ΘΕΜΑ 1.1
Λύση

Α. Είναι $f(x)=\alpha x+\beta,\ x\in\mathbb{R}$. Τότε, για το πεδίο ορισμού της $f\circ f$, θα είναι

$$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ f(x)\in R \end{cases} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}.$$

Επομένως, θα είναι $D_{f\circ f}=\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\alpha(\alpha x+\beta)+\beta=\alpha^2x+\beta(\alpha+1).$$

Αφού $f(2)=-3$, έπεται ότι $2\alpha+\beta=-3$. Αφού $f(f(x))=16x-15$, έπεται ότι

$$\alpha^2x+\beta(\alpha+1)=16x-15 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Το τελευταίο μπορεί να είναι αληθές αν και μόνο αν $\alpha^2=16$ και $\beta(\alpha+1)=-15$. Έτσι, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=-3 \\ \alpha^2=16 \ \text{ και } \ \beta(\alpha+1)=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=-3 \\ \alpha=\pm4 \ \text{ και } \ \beta(\alpha+1)=-15 \end{cases}$$

- Αν $\alpha=4$, τότε το σύστημα θα γίνει

$$\begin{cases} 8+\beta=-3 \\ 5\beta=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-11 \\ \beta=-3 \end{cases},$$ το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, $\alpha\neq4$.

- Αν $\alpha=-4$, τότε το σύστημα θα γίνει

$$\begin{cases} -8+\beta=-3 \\ -3\beta=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \beta=5.$$

Έτσι, προκύπτει τελικά ότι $\alpha=-4$ και $\beta=5$, οπότε $\boxed{f(x)=-4x+5 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.}$

Β. Για το D_g θα πρέπει να ισχύει $f(x)>0$, επομένως $-4x+5>0\Leftrightarrow x<\frac{5}{4}$. Έπεται ότι $D_g=\left(-\infty,\frac{5}{4}\right)$. Όμως, $D_f=\mathbb{R}\neq D_g$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού. Ωστόσο, αν $x\in D_g$, τότε $g(x)=e^{\ln f(x)}=f(x)$. Άρα, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες στο σύνολο D_g.

Γ. Για το πεδίο ορισμού της $h(x)$ πρέπει

$$\begin{cases} f(x)\neq 0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow -4x+5>0 \Leftrightarrow x<\frac{5}{4},$$

επομένως $D_h=\left(-\infty,\frac{5}{4}\right)$. Για κάθε $x<\frac{5}{4}$ ισχύει $f(x)>0$, όπως είδαμε ακριβώς παραπάνω, οπότε θα ισχύει

$$h(x)=1-|f(x)|+f(x)=1-f(x)+f(x)=1, \text{ για κάθε } x<\frac{5}{4}.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της h είναι η ημιευθεία $y=1$ για $x<\frac{5}{4}$ και έχει αρχή το σημείο $\left(\frac{5}{4},1\right)$, το οποίο εξαιρείται.

Δ. Για το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ έχουμε

$$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ f(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ -4x+5<\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ x>\frac{15}{16} \end{cases}.$$

Επομένως, $D_{g\circ f}=\left(\frac{15}{16},+\infty\right)$. Για κάθε $x\in D_{g\circ f}$ ισχύει

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=-4(-4x+5)+5=16x-15.$$

Η εξίσωση $(g\circ f)(x)=g(x)$ τότε γράφεται στη μορφή

$$(g\circ f)(x)=g(x)\Leftrightarrow 16x-15=-4x+5\Leftrightarrow 20x=20 \Leftrightarrow x=1,$$

η οποία είναι αποδεκτή λύση, καθώς ανήκει στα πεδία ορισμού και των δύο συναρτήσεων. Επιπλέον, ισχύει $g(1)=-4+5=1$, συνεπώς το σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων $C_{g\circ f}$ και C_g είναι το $\boxed{\text{σημείο } A(1,1).}$

ΘΕΜΑ 1.2
Λύση

Α. Πρέπει $\frac{x}{1-x}>0 \Leftrightarrow x(1-x)>0$. Το πρόσημο του κάθε παράγοντα, καθώς και του πηλίκου, φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{x}{1-x}$	$-$	0	$+$		$-$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\boxed{A_f=(0,1).}$

Β. Έστω $x_1,x_2\in(0,1)$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε, ισοδύναμα έχουμε:

$$\ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right)=\ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right)\overset{\ln x\,:1-1}{\Leftrightarrow}\frac{x_1}{1-x_1}=\frac{x_2}{1-x_2}$$
$$\Leftrightarrow x_1(1-x_2)=x_2(1-x_1)$$
$$\Leftrightarrow x_1-x_1x_2=x_2-x_1x_2$$
$$\Leftrightarrow x_1=x_2,$$

άρα η f είναι «1-1» στο A_f. Επομένως, αντιστρέφεται. Για τον τύπο της αντίστροφης, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $y=f(x)$ ως προς x. Για κάθε $x\in(0,1)$, ισχύει η ισοδυναμία

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\Leftrightarrow e^y=\frac{x}{1-x}$$
$$\Leftrightarrow (1-x)e^y=x \Leftrightarrow e^y-xe^y=x \Leftrightarrow xe^y+x=e^y$$
$$\Leftrightarrow x(e^y+1)=e^y.$$

Ισχύει $e^y+1>0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$, επομένως από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $x=\frac{e^y}{e^y+1}$. Επειδή όμως $x\in(0,1)$, θα πρέπει να βρούμε τις τιμές του y για τις οποίες

$$0<\frac{e^y}{1+e^y}<1$$

Το σκέλος $0<\frac{e^y}{e^y+1}$ ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Για το σκέλος $\frac{e^y}{e^y+1}<1$ έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{e^y}{e^y+1}<1 \overset{e^y+1>0}{\Rightarrow} e^y<e^y+1,$$

που επίσης ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Άρα, το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και ο τύπος της είναι

$$\boxed{f^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.}$$

Γ. Τα ζητούμενα όρια υπολογίζονται ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=0$, καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\omega=e^x}{=}\lim\limits_{\omega\to+\infty}\frac{\omega}{\omega+1}=\lim\limits_{\omega\to+\infty}\frac{\omega}{\omega}=1.$

Δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\frac{x}{1+x}$ για $x\in\left[\frac{1}{2},\frac{e}{e+1}\right]$. Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},\frac{e}{e+1}\right]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, ισχύει

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\ln\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{3}=\ln 1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}<0.$$

Ισχύει

$$g\left(\frac{e}{1+e}\right)=f\left(\frac{e}{1+e}\right)-\frac{e}{1+e}=\ln\left(\frac{\frac{e}{1+e}}{1-\frac{e}{1+e}}\right)-\frac{e}{1+e}=\ln e-\frac{e}{1+e}=1-\frac{e}{1+e}>0.$$

Επομένως, $g\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{e}{e+1}\right)<0.$

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in\left(\frac{1}{2},\frac{e}{e+1}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{x_0}{1+x_0}.$$

ΘΕΜΑ 1.3
Λύση

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα του κύβου $(\alpha-\beta)^3$

Α. Παρατηρούμε ότι η f ισοδύναμα γράφεται στη μορφή

$$f(x)=8\left(e^{3x}-3e^{2x}+3e^{x}-1\right)=8\left(e^{x}-1\right)^{3},\ x\in\mathbb{R}.$$

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε, ισχύει $e^{x_1}<e^{x_2}$, καθώς η e^x είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως,

$$\begin{aligned} e^{x_1}-1<e^{x_2}-1 &\Rightarrow \left(e^{x_1}-1\right)^3<\left(e^{x_2}-1\right)^3 \\ &\Rightarrow 8\left(e^{x_1}-1\right)^3<8\left(e^{x_2}-1\right)^3 \\ &\Rightarrow f(x_1)<f(x_2), \end{aligned}$$

οπότε η $\boxed{f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.}$

Β. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα είναι και «1-1», επομένως αντιστρέφεται. Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της αντίστροφης, λύνουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x.

- Για $x\geq 0$, είναι $e^x-1\geq 0$, οπότε και $y=f(x)\geq 0$. Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{aligned} y=f(x)\Leftrightarrow y=8\left(e^x-1\right)^3 &\Leftrightarrow \frac{y}{8}=\left(e^x-1\right)^3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{y}{8}}=e^x-1 \Leftrightarrow e^x=\frac{\sqrt[3]{y}}{2}+1. \end{aligned}$$

Θα πρέπει επιπλέον να ισχύει $\dfrac{\sqrt[3]{y}}{2}+1>0$, το οποίο όμως αληθεύει για κάθε $y\geq 0$.

Συμπεραίνουμε ότι $x=\ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{y}}{2}+1\right)$ για κάθε $y\geq 0$.

- Για $x<0$ είναι $e^x-1<0$, οπότε και $y=f(x)<0$. Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{aligned} y=f(x)\Leftrightarrow y=8\left(e^x-1\right)^3 &\Leftrightarrow \frac{y}{8}=\left(e^x-1\right)^3 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt[3]{\frac{-y}{8}}=e^x-1 \Leftrightarrow e^x=-\frac{\sqrt[3]{-y}}{2}+1. \end{aligned}$$

Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει

$$-\frac{\sqrt[3]{-y}}{2}+1=e^{x}>0 \Leftrightarrow 1>\frac{\sqrt[3]{-y}}{2} \Leftrightarrow 1>-\frac{y}{8} \Leftrightarrow y>-8.$$

Συμπεραίνουμε ότι $x=\ln\left(-\frac{\sqrt[3]{-y}}{2}+1\right)$ για κάθε $-8<y<0$.

Προκύπτει τελικά ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η

$$\boxed{f^{-1}(x)=\begin{cases}\ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+1\right), & x\geq 0\\ \ln\left(-\frac{\sqrt[3]{-x}}{2}+1\right), & -8<x<0\end{cases}}$$

Γ. Θα δείξουμε αρχικά ότι η συνάρτηση $f^{-1}(f(x)+\eta\mu x-x+\pi)$ ορίζεται για $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$. Πράγματι, για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ έχουμε:

$$-\frac{3\pi}{2}\leq -x\leq -\frac{\pi}{2}, \text{ καθώς επίσης και } -1\leq \eta\mu x\leq 1.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$-\frac{3\pi}{2}-1+\pi\leq \eta\mu x-x+\pi\leq 1-\frac{\pi}{2}+\pi \quad \text{και άρα } -\frac{\pi}{2}-1\leq \eta\mu x-x+\pi.$$

Επιπλέον, για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ έχουμε ότι $e^{x}-1>0$, οπότε και $\left(e^{x}-1\right)^{3}>0$ συνεπώς,

$$f(x)>0 \text{ στο } \left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right].$$

Έτσι, για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ έχουμε:

$$f(x)+\eta\mu x-x+\pi>-\frac{\pi}{2}-1>-8$$

Επομένως, για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ ισχύει ότι $f(x)+\eta\mu x-x+\pi\in(-8,+\infty)$, οπότε ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}(f(x)+\eta\mu x-x+\pi)$.

Αφού $f(0)=0$, η ανίσωση για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f^{-1}\left(f(x)+\eta\mu x-x+\pi\right)-x>0$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}\left(f(x)+\eta\mu x-x+\pi\right)>x \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}\left(f(x)+\eta\mu x-x+\pi\right)\right)>f(x)$$

$$\overset{f\left(f^{-1}(x)\right)=x}{\Rightarrow} f(x)+\eta\mu x-x+\pi>f(x)\Leftrightarrow \eta\mu x-x+\pi>0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\eta\mu x-x+\pi$ για $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$. Έστω $x_1,x_2\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$. Τότε, επειδή $\eta\mu\searrow\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, προκύπτει ότι

$$\eta\mu x_1>\eta\mu x_2. \quad (1)$$

Επίσης,

$$-x_1>-x_2. \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2), προκύπτει ότι $\eta\mu x_1-x_1>\eta\mu x_2-x_2$, επομένως

$$\eta\mu x_1-x_1+\pi>\eta\mu x_2-x_2+\pi\Rightarrow h(x_1)>h(x_2),$$

απ' όπου έπεται ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$h(\pi)=\eta\mu\pi-\pi+\pi=0$$

Έτσι, η αρχική ανίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\boxed{\eta\mu x-x+\pi>0\Leftrightarrow h(x)>h(\pi)\overset{h\searrow}{\Rightarrow}\frac{\pi}{2}\le x<\pi.}$$

Δ. Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$\left(2e^x+x-4\right)^3>-8\Leftrightarrow 2e^x+x-4>-2$$

$$\Leftrightarrow 2e^x+x>2\Leftrightarrow 2\left(e^x-1\right)+x>0$$

Η τελευταία όμως ισχύει για κάθε $x>0$, καθώς έχουμε ότι $e^x>1$, δηλαδή $e^x-1>0$. Επομένως, η συνάρτηση $f^{-1}\left(\left(2e^x+x-4\right)^3\right)$ ορίζεται για $x>0$.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$f^{-1}\left(\left(2e^x+x-4\right)^3\right)-2=0 \Leftrightarrow f^{-1}\left(\left(2e^x+x-4\right)^3\right)=2$$

$$\Leftrightarrow \left(2e^x+x-4\right)^3=f(2) \Leftrightarrow \left(2e^x+x-4\right)^3=\left(2e^2-2\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2e^x+x-4=2e^2-2 \Rightarrow 2e^x+x-2e^2-2=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=2e^x+x-2e^2-2$ για $x>0$. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με

$$x_1<x_2 \qquad (3)$$

Τότε, θα είναι

$$e^{x_1}<e^{x_2}, \qquad (4)$$

καθώς η e^x είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Με πρόσθεση των (3) και (4) κατά μέλη, λαμβάνουμε ότι

$$e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2 \Rightarrow e^{x_1}+x_1-2e^2-2<e^{x_2}+x_2-2e^2-2 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2),$$

επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Άρα είναι «1-1» σε αυτό το διάστημα. Η δοσμένη εξίσωση όμως γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$2e^x+x-2e^2-2=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=g(2)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow x=2, \text{ που ολοκληρώνει τη λύση.}}$$

ΘΕΜΑ 1.4
Λύση

A. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2+4x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+8\right)=16.$

Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to 2}f(x)=16.}$$

B. Η αρχική ανίσωση ισοδύναμα γράφεται στη μορφή

$$2x^2+4x\le f(x)\le x^3+8 \Leftrightarrow 2x^2+4x-16\le f(x)-16\le x^3-8.$$

- Για $x>2$, διαιρούμε την παραπάνω ανίσωση με $x-2>0$. Τότε,

$$\frac{2x^2+4x-16}{x-2}\le\frac{f(x)-16}{x-2}\le\frac{x^3-8}{x-2}.$$

Είναι

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2+4x-16}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2\left(x^2+2x-8\right)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)(x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}2(x+4)=12.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-2^3}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\left(x^2+2x+4\right)=12.$$

Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, έπεται ότι

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-16}{x-2}=12.$$

- Για $x<2$, διαιρούμε την παραπάνω ανίσωση με $x-2<0$. Τότε αλλάζει η φορά της και γράφεται στη μορφή

$$\frac{2x^2+4x-16}{x-2}\geq\frac{f(x)-16}{x-2}\geq\frac{x^3-8}{x-2}.$$

Για ευκολία ξαναγράφοζυμε την ίδια ανίσωση, αυτήν τη φορά από τα δεξιά προς τ' αριστερά:

$$\frac{x^3-8}{x-2}\leq\frac{f(x)-16}{x-2}\leq\frac{2x^2+4x-16}{x-2}.$$

Είναι

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2+4x-16}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2\left(x^2+2x-8\right)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{2(x-2)(x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}2(x+4)=12.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-2^3}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+2x+4\right)=12.$$

Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, έπεται ότι

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-16}{x-2}=12.$$

Από την ισότητα των δύο πλευρικών ορίων προκύπτει λοιπόν ότι

$$\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-16}{x-2}=12.}$$

Γ. Αρχικά, παρατηρούμε ότι $\lim_{x\to 2}(9-f(x))=9-16=-7<0$, επομένως ισχύει $9-f(x)<0$ για x κοντά στο 2. Άρα θα είναι $|9-f(x)|=f(x)-9$ για x κοντά στο 2. Έτσι,

$$\lim_{x\to 2}\frac{|9-f(x)|-7}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-9-7}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-16}{\sqrt{4x+1}-3}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)-16}{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}\left(\sqrt{4x+1}+3\right)\right]=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-16}{4x+1-9}\left(\sqrt{4x+1}+3\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-16}{4x-8}\left(\sqrt{4x+1}+3\right)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{4}\frac{f(x)-16}{x-2}\left(\sqrt{4x+1}+3\right)=\frac{1}{4}\cdot 12\cdot 6\boxed{=18.}$$

Δ. Έχουμε

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sigma\upsilon\nu(f(x)-16)}{32-2f(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{-\left(\sigma\upsilon\nu(f(x)-16)-1\right)}{-2(f(x)-16)}.$$

Θέτουμε $u=f(x)-16$. Τότε, καθώς $x\to 2$, ισχύει

$$u\to u_0=\lim_{x\to 2}(f(x)-16)=0.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\lim_{x\to 2}\frac{-\left(\sigma\upsilon\nu(f(x)-16)-1\right)}{-2(f(x)-16)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu u}{u}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0=0,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα στο τέλος της σελ. 53 του σχολικού βιβλίου.

Ε. Ισχύει ότι $f(x) \geq 2x^2 + 4x$ για κάθε $x \geq -2$ και

$$\lim_{x\to+\infty}(2x^2+4x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty.$$

Επομένως, αφού η f είναι ακόμη μεγαλύτερη από το $2x^2+4x$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Θέτουμε $u = f(x)$. Τότε, καθώς $x \to +\infty$, θα ισχύει

$$u \to u_0 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Έτσι, θα είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^3(x)+5}{f^5(x)+2f^2(x)-3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5f^2(x)}{f(x)-2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{u^3+5}{u^5+2u^2-3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5u^2}{u-2}\right).$$

Για u κοντά στο $+\infty$, ισχύει ότι

$$\left|\frac{u^3+5}{u^5+2u^2-3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5u^2}{u-2}\right)\right| \leq \left|\frac{u^3+5}{u^5+2u^2-3}\right|,$$

συνεπώς,

$$-\left|\frac{u^3+5}{u^5+2u^2-3}\right| \leq \frac{u^3+5}{u^5+2u^2-3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5u^2}{u-2}\right) \leq \left|\frac{u^3+5}{u^5+2u^2-3}\right|.$$

Όμως,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u^3+5}{u^5+2u^2-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{u^3}{u^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{u^2} = 0,$$

άρα ισχύει και

$$\lim_{x\to+\infty} -\left|\frac{u^3+5}{u^5+2u^2-3}\right| = \lim_{x\to+\infty} \left|\frac{u^3+5}{u^5+2u^2-3}\right| = 0.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f^3(x)+5}{f^5(x)+2f^2(x)-3} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5f^2(x)}{f(x)-2}\right) = 0.}$$

ΘΕΜΑ 1.5
Λύση

Α. Για $x=0$, έχουμε $(f\circ f)(0)=f(f(0))=f(4)=84$, άρα το σημείο τομής της $C_{f\circ f}$ με τον άξονα y'y είναι το σημείο $\boxed{A(0,84).}$

Β. Θεωρούμε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε, ισχύει

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3. \qquad (1)$$

Επίσης

$$x_1<x_2 \Rightarrow 4x_1<4x_2 \Rightarrow 4x_1+4<4x_2+4 \qquad (2)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1), (2) κατά μέλη, παίρνουμε ότι

$$x_1^3+4x_1+4<x_2^3+4x_2+4 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και «1-1». Άρα αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. Άρα, για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases}, \; x\in\mathbb{R}\cap f(\mathbb{R}).$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της f δίνεται από τον τύπο

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R},$$

όπου ο υπολογισμός των ορίων στο δεύτερο βήμα έγινε ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+4x+4)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+4x+4)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty.$

Έτσι, το σύστημα ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}\cap f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ x=f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y-x=f(x)-f(y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y+f(y)=x+f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ h(y)=h(x) \end{cases},$$

όπου ορίσαμε $h(x)=x+f(x)$. Θα αποδείξουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1-1». Πράγματι, αν $x_1<x_2$, τότε από τη μονοτονία της f προκύπτει ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη, είναι άμεσο ότι

$$x_1+f(x_1)<x_2+f(x_2)\Rightarrow h(x_1)<h(x_2).$$

Έτσι, το σύστημα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\begin{cases} y=f(x) \\ h(y)=h(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases}$$

απ' όπου έπεται ότι $f(x)=x$. Όμως η εξίσωση $f(x)=x$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x)=x \Leftrightarrow x^3+4x+4=x \Leftrightarrow x^3+3x+4=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=x^3+3x+4$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(-1)=0$. Θα αποδείξουμε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε, ισχύει ότι

$$x_1<x_2\Rightarrow x_1^3<x_2^3, \qquad (3)$$

και

$$x_1<x_2\Rightarrow 3x_1<3x_2\Rightarrow 3x_1+4<3x_2+4. \qquad (4)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (3), (4) κατά μέλη, παίρνουμε

$$x_1^3+3x_1+4<x_2^3+3x_2+4\Rightarrow \varphi(x_1)<\varphi(x_2),$$

οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι λοιπόν και «1-1», οπότε η προφανής ρίζα $x_0=-1$ είναι και η μοναδική. Επομένως, το σημείο τομής των δύο καμπυλών θα είναι το $\boxed{\mathrm{B}(-1,-1).}$

Γ. Επειδή η συνάρτηση f είναι «1-1», έχουμε ισοδύναμα

$$f\left(f\left(2^{|x|+5}-8^{|x|-1}\right)+2x-1\right)=f(2x+3) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f\left(2^{|x|+5}-8^{|x|-1}\right)+2x-1=2x+3$$

$$\Leftrightarrow f\left(2^{|x|+5}-8^{|x|-1}\right)=4 \Leftrightarrow f\left(2^{|x|+5}-8^{|x|-1}\right)=f(0).$$

Όμως, η f είναι «1-1», οπότε η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2^{|x|+5}-8^{|x|-1}=0\Leftrightarrow 2^{|x|+5}=8^{|x|-1}\Leftrightarrow 2^{|x|+5}=\left(2^3\right)^{|x|-1}\Leftrightarrow 2^{|x|+5}=2^{3|x|-3}.$$

Εφόσον η εκθετική συνάρτηση 2^x είναι επίσης «1-1», η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$|x|+5=3|x|-3 \Leftrightarrow 2|x|=8 \Leftrightarrow |x|=4 \Leftrightarrow \boxed{x=\pm 4.}$$

Δ. Ισχύει $f(4)=84$, οπότε $f^{-1}(84)=4$. Συνεπώς,

$$f^{-1}(84)>f\left(f\left(x^2-8\right)-9\right) \Leftrightarrow 4>f\left(f\left(x^2-8\right)-9\right) \overset{f(0)=4}{\Leftrightarrow} f(0)>f\left(f\left(x^2-8\right)-9\right).$$

Η f όμως είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η τελευταία ανίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$0>f\left(x^2-8\right)-9 \Leftrightarrow 9>f\left(x^2-8\right) \overset{f(1)=9}{\Leftrightarrow} f(1)>f\left(x^2-8\right).$$

$$\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2<9 \Leftrightarrow |x|<3 \;\boxed{\Leftrightarrow -3<x<3.}$$

ΘΕΜΑ 1.6
Λύση

Α. Το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ δίνεται από τις συνθήκες

$$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ f(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3 \\ \dfrac{1}{3-x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x<3.$$

Έτσι, θα έχουμε $D_{g\circ f}=(-\infty,3)$. Για κάθε $x<3$ ισχύει

$$\boxed{(g\circ f)(x)=g(f(x))=\ln\left(\frac{1}{3-x}\right)+1=1-\ln(3-x).}$$

Β. Για κάθε $x\in(-\infty,3)$ ισχύει

$$h(x)=\ln\left(\frac{1}{3-x}\right)+1=1-\ln(3-x).$$

Θα δείξουμε ότι η h είναι «1-1». Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,3)$ για τα οποία ισχύει ότι $h(x_1)=h(x_2)$. Τότε, ισχύει η ισοδυναμία

$$1-\ln(3-x_1)=1-\ln(3-x_2) \Leftrightarrow \ln(3-x_1)=\ln(3-x_2)$$

$$\overset{\ln:1-1}{\Leftrightarrow} 3-x_1=3-x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2,$$

άρα η h είναι «1-1» στο $(-\infty,3)$. Συνεπώς, η h αντιστρέφεται. Για να προσδιορίσουμε την αντίστροφή της, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $y=h(x)$ ως προς x. Για κάθε $x<3$ ισχύει η ισοδυναμία

$$y=h(x)\Leftrightarrow y=1-\ln(3-x)\Leftrightarrow \ln(3-x)=1-y$$

$$\Leftrightarrow 3-x=e^{1-y}\Leftrightarrow x=3-e^{1-y}.$$

Πρέπει όμως να ισχύει $3-e^{1-y}=x<3$, η οποία είναι ισοδύναμη με την $e^{1-y}>0$. Αυτό όμως ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ισχύει

$$\boxed{h^{-1}(x)=3-e^{1-x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.}$$

Γ. i. Το όριο ισούται με

$$\lim_{x\to-\infty}h^{-1}(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(3-e^{1-x}\right).$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $u=1-x$. Καθώς $x\to-\infty$, είναι $u\to+\infty$ και το όριο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\boxed{\lim_{u\to+\infty}\left(3-e^{u}\right)=-\infty.}$$

ii. Το όριο ισούται με

$$\lim_{x\to+\infty}h^{-1}(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(3-e^{1-x}\right).$$

Κάνουμε την αντικατάσταση $u=1-x$. Καθώς $x\to+\infty$, είναι $u\to-\infty$ και το όριο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\boxed{\lim_{u\to-\infty}\left(3-e^{u}\right)=3-0=3.}$$

iii. Το όριο ισούται με

$$\lim_{x\to-\infty}\left(h(x)+\ln\left(x^2-3x\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\ln(3-x)+\ln\left(x^2-3x\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\ln\left(\frac{x^2-3x}{3-x}\right)\right).$$

Ισχύει όμως

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x}{3-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty,$$

οπότε, κάνοντας την αντικατάσταση $u=\dfrac{x^2-3x}{3-x}$, έχουμε ότι $u\to+\infty$, καθώς

$x \to -\infty$. Το όριο γράφεται λοιπόν ισοδύναμα στη μορφή

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\ln\left(\frac{x^2-3x}{3-x}\right)\right)=\lim_{u\to+\infty}(1+\ln u)=+\infty.}$$

ΘΕΜΑ 1.7
Λύση

Α. Αφού η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της, θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$. Επομένως,

$$f(0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x) \qquad (1)$$

Όμως:

- $f(0)=0+\alpha=\alpha$.
- $\lim_{x\to0^-}f(x)=\alpha$.
- $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(-e^{-x}+\ln(x+1)\right)=-1+\ln(0+1)=-1$.

Έτσι, θα πρέπει λόγω της σχέσης (1) να ισχύει $\boxed{\alpha=-1.}$

Β. Αφού $\alpha=-1$, ο τύπος της f είναι

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le0 \\ -e^{-x}+\ln(x+1), & x>0 \end{cases}.$$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$. Θεωρούμε $x_1,x_2\le0$, για τα οποία $x_1<x_2$. Ισχύει ότι $x_1-1<x_2-1$, άρα $f(x_1)<f(x_2)$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$. Θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $(0,+\infty)$. Έστω $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$. Ισχύει

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow -x_1<-x_2 \overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow} e^{-x_1}>e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1}<-e^{-x_2}, \qquad (2)$$

όπως επίσης και η ισοδυναμία

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1+1<x_2+1 \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln(x_1+1)<\ln(x_2+2). \qquad (3)$$

Με πρόσθεση των (2), (3) κατά μέλη βρίσκουμε $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επιπλέον, επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το $[0,+\infty)$.

Μένει να δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Αν θεωρήσουμε $x_1<0<x_2$, τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$, προκύπτει ότι $f(x_1)<f(0)$ και, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, θα είναι και $f(0)<f(x_2)$. Ισχύει δηλαδή $f(x_1)<f(0)<f(x_2)$, άρα $f(x_1)<f(x_2)$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Επομένως, η $\boxed{f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.}$

Γ. Αφού f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι το

$$\boxed{f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R},}$$

όπου στην τελευταία ισότητα τα όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-e^{-x}+\ln(x+1)\right)$.

Για τον πρώτο όρο κάνουμε την αντικατάσταση $u=-x$. Καθώς $x\to+\infty$, θα ισχύει $u\to-\infty$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^{u}=0$. Για τον δεύτερο όρο ισχύει προφανώς ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x+1))=+\infty$.

Το όριο ισούται λοιπόν τελικά με

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-x}+\ln(x+1)\right)=+\infty.$$

Δ. Για $x>0$, η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται ως

$$e^{x}\ln(x+1)=1+3e^{x}\overset{:e^{x}\neq0}{\Leftrightarrow}\ln(x+1)=e^{-x}+3$$
$$\Leftrightarrow -e^{-x}+\ln(x+1)=3\Leftrightarrow f(x)=3.$$

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, θα ισχύει ότι

$$f((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to0^{+}}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-1,+\infty),$$

όπου στην τελευταία ισότητα τα όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-1$ λόγω της συνέχειας της f στο $x=0$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, όπως υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα.

Ισχύει $3\in f((0,+\infty))=(-1,+\infty)$, άρα υπάρχει $x_0>0$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=3$.

Αυτό το x_0 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα, διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 1.8
Λύση

Α. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $f(x_1)=f(x_2)$. Τότε θα ισχύουν και οι σχέσεις

- $f^5(x_1)=f^5(x_2)$ και άρα $2f^5(x_1)=2f^5(x_2)$ (1)
- $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ και άρα $2f^3(x_1)=2f^3(x_2)$ (2)
- Ισχύει επίσης $4f(x_1)=4f(x_2)$ (3)

Προσθέτοντας τις (1), (2), (3) κατά μέλη, έχουμε

$$2x_1+4=2x_2+4\Leftrightarrow 2x_1=2x_2,$$

συνεπώς $x_1=x_2$, άρα η f είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού της, οπότε αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο $A_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Για τον τύπο της αντίστροφης χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Έτσι, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, θα είναι

$$\begin{aligned}2y^5+2y^3+4y=2x+4 &\Leftrightarrow 2x=2y^5+2y^3+4y-4\\ &\Leftrightarrow x=y^5+y^3+2y-2.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\boxed{f^{-1}(x)=x^5+x^3+2x-2,\ x\in\mathbb{R}.}$$

Β. Δείχνουμε αρχικά ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για οποιαδήποτε $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ με $y_1 < y_2$, ισχύει ότι:

$y_1^5 < y_2^5$ (4)

$y_1^3 < y_2^3$ (5)

$2y_1 < 2y_2$ (6)

Προσθέτοντας τις (4), (5), (6) κατά μέλη, έχουμε

$$y_1^5 + y_1^3 + 2y_1 < y_2^5 + y_2^3 + 2y_2 \overset{+(-2)}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Επομένως, η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε τώρα ότι και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)) \overset{f^{-1} \nearrow \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως, η $\boxed{\text{f είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.}$

Γ. Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$2f^5(x) + 2f^3(x) + 4f(x) = 2x + 4 \Leftrightarrow 2f(x)\left(f^4(x) + f^2(x) + 2\right) = 2x + 4.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f^4(x) + f^2(x) + 2 > 0.$$

Για $x = 1$, η δοσμένη ισότητα μας δίνει ότι

$$2f(1)\left(f^4(1) + f^2(1) + 2\right) = 6 > 0$$

και, επειδή $f^4(1) + f^2(1) + 2 > 0$, θα πρέπει $f(1) > 0$. Για $x = -3$, η δοσμένη ισότητα μας δίνει ότι

$$2f(-3)\left(f^4(-3) + f^2(-3) + 2\right) = -2 < 0$$

και, επειδή $f^4(-3) + f^2(-3) + 2 > 0$, θα πρέπει $f(-3) < 0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-3,1]$.
- $f(-3)f(1) < 0$.

Από το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-3,1)$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 1.9
Λύση

A. Από το γράφημα είναι άμεσο ότι $D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$.

B. **i.** Από το γράφημα προκύπτει ότι

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0,$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0.$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι ίσα, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Επιπλέον, $f(x)>0$ για x κοντά στο 0, άρα

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2024}{f(x)}\right)=+\infty.$$

ii. Από το γράφημα προκύπτει ότι

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=0$
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=0$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι ίσα, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$. Παρατηρούμε όμως ότι $f(x)>0$ για $x\in(2,3)$ και $f(x)<0$ για $x\in(3,+\infty)$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{f(x)}=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{f(x)}=-\infty,$$

άρα το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

iii. Με βάση το γράφημα, βλέπουμε ότι

- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty.$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι ίσα, έπεται ότι $\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$, επομένως θα ισχύει ότι $\lim_{x\to -2} \frac{1}{f(x)} = 0$. Έτσι, είναι άμεσο ότι $\lim_{x\to -2} \frac{\sigma\upsilon\nu x + 3}{f(x)} = 0$, καθώς

$$\boxed{\lim_{x\to -2}(\sigma\upsilon\nu x + 3) = 3 + \sigma\upsilon\nu(-2) \in \mathbb{R}.}$$

iv. Με βάση το γράφημα, βλέπουμε ότι

- $\lim_{x\to 0^+} f(-1+x) = 3$, γιατί, αν θέσουμε $u = x-1$, τότε, καθώς $x \to 0^+$, θα είναι $u \to (-1)^+$, οπότε με βάση το γράφημα $\lim_{x\to 0^+} f(-1+x) = \lim_{u\to -1^+} f(u) = 3.$
- $\lim_{x\to 0^+} f(-1-x) = -1$, γιατί, αν θέσουμε $u = -x-1$, τότε, καθώς $x \to 0^+$, θα είναι $u \to (-1)^-$, οπότε με βάση το γράφημα $\lim_{x\to 0^+} f(-1-x) = \lim_{u\to -1^-} f(u) = -1.$

Άρα $\lim_{x\to 0^+}\left[f(-1+x) + f(-1-x) - 2\right] = 0.$

Επίσης,

- $\lim_{x\to 0^-} f(-1+x) = -1$, γιατί, αν θέσουμε $u = x-1$, τότε, καθώς $x \to 0^-$, θα είναι $u \to (-1)^-$, οπότε με βάση το γράφημα $\lim_{x\to 0^-} f(-1+x) = \lim_{u\to -1^-} f(u) = -1.$
- $\lim_{x\to 0^-} f(-1-x) = 3$, γιατί, αν θέσουμε $u = -x-1$, τότε, καθώς $x \to 0^-$, θα είναι $u \to (-1)^+$, οπότε με βάση το γράφημα $\lim_{x\to 0^-} f(-1-x) = \lim_{u\to -1^+} f(u) = 3.$

Επομένως, $\lim_{x\to 0^-}\left[f(-1+x) + f(-1-x) - 2\right] = 0$, συνεπώς, αφού τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα, θα ισχύει ότι $\boxed{\lim_{x\to 0}\left[f(-1+x) + f(-1-x) - 2\right] = 0.}$

Γ. Για κάθε $x \neq 0$, αν διαιρέσουμε τη δοσμένη ισότητα με x^5, θα έχουμε

$$\frac{g^5(x)}{x^5} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \cdot \frac{g^4(x)}{x^4} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \cdot \frac{g^3(x)}{x^3} + \frac{\eta\mu^3 x}{x^3} \cdot \frac{g^2(x)}{x^2} + \frac{\eta\mu^5 x}{x^5} = f(x),$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\left(\frac{g(x)}{x}\right)^5 + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \cdot \left(\frac{g(x)}{x}\right)^4 + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{g(x)}{x}\right)^3 + \frac{\eta\mu^3 x}{x^3} \cdot \left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^5 = f(x). \quad (1)$$

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\kappa\in\mathbb{R}$. Ισχύουν τα εξής:

- $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, όπως δείξαμε στο Ερώτημα (Βi).
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις στο τέλος της σελ. 53 του σχολικού βιβλίου.
- $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x/x)=1$, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις στο τέλος της σελ. 53 του σχολικού βιβλίου.

Με βάση αυτές τις τρεις παρατηρήσεις και παίρνοντας όρια στη σχέση (1), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\kappa^5+\kappa^3+\kappa^2+1=0 &\Leftrightarrow \kappa^3\left(\kappa^2+1\right)+\kappa^2+1=0\\ &\Leftrightarrow \left(\kappa^3+1\right)\left(\kappa^2+1\right)=0\\ &\Leftrightarrow \kappa^3+1=0 \quad \text{ή} \quad \kappa^2+1=0\ (\text{αδύνατη})\\ &\Leftrightarrow \kappa=-1.\end{aligned}$$

Έτσι, προκύπτει ότι $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=-1.}$

Δ. Αφού το $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$ υπάρχει, θα ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 3^+}g(x)=\lim_{x\to 3^-}g(x). \qquad (4)$$

Για κάθε $x\in[2,3)$ ισχύει ότι $f(x)>0$, επομένως μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών χωρίς να αλλάξουμε τη φορά: Αυτό μας δίνει

$$g(x)+1\geq f(x)\left(3x^2+4\right),$$

δηλαδή $g(x)\geq f(x)\left(3x^2+4\right)-1$. Υπενθυμίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$. Εφόσον το $\lim\limits_{x\to 3^-}g(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι

$$\lim_{x\to 3^-}g(x)\geq \lim_{x\to 3^-}\left[\left(3x^2+4\right)f(x)-1\right]=-1, \qquad (3)$$

οπότε και $\lim\limits_{x\to 3}g(x)\geq -1$. Για κάθε $x\in(3,+\infty)$ ισχύει $f(x)<0$ και, επομένως, για να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, πρέπει να αλλάξουμε τη φορά. Αυτό μας δίνει

$$g(x)+1\le f(x)(3x^2+4)$$

δηλαδή $g(x)\le f(x)(3x^2+4)-1$. Εφόσον $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=0$ και το $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to 3^+} g(x)\le \lim_{x\to 3^+}\left[(3x^2+4)f(x)-1\right]=-1 \qquad (4)$$

Από τις (2), (3), (4) προκύπτει ότι $-1\ge \lim\limits_{x\to 3} g(x)\ge -1$, άρα τελικά $\boxed{\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-1.}$

ΘΕΜΑ 1.10
Λύση

Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $T(x)=f(x)-\ln(x-1)$, $x\in(1,3]$. Ισχύουν τότε τα εξής:

- $T(3)=f(3)-\ln 2=-3^6-27+2-\ln 2<0$.
- $\lim\limits_{x\to 1^+} T(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(-x^6-3x+2-\ln(x-1)\right)$.

Παρατηρούμε όμως θέτοντας $u=x-1$, ότι

$$\lim_{x\to 1^+}\ln(x-1)=\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty,$$

άρα το παραπάνω όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 1^+}\left(-x^6-3x+2-\ln(x-1)\right)=+\infty.$$

Εφόσον λοιπόν $\lim\limits_{x\to 1^+} T(x)=+\infty$, προκύπτει ότι υπάρχει $\alpha>1$, κοντά στο 1, έτσι ώστε $T(\alpha)>0$.

Η T είναι συνεχής στο $[\alpha,3]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, $T(\alpha)T(3)<0$. Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,3)\subset(1,3)$, για το οποίο ισχύει $T(x_0)=0$, όπως θέλαμε.

Β. Ισχύει ότι

- $f(0)=2$,
- $f(2)=-2^6-6+2=-64-4=-68$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και επιπλέον $f(2)<\eta=-10<f(0)$, άρα από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών (Θ.Ε.Τ.) υπάρχει $\xi\in(0,2)$, έτσι ώστε

$$f(\xi)=-10.$$

Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-(x-3)\ln(2-x)$, $x\in[-2,1]$. Η φ είναι συνεχής στα υποδιαστήματα $[-2,0]$ και $[0,1]$. Θα βρούμε τώρα το πρόσημο των $\varphi(-2),\varphi(0),\varphi(1)$ με σκοπό να εφαρμόσουμε στη συνέχεια το Θεώρημα Bolzano.

Ισχύει

$$\varphi(-2)=f(-2)+5\ln4=-(-2)^6-3(-2)+2+5\ln4=-56+5\ln4.$$

Θα αποδείξουμε ότι αυτός ο αριθμός είναι αρνητικός. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\varphi(-2)<0\Leftrightarrow -56+5\ln4<0$$
$$\Leftrightarrow \ln4<\frac{56}{5}\Leftrightarrow 4<e^{\frac{56}{5}}\ \ \acute{\eta}\ \ e^{11,2}\ \ \acute{\eta}\ \ \ln4<e^{\frac{56}{5}}<e^{12}$$

που είναι προφανώς αληθής. Επίσης,

$$\varphi(0)=f(0)+3\ln2=2+3\ln2>0.$$

Τέλος, ισχύει

$$\varphi(1)=f(1)=-2<0$$

- Αφού $\varphi(-2)\varphi(0)<0$, έπεται από το Θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει $x_1\in(-2,0)$, έτσι ώστε $\varphi(x_1)=0$.
- Αφού $\varphi(0)\varphi(1)<0$, έπεται από το Θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει $x_2\in(0,1)$, έτσι ώστε $\varphi(x_2)=0$.

Έτσι, η εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow(x-3)\ln(2-x)=f(x)$ θα έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-2,1)$.

ΘΕΜΑ 1.11

Λύση

Α. Για $\kappa=0$ έχουμε $f(x)=\begin{cases} x^{-2}+\dfrac{x^{-2}}{2}, & x>0\\ (-x)^3, & x<0\\ 0, & x=0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^2}, & x>0\\ -x^3, & x<0\\ 0, & x=0\end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως ρητή. Θα αποδείξουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ θα είναι $x_1^2<x_2^2$ και, συνεπώς,

$$\frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2} \Rightarrow \frac{3}{2x_1^2} > \frac{3}{2x_2^2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας προκύπτει ότι

$$f((0,+\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right) = (0,+\infty),$$

όπου τα όρια στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{2x^2} = 0,$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{2x^2} = +\infty$.

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $(-\infty,0)$. Θα αποδείξουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$. Για κάθε $x_1,x_2 \in (-\infty,0)$ με $x_1 < x_2$, ισχύει

$$x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 < -x_2^3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Συνεπώς, λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας, ισχύει για το σύνολο τιμών ότι

$$f((-\infty,0)) = \left(\lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0,+\infty),$$

όπου για τον υπολογισμό των ορίων στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} -x^3 = 0$.

Τέλος, ισχύει $f(0)=0$. Άρα προκύπτει τελικά ότι $\boxed{f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)\cup\{0\} = [0,+\infty).}$

Β. Για $\kappa=0$, επειδή από το Ερώτημα Α έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$. Επομένως, δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $\left[-\dfrac{\pi}{2},2\right]$.

Γ. Για $\kappa=1$ και $x>0$ έχουμε $f(x) = \dfrac{1}{x}\sigma\upsilon\nu(\pi x) + \dfrac{1}{2x}$. Αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[1,2]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον, έχουμε:

- $f(1) = 1\sigma\upsilon\nu(\pi) + \dfrac{1}{2} = -1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} < 0.$
- $f(2) = \dfrac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(2\pi) + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} > 0.$

Καθότι $f(1)f(2)<0$, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(1,2)\subseteq(0,\pi)$.

Δ. Για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=0$, θα πρέπει να ισχύει

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x).$$

Εξετάζουμε καθένα από τα δύο πλευρικά όρια ξεχωριστά.

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\kappa-2}\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x)+\dfrac{x^{\kappa-2}}{2}\right)$. Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

  - Αν $\kappa=2$, τότε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sigma\upsilon\nu(2\pi x)+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

  - Αν $\kappa>2$, τότε $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\kappa-2}\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x)+\dfrac{x^{\kappa-2}}{2}\right)$.

    Θα αποδείξουμε ότι το τελευταίο όριο είναι ίσο με μηδέν. Για κάθε $x>0$ προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα ότι

$$\left|x^{\kappa-2}\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x)+\frac{x^{\kappa-2}}{2}\right|\le x^{\kappa-2}+\frac{x^{\kappa-2}}{2},$$

    η οποία ισοδύναμα γράφεται ως

$$-\left(x^{\kappa-2}+\frac{x^{\kappa-2}}{2}\right)\le\left(x^{\kappa-2}\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x)+\frac{x^{\kappa-2}}{2}\right)\le x^{\kappa-2}+\frac{x^{\kappa-2}}{2}.$$

    όμως,

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^{\kappa-2}+\frac{x^{\kappa-2}}{2}\right)=\lim_{x\to0^+}-\left(x^{\kappa-2}+\frac{x^{\kappa-2}}{2}\right)=0,$$

    οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^{\kappa-2}\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x)+\frac{x^{\kappa-2}}{2}\right)=0,\ \text{όπως θέλαμε.}$$

  - Αν $\kappa<2$, τότε έχουμε

$$\lim_{x\to0^+}\left(x^{\kappa-2}\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x)+\frac{x^{\kappa-2}}{2}\right)=\lim_{x\to0^+}x^{\kappa-2}\left(\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x)+\frac{1}{2}\right)=+\infty,$$

    καθώς $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\kappa-2}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi x)+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

> Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται ότι $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^{\nu}}=+\infty$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ αλλά όχι στην περίπτωση όπου το ν είναι θετικός ρητός ή θετικός άρρητος. Σε τέτοιες περιπτώσεις, γράφουμε $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^{\nu}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{e^{\nu\ln x}}$. Στη συνέχεια, κάνουμε την αντικατάσταση $y=\nu\ln x$ οπότε ισχύει $y\to-\infty$ καθώς $x\to0^+$. Το παραπάνω όριο γράφεται λοιπόν ως $\lim\limits_{y\to-\infty}\dfrac{1}{e^{y}}=\lim\limits_{y\to-\infty}e^{-y}=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x)^{3-\kappa}$. Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:
  - Αν $\kappa = 3$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x)^{3-3} = 1$.
  - Αν $\kappa > 3$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{(-x)^{\kappa-3}} = +\infty$.
  - Αν $\kappa < 3$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

Έτσι λοιπόν, συνοψίζοντας, οι κοινές τιμές του κ ώστε να ισχύει $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ είναι οι $\boxed{\kappa \in (2,3).}$

ΘΕΜΑ 1.12
Λύση

Α. Αφού η γραφική παράσταση της g δεν τέμνει το άνω ημικύκλιο του κύκλου $x^2+y^2=1$, προκύπτει $g(x) \neq \sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Συνεπώς, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, έπεται ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-1,1]$. Για να βρούμε το πρόσημο της f, θα βρούμε το πρόσημο του $f(0)$ χρησιμοποιώντας το όριο της υπόθεσης.

Για το $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(g(0)-1)x^7 + \sqrt{-x} + 3}{x^3 + e^x}$ έχουμε

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{(g(0)-1)x^7 + \sqrt{-x} + 3}{x^3 + e^x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^7\left[(g(0)-1) + \dfrac{\sqrt{-x}}{x^7} + \dfrac{3}{x^7}\right]}{x^3\left[1 + \dfrac{1}{x^3}e^x\right]}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} x^4 \frac{\left[(g(0)-1) + \dfrac{\sqrt{-x}}{x^7} + \dfrac{3}{x^7}\right]}{\left[1 + \dfrac{1}{x^3}e^x\right]}.$$

Θα εξετάσουμε τους επιμέρους όρους ξεχωριστά. Ισχύει

$$\lim_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x^3}\cdot e^x\right) = 1 + 0\cdot 0 = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{3}{x^7} = 0$$

και επιπλέον

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{x^7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{-(-x)^7}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{-\frac{x}{(-x)^{14}}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{-\frac{1}{x^{13}}}=0.$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[(g(0)-1)+\frac{\sqrt{-x}}{x^7}+\frac{3}{x^7}\right]}{\left[1+\frac{1}{x^3}e^x\right]}=g(0)-1.$$

- Αν ήταν $g(0)<1$, τότε θα ήταν

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7\left[(g(0)-1)+\frac{\sqrt{-x}}{x^7}+\frac{3}{x^7}\right]}{x^3\left[1+\frac{1}{x^3}e^x\right]}=\lim_{x\to-\infty}x^4\frac{\left[(g(0)-1)+\frac{\sqrt{-x}}{x^7}+\frac{3}{x^7}\right]}{\left[1+\frac{1}{x^3}e^x\right]}$$

$=(+\infty)\cdot(g(0)-1)=-\infty$, άτοπο. Άρα $g(0)\geq 1$.

- Αν ήταν $g(0)=1$, τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(g(0)-1)x^7+\sqrt{-x}+3}{x^3+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}+3}{x^3+e^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\frac{\sqrt{-x}}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}e^x}\right).$$

Όμως,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{-(-x)^3}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{-\frac{x}{(-x)^3}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{1}{x^2}}=0,$$

οπότε έχουμε άμεσα ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^3}\cdot\frac{\frac{\sqrt{-x}}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}e^x}\right)=0, \text{ άτοπο.}$$

Άρα πρέπει να ισχύει $g(0)>1$, συνεπώς $1-g(0)<0$. Προκύπτει ότι $f(0)=1-g(0)<0$, άρα, λόγω της διατήρησης προσήμου, έπεται ότι

$$\boxed{f(x)<0 \text{ για κάθε } x\in[-1,1].}$$

Β. Αφού η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$, έπεται από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής ότι έχει μια ελάχιστη τιμή m και μια μέγιστη τιμή M. Με άλλα λόγια, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [-1,1]$, έτσι ώστε

$$m = f(x_1) \leq f(x) \leq M = f(x_2)$$

για κάθε $x \in [-1,1]$. Αφού όμως $m < f(-1) < M$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $x_1 \neq -1$ και $x_2 \neq -1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $-1 < x_1 < x_2 \leq 1$. Τότε,

$$f(x_1) < \eta = f(-1) < f(x_2).$$

Επομένως, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο $[x_1, x_2]$. Άρα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, έτσι ώστε $f(x_0) = f(-1)$. Καθώς όμως $x_0 > x_1 > -1$, αυτό θα σημαίνει ότι η f δεν θα είναι «1-1». Ομοίως και στην περίπτωση όπου $x_2 < x_1 \leq 1$.

Γ. Για $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x) + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}.$$

Η φ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών. Επιπλέον, από την υπόθεση έχουμε ότι $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, υπάρχουν $x_1, x_2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, έτσι ώστε

$$\varphi(x_1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x_2)$$

για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Ορίζουμε $\rho_1 = \varphi(x_1)$. Τότε, επειδή $\varphi(x_1) > 0$, θα είναι και $\rho_1 > 0$ και έτσι $\rho_2 \geq \rho_1$, γιατί το ρ_2 είναι η μέγιστη τιμή της φ. Άρα

$$\rho_1 \leq \varphi(x) \leq \rho_2$$

για κάθε $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, επομένως,

$$\rho_1 \leq f(x) + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} \leq \rho_2,$$

δηλαδή

$$\boxed{\rho_1-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\le f(x)\le \rho_2-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\ \text{ για κάθε } x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].}$$

ΘΕΜΑ 1.13

Λύση

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$.

Τότε, η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,1)$, καθώς η f είναι συνεχής. Ομοίως, η h είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$. ως σταθερή. Επιπλέον, η h είναι συνεχής και στο $x_0=1$, καθώς

$$\lim_{x\to 1^-}h(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=f(1)=0=\lim_{x\to 1^+}h(x).$$

Επομένως, η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Προκειμένου να ικανοποιείται το ζητούμενο της άσκησης, θα πρέπει να υπάρχουν $0<\alpha<\beta<1.$, έτσι ώστε

$$\begin{cases} f(\alpha)=f(\beta)\\ f(\alpha)=\beta-\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(\alpha)=f(\beta)\\ \beta=\alpha+f(\alpha)\end{cases}.$$

Επομένως, είναι αρκετό να υπάρχει $\alpha\in(0,1)$ το οποίο να είναι λύση της εξίσωσης $f(\alpha)=f(\alpha+f(\alpha))$. Αφού $f(0)=f(1)=0$, η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$, θα υπάρχει λόγω του Θ.Μ.Ε.Τ. σημείο $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=\max_{x\in[0,1]}f(x)=M>0.$$

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $T(x)=x+f(x)-x_0$ για $x\in[0,1]$. Τότε,

$$T(0)=0+f(0)-x_0=-x_0<0$$

και

$$T(x_0)=x_0+M-x_0=M>0.$$

Επομένως, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1\in(0,x_0)$ τέτοιο, ώστε $T(x_1)=0$, δηλαδή

$$x_1+f(x_1)=x_0.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=h(x+f(x))-f(x)$. Η g είναι καλά ορισμένη στο $[0,1]$ και συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} g(x_1)=h(x_1+f(x_1))-f(x_1) &= h(x_0)-f(x_1) \\ &\overset{x_0<1}{=} f(x_0)-f(x_1) = M-f(x_1)\geq 0, \end{aligned}$$

όπου στην 3η ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $h(x)=f(x)$ για $x\in[0,1]$.

Επίσης,

$$g(x_0)=h(x_0+f(x_0))-f(x_0)=h(x_0+f(x_0))-M.$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $0<x_0+f(x_0)<1$, τότε $h(x_0+f(x_0))=f(x_0+f(x_0))\leq M$, οπότε $g(x_0)\leq 0$.
- Αν $x_0+f(x_0)\geq 1$, τότε $h(x_0+f(x_0))=0\leq M$, οπότε και πάλι $g(x_0)\leq 0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση θα έχουμε ότι $g(x_1)g(x_0)\leq 0$.

- Αν $g(x_1)g(x_0)<0$, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\alpha\in(x_1,x_0)$ για το οποίο να ισχύει ότι $g(\alpha)=0$.
- Αν $g(x_1)g(x_0)=0$, τότε θα ισχύει ότι $g(x_1)=0$ ή $g(x_0)=0$, οπότε $\alpha=x_1$ ή $\alpha=x_0$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση υπάρχει $\alpha\in[x_1,x_0]$ για το οποίο $g(\alpha)=0$. Τότε όμως $h(\alpha+f(\alpha))=f(\alpha)$. Αλλά επειδή $f(\alpha)>0$ από υπόθεση, θα είναι και $h(\alpha+f(\alpha))>0$, άρα υποχρεωτικά $\alpha+f(\alpha)>0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(\alpha+f(\alpha))=f(\alpha+f(\alpha))$ και έτσι $f(\alpha+f(\alpha))=f(\alpha)$, που είναι το ζητούμενο.