Λύσεις κριτηρίου 29

ΘΕΜΑ Α

Α1. (δ) **Α**2. (α) **Α**3. (δ) **Α**4. (γ) **Α**5. α. Λ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. (**ii**)

Η μέση ισχύς στον αντιστάτη είναι:

$$\overline{P} = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{R} = \frac{V_{max}^2}{2R} = \frac{N^2\omega^2B^2A^2}{2R} = \frac{4\pi^2N^2B^2A^2}{2RT^2} \Rightarrow \overline{P} = \frac{2\pi^2N^2B^2A^2}{RT^2}$$

Η νέα μέση ισχύς θα γίνει: $\overline{P'} = \dfrac{2\pi^2N^2\left(2B\right)^2A^2}{R\left(4T\right)^2} \Rightarrow \overline{P'} = \dfrac{\pi^2N^2B^2A^2}{2RT^2}$

Άρα, η νέα μέση ισχύς θα γίνει: $\overline{P'} = \dfrac{\overline{P}}{4}$

Β2. (**ii**)

Χρησιμοποιούμε τον νόμο Biot-Savart για να βρούμε την ένταση που δίνει το κάθε τόξο κύκλου:

$$\Delta B = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{i\,\Delta l}{r^2}\eta\mu\theta \Rightarrow \sum\Delta B = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{i}{r^2}\eta\mu 90^0\cdot\sum\Delta l \Rightarrow B = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{i}{r^2}S$$

όπου S είναι το μήκος τόξου και r η απόστασή του από το σημείο Σ. Το κάθε τμήμα του αγωγού δίνει ένταση μαγνητικού πεδίου που είναι:

$B_1 = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{i}{\alpha^2}S_1 = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{i}{\alpha^2}\alpha\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow B_1 = \dfrac{\mu_o}{12}\dfrac{i}{\alpha}$ κάθετη στη σελίδα προς τα έξω

$B_2 = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{i}{4\alpha^2}S_2 = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{i}{4\alpha^2}2\alpha\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow B_2 = \dfrac{\mu_o}{24}\dfrac{i}{\alpha}$ κάθετη στη σελίδα προς τα μέσα

$B_3 = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{i}{9\alpha^2}S_3 = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{i}{9\alpha^2}3\alpha\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow B_3 = \dfrac{\mu_o}{36}\dfrac{i}{\alpha}$ κάθετη στη σελίδα προς τα έξω

$B_4 = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{i}{16\alpha^2}S_4 = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{i}{16\alpha^2}4\alpha\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow B_4 = \dfrac{\mu_o}{48}\dfrac{i}{\alpha}$ κάθετη στη σελίδα προς τα μέσα

Τα ευθύγραμμα μέρη του αγωγού δε δημιουργούν μαγνητικό πεδίο στο Σ διότι:

$$\Delta B = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{i\,\Delta l}{r^2}\eta\mu\theta \Rightarrow \sum\Delta B = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{i}{r^2}\eta\mu 180^0\cdot\sum\Delta l = 0$$

Άρα η ολική ένταση στο Σ είναι:

$$B_\Sigma = B_1 - B_2 + B_3 - B_4 = \frac{\mu_o}{12}\frac{i}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{7\mu_o i}{144\alpha}$$

με φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.

Β3. (i)

Από τις στροφορμές των σωματιδίων βρίσκουμε τη σχέση ανάμεσα στα μέτρα των ταχυτήτων τους:

$$L_1 = 2L_2 \Rightarrow m\upsilon_1 R = 2m\upsilon_2 R \Rightarrow \upsilon_1 = 2\upsilon_2 \quad (1)$$

Για το σωματίδιο 1 ισχύει ότι:

$$\Sigma F = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} \Rightarrow F_{\eta\lambda} + F_{\mu\alpha\gamma\nu} = m_1\frac{\upsilon_1^2}{R} \Rightarrow Eq_1 + B\upsilon_1 q_1 = m_1\frac{\upsilon_1^2}{R} \quad (2)$$

Για το σωματίδιο 2 ισχύει ότι:

$$\Sigma F = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} \Rightarrow -F_{\eta\lambda} + F_{\mu\alpha\gamma\nu} = m_2\frac{\upsilon_2^2}{R} \Rightarrow -E|q_2| + B\upsilon_2|q_2| = m_2\frac{\upsilon_2^2}{R} \quad (3)$$

Διαιρούμε τις (2) και (3) κατά μέλη, αντικαθιστούμε $|q_1| = |q_2| = q$ και έχουμε:

$$\frac{Eq + B\upsilon_1 q}{-Eq + B\upsilon_2 q} = 4 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{5}{2}\frac{E}{B} \Rightarrow \upsilon_2 = 2{,}5\upsilon$$

Άρα, $\upsilon_1 = 5\upsilon$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$R_{o\lambda} = \frac{R_1 R_\pi}{R_1 + R_\pi} + R = (0{,}5 + 1{,}5)\Omega \Rightarrow R_{o\lambda} = 2\ \Omega$$

Η οριακή ταχύτητα του αγωγού είναι:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = Bil \Rightarrow mg = \frac{B^2\upsilon_{o\rho} l^2}{R_{o\lambda}} \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{mgR_{o\lambda}}{B^2 l^2} = 10\frac{m}{s}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του αγωγού όταν έχει την οριακή του ταχύτητα είναι:

$$\frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -mg\upsilon_{o\rho} \Rightarrow \frac{dU_{\beta\alpha\rho}}{dt} = -50\frac{J}{s}$$

και είναι αρνητικός γιατί ο αγωγός κατέρχεται κατά την κίνησή του.

Γ2. Το πηνίο αποθηκεύει τη μέγιστη ενέργειά του όταν το ρεύμα που το διαρρέει αποκτήσει τη μέγιστη τιμή του, δηλαδή όταν ο αγωγός έχει την οριακή ταχύτητά του.
Η επαγωγική τάση στα άκρα του αγωγού όταν έχει την οριακή ταχύτητα είναι:

$$E_{\varepsilon\pi} = B\upsilon_{o\rho} l = 10\text{Volt}$$

Το ολικό ρεύμα στο κύκλωμα στην περίπτωση αυτή είναι:

$$i_{o\lambda} = \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}} = \frac{10}{2}A = 5A$$

Επειδή οι δύο κλάδοι συνδέονται παράλληλα θα ισχύει:

$$i_1 + i_2 = 5A \quad (1) \quad , \quad i_1 R_1 = i_2 R_\pi \Rightarrow i_1 = i_2 \quad (2)$$

Άρα, $i_2 = 2,5A$ και η μέγιστη ενέργεια του πηνίου είναι:

$$U_{B,\,max} = \frac{1}{2} L i_2^2 = \frac{1}{2} 0,2 \cdot 6,25J \Rightarrow U_{B,\,max} = 0,625J$$

Την ίδια στιγμή αφού το ρεύμα στο πηνίο έχει σταθεροποιηθεί, η τάση από αυτεπαγωγή και ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος στον κλάδο του πηνίου είναι:

$$E_{αυτ} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = 0$$

αυτό σημαίνει ότι το ρεύμα στον κλάδο του πηνίου είναι σταθερό, άρα θα είναι σταθερό και το ολικό ρεύμα στο κύκλωμα. Επομένως οι ρυθμοί μεταβολής όλων των ρευμάτων στο κύκλωμα είναι μηδενικοί.

Γ3. Ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας από τη δύναμη του βάρους του αγωγού είναι:

$$P_w = w υ_{ορ} = m g υ_{ορ} \Rightarrow P_w = 50 \frac{J}{s}$$

Το ποσοστό της προσφερόμενης στον αγωγό ισχύος που γίνεται θερμική ισχύς στον αντιστάτη R_π είναι ίσο με:

$$\frac{P_{θερμ}}{P_B} 100\% = \frac{i_2^2 R_\pi}{m g υ_{ορ}} 100\% = \frac{6,25 \cdot 1}{50} 100\% \Rightarrow \frac{P_{θερμ}}{P_B} 100\% = 12,5\%$$

Γ4. Τη στιγμή που ο αγωγός αφήνεται ελεύθερος, όλες οι τάσεις στα άκρα όλων των κλάδων είναι μηδενικές, καθώς όμως ο αγωγός επιταχύνεται μη ομαλά προς τα κάτω δημιουργείται επαγωγική τάση στα άκρα του, με συνέπεια να δημιουργείται ρεύμα στο κύκλωμα και στα άκρα του πηνίου να εμφανίζεται τάση από αυτεπαγωγή. Όταν ο αγωγός αποκτήσει οριακή ταχύτητα, τότε το ρεύμα στο κύκλωμα σταθεροποιείται, με αποτέλεσμα τόσο ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος όσο και η τάση από αυτεπαγωγή στα άκρα του πηνίου να γίνουν μηδενικά. Αυτή τη φορά όμως ο κλάδος του πηνίου δεν έχει αντίσταση, άρα θα γίνει βραχυκύκλωμα στα άκρα του και επομένως θα βραχυκυκλώσει και η αντίσταση R_1 και η τάση στα άκρα του αγωγού θα γίνει μηδενική, δηλαδή

$$V_{πολ} = E_{επ} - i_{ολ} R = 0 \Rightarrow E_{επ} = i_{ολ} R \quad (1)$$

Το ρεύμα στην περίπτωση αυτή κυκλοφορεί στο κύκλωμα ελάχιστης αντίστασης, άρα θα διαρρέει το πηνίο που έχει μηδενική αντίσταση και όχι τον αντιστάτη R_1:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = Bil \Rightarrow mg = \frac{B^2 υ_{ορ} l^2}{R} \Rightarrow υ_{ορ} = \frac{mgR}{B^2 l^2} \Rightarrow υ_{ορ} = 7,5 \frac{m}{s}$$

Οπότε η επαγωγική τάση στα άκρα του αγωγού θα είναι:

$$E_{επ} = B υ_{ορ} l = 2 \cdot 7,5 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow E_{επ} = 7,5 Volt$$

Και από (1): $i_{ολ} = \frac{E_{επ}}{R} = \frac{7,5}{1,5} A \Rightarrow i_{ολ} = 5\ A$

Σε αυτή την περίπτωση η ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο πηνίο είναι:

$$U_{B,\,max} = \frac{1}{2}Li_{ολ}^2 = 2{,}5J$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Βρίσκουμε την ταχύτητα του αγωγού πριν την κρούση:

$$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \upsilon_1 = 1m/s$$

Μετά την κρούση ο αγωγός αποκτά ταχύτητα

$$\upsilon_1' = \frac{M-m}{M+m}\upsilon_1$$

Αφού το πλάτος ταλάντωσης του αγωγού μετά την κρούση είναι 0,1m, αυτό σημαίνει ότι η θέση σύγκρουσης γίνεται ακραία θέση της νέας ταλάντωσης, οπότε η ταχύτητα, υ_1' **,** του αγωγού μετά την κρούση είναι μηδενική. Επομένως κατά την κεντρική ελαστική κρούση έγινε ανταλλαγή ταχυτήτων, άρα τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζες, $m = M = 1Kg$

Δ2. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι π/2, γιατί ο αγωγός ξεκινάει από την ακραία θετική απομάκρυνση.Το χρονικό διάστημα μέχρι το οποίο θα γίνει η κρούση είναι ίσο με:

$$x = A\,\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\,\eta\mu\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ 10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \end{array}\right\} \xrightarrow{\upsilon\langle 0} 10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{3\pi}{40}s$$

Άρα η χρονική εξίσωση της επαγωγικής τάσης στα άκρα του αγωγού είναι:

$$E = B\upsilon l = Bl\upsilon = Bl\cdot\omega\Delta l\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \varphi_o\right) \Rightarrow$$

$$E = \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(S.I.)\ \gamma\iota\alpha 0 \le t \le \frac{3\pi}{40}s$$

Δ3. Όταν κλείνουμε τον διακόπτη τότε το κύκλωμα αρχίζει να διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα με αποτέλεσμα στον αγωγό να ασκείται δύναμη Laplace που αντιτίθεται στην κίνησή του. Η δύναμη Laplace δίνεται από την εξίσωση:

$$F_L = B\,i\,l = B\frac{B\upsilon l}{R_{ολ}}l = \frac{B^2l^2}{R_{ολ}}\upsilon = \frac{1\cdot 0{,}25}{2}\upsilon \Rightarrow F_L = 0{,}125\,\upsilon(S.I.)$$

με αλγεβρική τιμή $F_L = -0{,}125\,\upsilon(S.I.)$

Η τελευταία σχέση είναι της μορφής $\vec{F} = -b\,\vec{\upsilon}$, άρα η σταθερά απόσβεσης είναι b=0,125 Kg/s.

Δ4. Ο αγωγός περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από το σημείο Ο μετά την κρούση, οπότε στα άκρα του δημιουργούνται οι εξής διαφορές δυναμικού:

$$V_{AO} = \frac{1}{2}B\,\omega(\frac{L}{2})^2\,, \quad V_{\Gamma O} = \frac{1}{2}B\,\omega(\frac{L}{2})^2$$

Άρα η διαφορά δυναμικού $V_{\Gamma A}$ στα άκρα του περιστρεφόμενου αγωγού είναι:

$$V_{\Gamma A} = V_\Gamma - V_A = \left(V_\Gamma - V_O\right) + \left(V_O - V_A\right) = V_{\Gamma O} - V_{AO} \Rightarrow V_{\Gamma A} = 0$$

Δ5. Η ταχύτητα που έχει το σώμα Σ μετά την κρούση είναι:

$$\upsilon_2' = \frac{2M}{M+m}\upsilon_1 = \upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_2' = 1 m/s$$

Μετά την κρούση η ράβδος κάνει ομαλή στροφική κίνηση άρα θα έχουμε:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{5}}\frac{r}{s} \Rightarrow \omega = 2{,}5\ r/s$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για την πλαστική κρούση και έχουμε:

$$m\upsilon_2'\frac{L}{2} = \left(m + m_1\right)\omega\frac{L}{2}\frac{L}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{2m\upsilon_2'}{L\omega} - m \Rightarrow m_1 = 0{,}6 Kg$$