac{N\lambda}{2} \quad (1) \quad \text{με } N = 1, 2, 3\ldots$$

όπου Ν το πλήθος των κοιλιών που δημιουργούνται στη χορδή.

Μπορούμε να φτιάξουμε μία εξίσωση αντίστοιχη με την (1) που να έχει τον αριθμό των δεσμών στη χορδή, εάν σκεφτούμε ότι οι κοιλίες σε κάθε ένα από τα παραπάνω σχήματα είναι πάντοτε λιγότερες κατά μία μονάδα σε σχέση με τους Κ δεσμούς, άρα: $N = K - 1 \quad (2)$

Από (1) και (2) έχουμε: $L = \frac{(K-1)\lambda}{2} = (K-1)\frac{\upsilon}{2f} \Rightarrow \quad f = (K-1)\frac{\upsilon}{2L}$ με $K \geq 2$

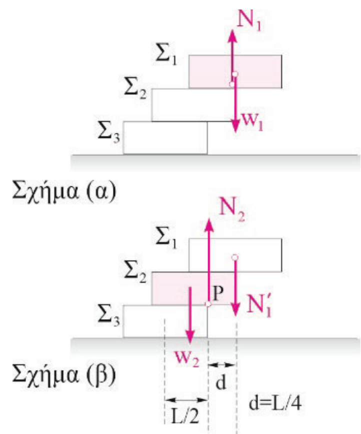
όπου Κ είναι το πλήθος των δεσμών που δημιουργούνται στη χορδή.

Β3. (ii)

Αφού τα τούβλα οριακά ισορροπούν, αυτό σημαίνει ότι οι αποστάσεις των άκρων των τούβλων είναι οι μέγιστες δυνατές. Άρα, οι φορείς των δυνάμεων Ν των κάθετων αντιδράσεων μεταξύ των τούβλων στην οριακή περίπτωση της ισορροπίας, βρίσκονται πάντοτε πάνω στην ακμή του τούβλου που βρίσκεται ακριβώς από κάτω τους.

Στο σχήμα (α), η μέγιστη απόσταση που μπορεί να εξέχει το πρώτο τούβλο από το άκρο του δεύτερου για να ισορροπεί είναι ίση με L/2. Αυτό συμβαίνει διότι στο πάνω τούβλο ασκούνται δύο δυνάμεις, το βάρος του και η δύναμη από το κάτω τούβλο και επειδή αυτές είναι αντίθετες δημιουργούν ζεύγος δυνάμεων. Η μόνη περίπτωση ένα ζεύγος να μην δίνει ροπή είναι οι φορείς των δυνάμεων να ταυτίζονται, επομένως η δύναμη N_1 πρέπει να ασκείται στο άκρο του τούβλου 2 για να έχει κοινό φορέα με το βάρος του τούβλου 1.

Η συνθήκη ισορροπίας του τούβλου 1 δίνει $N_1 = w_1$



Στο σχήμα (β), στο δεύτερο τούβλο ασκείται η N'_1 από το πρώτο τούβλο ($N_1=N'_1$), το βάρος του w_2 και μία δύναμη αντίδρασης N_2 από το τρίτο τούβλο. Ο φορέας της N_2 σε αυτή την περίπτωση πρέπει να βρίσκεται οριακά στο δεξιό άκρο του τούβλου 2, σημείο Ρ.

Εάν ονομάσουμε d την απόσταση του φορέα της N_2 από το δεξί άκρο του τούβλου 2, παίρνοντας συνθήκη ισορροπίας για τη στροφική κίνηση για το τούβλο 2 έχουμε:

$$\Sigma\tau_{(P)}=0 \Rightarrow N'_1 d = w_2\left(\frac{L}{2}-d\right)$$

Παίρνοντας υπόψη ότι: $N'_1=w_1=w$ και $w_2=w$ η τελευταία σχέση δίνει $d_1=\frac{L}{4}$

Άρα η οριζόντια απόσταση x του κέντρου μάζας του πρώτου τούβλου από το κέντρο μάζας του τρίτου τούβλου είναι $x=\frac{L}{2}+\frac{L}{4}=\frac{3L}{4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συχνότητα των κυμάτων είναι: $f=\frac{\omega}{2\pi}=4\text{Hz}$

Από την ταχύτητα των κυμάτων βρίσκουμε το λ: $\upsilon=\lambda\cdot f=10\frac{m}{s}\Rightarrow\lambda=2,5m$

Θεωρούμε ένα σημείο Σ που απέχει από την Π_1 απόσταση x στο οποίο έχουμε ενισχυτική συμβολή και για το οποίο ισχύει:

$$r_1-r_2=N\lambda\Rightarrow x-(d-x)=N\lambda\Rightarrow x=1,25N+5$$

$$0<x<d\rightarrow -4<N<4$$

Άρα $N=-3,\ -2,\ -1, 0, 1, 2, 3$

και υπάρχουν 7 σημεία ενισχυτικής συμβολής μεταξύ των δύο πηγών.

Γ2. Βρίσκω στο σημείο Λ τι είδους συμβολή έχουμε:

$$r_1' - r_2' = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \left(\frac{d}{2}+\frac{\lambda}{4}\right)-\left(\frac{d}{2}-\frac{\lambda}{4}\right) = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow N=0$$

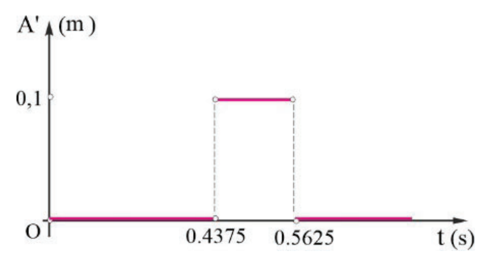
Άρα στο σημείο Λ έχουμε απόσβεση. Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται να φθάσει το κύμα από την πιο απομακρυσμένη πηγή στο σημείο Λ είναι:

$$t_1 = \frac{r_1'}{\upsilon} = 0{,}5625\text{s}$$

Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται να φθάσει το κύμα από την πλησιέστερη πηγή στο σημείο Λ είναι:

$$t_2 = \frac{r_2'}{\upsilon} = 0{,}4375\text{s}$$

Άρα η γραφική παράσταση πλάτους - χρόνου είναι:



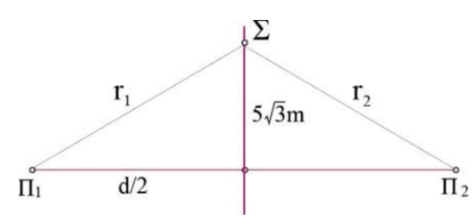
Γ3. Επιλέγω δύο διαδοχικά σημεία απόσβεσης που απέχουν μεταξύ τους ελάχιστη απόσταση x_1. Επειδή τα σημεία είναι διαδοχικά επιλέγουμε για το πρώτο σημείο τον αριθμό Ν. Εάν x είναι η απόσταση αυτού του σημείου από τη μεσοκάθετο έχουμε:

$$r_1' - r_2' = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \left(\frac{d}{2}+x\right)-\left(\frac{d}{2}-x\right) = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2x = (2N+1)\frac{\lambda}{2} \quad (1)$$

Στο επόμενο σημείο απόσβεσης αντιστοιχεί ο αριθμός Ν+1 και έχουμε:

$$r_1'' - r_2'' = \left[2(N+1)+1\right]\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \left(\frac{d}{2}+x+x_1\right)-\left(\frac{d}{2}-x-x_1\right) = (2N+3)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2x_1 = \frac{2\lambda}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{2} = 1{,}25\text{m}$$

Γ4. Στη μεσοκάθετο έχουμε πάντοτε ενισχυτική συμβολή διότι ικανοποιείται η συνθήκη για $r_1 - r_2 = N\lambda$, με Ν=0, επειδή $r_1 = r_2$ (1).



Είναι

$$r_1 = r_2 = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2}\,\text{m} = \sqrt{25+75}\,\text{m} = 10\text{m}$$

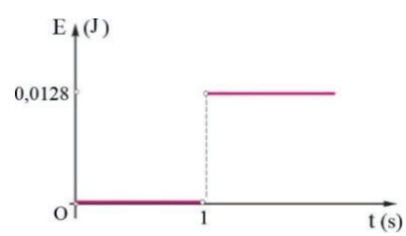
Άρα, το χρονικό διάστημα μέχρι να ξεκινήσει η συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Σ είναι:

$$\Delta t = \frac{r_1}{\upsilon} = 1\text{s}\,.$$

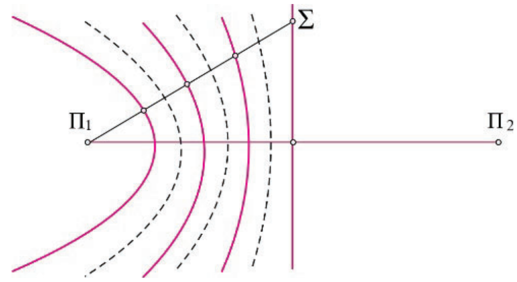
Επομένως πριν τη χρονική στιγμή 1s κανένα κύμα δεν έχει φθάσει στο Σ, άρα τόσο το πλάτος ταλάντωσης, όσο και η ενέργεια του σημείου είναι μηδενικά. Μετά τη στιγμή 1s η ενέργεια είναι σταθερή: $E = \frac{1}{2}m\omega^2(2A)^2 = 128\cdot 10^{-4}\,\text{J}$

Συμπερασματικά: $\left\{\begin{matrix} E = 0,\ \text{για}\ t < 1\text{s} \\ E = 128\cdot 10^{-4}\text{J},\ \text{για}\ t \geq 1\text{s} \end{matrix}\right\}$

Η γραφική παράσταση της ενέργειας με τον χρόνο είναι:



Γ5. Στο ερώτημα Γ1 είχαμε βρει επτά σημεία ενισχυτικής συμβολής ανάμεσα από τις δύο πηγές. Επειδή στη μεσοκάθετο έχουμε πάντοτε ενισχυτική συμβολή, αυτό σημαίνει ότι ανάμεσα στην πηγή $Π_1$ και τη μεσοκάθετο έχουμε τρία σημεία ενισχυτικής συμβολής και συνολικά πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $Π_1Σ$ έχουμε 4 σημεία ενίσχυσης. Οι ενισχυτικές καμπύλες που περνούν από τα σημεία αυτά δείχνονται στο διπλανό σχήμα.



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η ταχύτητα που έχει το $Σ_1$ ακριβώς πριν την κρούση είναι: $υ_1 = \sqrt{2gh}$

Από τους τύπους της κεντρικής και ελαστικής κρούσης έχουμε:

$$υ_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}υ_1 = -\frac{υ_1}{3} \quad , \qquad υ_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}υ_1 = \frac{2υ_1}{3}$$

Το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε το $Σ_1$ να ανέλθει στο μέγιστο ύψος και να επανέλθει στο σημείο σύγκρουσης είναι:

$$Δt = 2\frac{|υ_1'|}{g} = 2\frac{υ_1}{3g} \quad (1)$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το $Σ_2$ κάνει μισή ταλάντωση: $Δt = \frac{T}{2} = π\sqrt{\frac{m_2}{κ}} \quad (2)$

Από (1) και (2) έχουμε: $2\frac{υ_1}{3g} = π\sqrt{\frac{m_2}{κ}} \Rightarrow h = π^2\frac{9m_2g}{8κ} = 10\frac{90}{800}m \Rightarrow h = \frac{9}{8}m$

Δ2. Η ταχύτητα του σώματος $Σ_2$ μετά την κρούση είναι:

$$υ_2' = \frac{2}{3}\sqrt{2gh} = \frac{2}{3}\sqrt{2\cdot 10\cdot\frac{9}{8}}\frac{m}{s} \Rightarrow υ_2' = π\frac{m}{s}$$

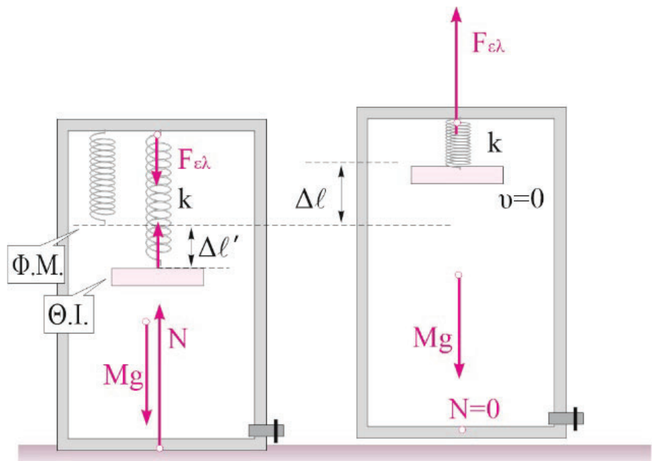
Το πλάτος ταλάντωσης του $Σ_2$ μετά την κρούση είναι:

$$υ_2' = ω\,A \Rightarrow A = \frac{\frac{2υ_1}{3}}{ω} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{k}{m_2}}} = \frac{\frac{10}{π}}{\sqrt{\frac{100}{1}}}m = \frac{1}{π}\ m \quad \Rightarrow A = \frac{1}{π}\ m$$

Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι μηδενική διότι το σώμα ξεκινάει την χρονική στιγμή t=0 από την θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα. Άρα η εξίσωση ορμής-χρόνου είναι:

$$p = m_2υ_2 = m_2\sqrt{\frac{k}{m_2}}Aσυνωt \Rightarrow p = \frac{10}{π}συν10t(SI)$$

Δ3. Στο δοχείο σε κάθε χρονική στιγμή ασκείται η δύναμη του βάρους του και η δύναμη από το ελατήριο. Όσο το ελατήριο είναι επιμηκυμένο η δύναμη από το ελατήριο στο δοχείο έχει φορά προς τα κάτω και είναι ομόρροπη με το βάρος του, άρα το δοχείο δεν μπορεί να αποκολληθεί από το έδαφος. Όταν όμως το ελατήριο συσπειρωθεί, τότε οι δυνάμεις πάνω στο δοχείο είναι όπως στο σχήμα.



Συνεπώς, το δοχείο θα χάσει την επαφή με το έδαφος, όταν η δύναμη ελατηρίου γίνει μεγαλύτερη από τη δύναμη του βάρους του. Στην περίπτωση αυτή το σώμα $Σ_2$ θα απέχει από το φυσικό μήκος απόσταση Δl:

$$k\,\Delta l = Mg \Rightarrow \Delta l = \frac{Mg}{k} = \frac{100}{100}\text{m} = 1\text{m}$$

Όμως στη θέση ισορροπίας του το $Σ_2$ απέχει από το φυσικό μήκος Δl΄:

$$m_2 g = \kappa\,\Delta l' \rightarrow \Delta l' = \frac{m_2 g}{\kappa} = \frac{10}{100}\text{m} = 0{,}1\text{m}$$

Άρα, το δοχείο χάνει την επαφή αν το πλάτος είναι τουλάχιστον 1,1m.

Όμως, $A = \frac{1}{\pi}\ \text{m} < 1{,}1\text{m}$, άρα το δοχείο δεν χάνει την επαφή του με το έδαφος.

Δ4. Βρίσκουμε το χρονικό διάστημα στο οποίο το πλάτος γίνεται το μισό του αρχικού:

$$A = A_o e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda\,\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\ln 2}{\Lambda} = \frac{\ln 2}{\frac{\ln 2}{10\pi}} \Rightarrow \Delta t = 10\pi\ \text{s}$$

Η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης στην περίπτωση αυτή είναι: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 0{,}2\pi\ \text{s}$

Άρα ο αριθμός των ταλαντώσεων είναι: $N = \frac{\Delta t}{T} = 50$ ταλαντώσεις.

Δ5. Το πλάτος της ταλάντωσης μετά από χρονικό διάστημα Δt=100T από τη στιγμή που ξεκίνησε η φθίνουσα ταλάντωση είναι:

$$A = A_o e^{-\Lambda t} = \frac{1}{\pi}\ e^{-\frac{\ln 2}{10\pi}100\cdot 0{,}2\pi} = \frac{1}{\pi}\ e^{-2\ln 2} \Rightarrow A = \frac{1}{4\pi}\ \text{m}$$

Η θερμότητα που απελευθερώνεται στο χρονικό διάστημα από τη στιγμή t_1=50T μέχρι τη στιγμή t_2=100T είναι:

$$Q = \frac{1}{2}m_2\omega^2\left[\left(\frac{A_o}{2}\right)^2 - \left(\frac{A_o}{4}\right)^2\right] \Rightarrow Q = \frac{15}{16}\text{J}$$