

## ΘΕΜΑ 2.1

### Λύση

- A.** Παρατηρούμε ότι  $f(-1)=2$  και  $f(1)=1+2e \neq f(-1)$ , οπότε η  $f$  **δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle** στο διάστημα  $[-1,1]$ .
- B.** Αρχικά, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα  $(-\infty,0)$  και  $(0,+\infty)$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- Για  $x > 0$ , ισχύει  $f'(x) = (e^{x+1} + x^2)' = e^{x+1} \cdot (x+1)' + 2x = e^{x+1} + 2x$ .
  - Για  $x < 0$ , ισχύει  $f'(x) = (x^2 + ex + e)' = 2x + e$ .

Για το  $x_0 = 0$ , ελέγχουμε την ύπαρξη της παραγώγου με τον ορισμό. Το δεξί πλευρικό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + ex}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+e)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+e) = e.$$

Το αριστερό πλευρικό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{x+1} + x^2 - e}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{x+1} + 2x) = e,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον **κανόνα De L'Hospital** για την απροσδιόριστη μορφή  $0/0$ . Εφόσον τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  με  $f'(0) = e = e^{0+1} + 2 \cdot 0$ . Άρα

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x+1} + 2x, & x \leq 0 \\ 2x + e, & x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η  $f'$  είναι συνεχής σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα  $(-\infty,0)$  και  $(0,+\infty)$  ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + e) = e$$

Και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{x+1} + 2x) = e = f'(0),$$

άρα η  $f'$  είναι συνεχής και στο  $x_0 = 0$ , οπότε θα είναι **συνεχής σε όλο το  $\mathbb{R}$** .

Γ. Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 0)$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων, με

$$f''(x) = (e^{x+1} + 2x)' = e^{x+1} + 2 > 0$$

για κάθε  $x < 0$ . Άρα η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, 0)$ . Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$f''(x) = (2x + e)' = 2 > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα και στο  $(0, +\infty)$ . Επειδή όμως η  $f'$  είναι συνεχής και στο  $x_0 = 0$ , θα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Άρα η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

Δ. i. Η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$  έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y = f'(0)(x - 0) + f(0) = ex + e.$$

Επειδή η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ , η  $C_f$  θα είναι «πάνω» από την ευθεία  $(\varepsilon)$ , με εξαίρεση το σημείο επαφής. Ισχύει δηλαδή  $f(x) > ex + e$  για κάθε  $x \neq 0$  και  $f(x) = ex + e$  μόνο για  $x = 0$ . Επομένως, η εξίσωση  $f(x) - e = ex$  έχει ως μοναδική ρίζα τη  $x = 0$ .

ii. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$f(e^{x^2}) + f(x^2 + 1) = 2f(1) \Leftrightarrow (f(e^{x^2}) - f(1)) + (f(x^2 + 1) - f(1)) = 0. \quad (1)$$

Θα δείξουμε ότι και οι δύο προσθετέοι είναι μη αρνητικοί και μηδενίζονται μόνο για  $x = 0$ , οπότε αυτή θα είναι και η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

Είναι  $x^2 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα, επειδή  $e^x \nearrow \mathbb{R}$ , έπεται ότι  $e^{x^2} \geq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Προκύπτει λοιπόν ότι  $f(e^{x^2}) \geq f(1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , καθώς  $e^{x^2}, 1 \in [0, +\infty)$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα. Επιπλέον, η ισότητα  $f(e^{x^2}) \geq f(1)$  ισχύει αν και μόνο αν  $e^{x^2} = 1$ , δηλαδή αν και μόνο αν  $x = 0$ .

Επίσης,  $x^2 \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και επομένως, επειδή  $x^2 + 1 \geq 1$ , θα ισχύει  $f(x^2 + 1) \geq f(1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , καθώς  $1, x^2 + 1 \in [0, +\infty)$  και η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα. Η ισότητα  $f(x^2 + 1) \geq f(1)$  ισχύει αν και μόνο αν  $x^2 + 1 = 1$ , δηλαδή αν και μόνο αν  $x^2 = 0$ .

Προκύπτει λοιπόν ότι και οι δύο προσθετέοι της εξίσωσης (1) είναι μη αρνητικοί και μηδενίζονται μόνο για  $x = 0$ . Έτσι, η εξίσωση (1) θα έχει ως μοναδική ρίζα τον αριθμό  $x = 0$ .

## ΘΕΜΑ 2.2

### Λύση

- A. Η συνάρτηση  $h = g \circ f$  έχει πεδίο ορισμού το  $D_h = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ . Ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Επομένως,  $D_h = (0, +\infty)$ . Για κάθε  $x > 0$  ισχύει

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{\ln\left(\frac{1+x^2}{2x}\right)} = \frac{1+x^2}{2x}, \quad x > 0.$$

- B. Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε  $x > 0$  ισχύει

$$h'(x) = \left(\frac{1+x^2}{x}\right)' = \frac{(1+x^2)' \cdot x - (1+x^2) \cdot x'}{x^2} = \frac{2x^2 - 1 - x^2}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Για  $x > 0$  ισχύει η ισοδυναμία  $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x > 1$ .

Ομοίως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι  $h'(x) < 0$  για  $x \in (0, 1)$  και ότι  $h'(x) = 0$  για  $x = 1$ . Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$  και γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1)$ .
- Η  $h$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x_0 = 1$  την τιμή

$$h(1) = \frac{1^2 + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Πράγματι, η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, 1]$  και επομένως, αν  $x \in (0, 1]$ , τότε  $h(x) \geq h(1)$ , ενώ, αν  $x \geq 1$ , τότε η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$  και επομένως  $h(x) \geq h(1)$ . Συνεπώς, για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  ισχύει ότι  $h(x) \geq h(0)$ .

Επομένως, ισχύει ότι  $h(x) \geq 1$  για κάθε  $x > 0$ .

Γ. Αφού  $\pi > e$  και η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ , θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \pi > e \Rightarrow h(\pi) > h(e) &\Rightarrow \frac{1+\pi^2}{2\pi} > \frac{1+e^2}{2e} \Rightarrow \frac{1+\pi^2}{1+e^2} > \frac{2\pi}{2e} \\ &\Rightarrow \frac{1+\pi^2}{1+e^2} > \frac{\pi}{e}, \text{ όπως θέλαμε.} \end{aligned}$$

Δ. i. Ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{h(x) - 1} = +\infty,$$

καθώς για τον αριθμητή ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 1) = 2 > 0$  και για τον παρονομαστή ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} (h(x) - 1) = 0$  και  $h(x) \geq 1$  (με ισότητα μόνο για  $x = 1$ ), όπως έχουμε δείξει στο **Ερώτημα Β**.

ii. Ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2xh(x)} - \sqrt{4x^2 + 8}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{2x \frac{1+x^2}{2x}} - \sqrt{4x^2 + 8} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 8}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - |x| \sqrt{4 + \frac{8}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{4 + \frac{8}{x^2}} \right) = -\infty, \end{aligned}$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{4 + \frac{8}{x^2}} \right) = \sqrt{1} - \sqrt{4} = -1 < 0.$$

### ΘΕΜΑ 2.3

#### Λύση

A. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε όλο το  $\mathbb{R}$  ως πηλίκο παραγωγίσιμων και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 + 3) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επομένως, το πρόσημο της  $f'$ , όπως και η μονοτονία της  $f$ , φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

- Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$ .
- Η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x_0 = 0$  το  $f(0) = 0$ . Πράγματι, η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$  και επομένως, αν  $x \leq 0$ , τότε  $f(x) \geq f(0)$ , ενώ, αν  $x \geq 0$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$  και επομένως  $f(x) \geq f(0)$ . Συνεπώς, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $f(x) \geq f(0)$ .

**B. Ισχύει**

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{12(x^2+3)^2 - 12x \cdot 2(x^2+3) \cdot (x^2+3)'}{(x^2+3)^4} = \frac{12(x^2+3)^2 - 24x(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} \\
 &= \frac{12(x^2+3)^2 - 48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = \frac{12(x^2+3)((x^2+3) - 4x^2)}{(x^2+3)^4} \\
 &= \frac{12(3-3x^2)}{(x^2+3)^3} = \frac{36(1-x^2)}{(x^2+3)^2}.
 \end{aligned}$$

Όπως ίσχυε και με την  $f'$ , ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επομένως, το πρόσημο της  $f''$  είναι το ίδιο με το πρόσημο του αριθμητή  $1-x^2$ . Ισχύει η ισοδυναμία

$$1-x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow 1 > |x| \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Συνεπώς, η  $f''(x)$  είναι θετική για  $x \in (-1, 1)$ , αρνητική για  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ , ενώ μηδενίζεται στα σημεία  $-1$  και  $1$ . Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα αυτά στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-1	+1	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\curvearrowright$	$\cup$	$\cup$	$\curvearrowright$	

- Η  $f$  είναι κυρτή στο  $[-1,1]$  και κοίλη σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα  $(-\infty,-1]$  και  $[1,+\infty)$ .
- Η γραφική παράσταση  $C_f$  παρουσιάζει σημεία καμπής τα  $A(-1,f(-1)), B(1,f(1))$  και για τις τεταγμένες αυτών των σημείων ισχύει

$$f(-1) = \frac{2(-1)^2}{(-1)^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- Γ. Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι όλο το  $\mathbb{R}$ , άρα έχει νόημα να αναζητήσουμε μόνο οριζόντιες/πλάγιες ασύμπτωτες στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$ . Ισχύει

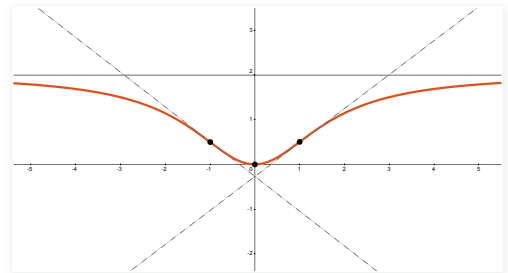
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2,$$

η ευθεία  $y = 2$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$ . Ομοίως, επειδή

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2,$$

η ευθεία  $y = 2$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$ .

- Δ. Η γραφική παράσταση της  $f$  απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα. Με κόκκινο χρώμα έχουμε σημειώσει τα δύο σημεία καμπής. Όπως γνωρίζουμε, οι εφαπτομένες της  $C_f$  στα σημεία καμπής της τη διαπερνούν. Αυτό φαίνεται επίσης στο σχήμα.



## ΘΕΜΑ 2.4

### Λύση

- Α. Έχουμε ότι  $f(x^3) = x^3 - \frac{1}{x^3}$  για κάθε  $x \neq 0$ . Θέτουμε  $y = x^3$ . Για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει  $y \neq 0$  και επιπλέον ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x^3) = x^3 - \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow f(y) = y - \frac{1}{y}, \quad \text{για κάθε } y \neq 0.$$

Επιπλέον, η ποσότητα  $x^3$  λαμβάνει όλες τις μη μηδενικές πραγματικές τιμές ενόσω το  $x$  διατρέχει το  $\mathbb{R} - \{0\}$ , οπότε με τυπική αλλαγή μεταβλητής προκύπτει ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = x - \frac{1}{x}$  για κάθε  $x \neq 0$ .

Αυτό το σημείο είναι ιδιαίτερα σημαντικό. Αν, για παράδειγμα, αντί για  $y = x^3$  είχαμε  $y = x^2$ , η οποία παίρνει μόνο όλες τις μη αρνητικές τιμές, τότε θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι  $f(x) = x - \frac{1}{x}$  για κάθε  $x \geq 0$ , αλλά δεν θα μπορούσαμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το  $f(x)$  για  $x < 0$ !

**B.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη για κάθε  $x \neq 0$  και ισχύει  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$  για κάθε  $x \neq 0$ .

Συνεπώς, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$ . Επομένως, η  $f$  δεν έχει ακρότατα.

**Γ.** Ισχύει  $f'(1) = 2$  και  $f(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0$ . Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, 0)$  είναι η

$$(\varepsilon): y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = 2x - 2.$$

**Δ.** Ισχύει

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(g(x))}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(x^3)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \eta\mu(x^3) \cdot \frac{1}{f(x)} \right).$$

Για κάθε  $x > 0$  ισχύει ότι

$$\left| \frac{\eta\mu(x^3)}{f(x)} \right| \leq \frac{1}{|f(x)|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu(x^3)}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{1}{x} \right) = (+\infty - 0) = +\infty,$$

οπότε θα είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|f(x)|} = \frac{1}{+\infty} = 0$ . Επομένως, από τη σχέση (1) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \eta\mu(x^3) \cdot \frac{1}{f(x)} \right) = 0.$$

**ΘΕΜΑ 2.5****Λύση**

**A.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[-1,0]$  ως γινόμενο παραγωγίσιμων, με

$$\begin{aligned} f'(x) &= ce^{-x} + c(x+1)e^{-x}(-x)' = ce^{-x} - c(x+1)e^{-x} \\ &= ce^{-x}(1-x-1) = -cxe^{-x}. \end{aligned}$$

Το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $[-1,0]$ , οπότε στην παραπάνω σχέση ισχύει  $x \leq 0$ . Προφανώς ισχύει επίσης  $e^{-x} > 0$ . Άρα παρατηρούμε ότι, αν  $c > 0$ , τότε το γινόμενο είναι μη αρνητικό, με ισότητα μόνο για  $x = 0$ . Είναι λοιπόν  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [-1,0]$ , με ισότητα μόνο για  $x = 0$ . Σε αυτήν την περίπτωση, η  $f$  είναι πράγματι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Αν  $c < 0$ , τότε το γινόμενο είναι αρνητικό ή μηδέν, με ισότητα και πάλι μόνο για  $x = 0$ . Ισχύει οπότε  $f'(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [-1,0]$ , με ισότητα μόνο για  $x = 0$ . Σε αυτήν λοιπόν την περίπτωση, η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και όχι γνησίως αύξουσα.

Τέλος, αν  $c = 0$ , τότε ισχύει  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [-1,0]$ , οπότε η  $f$  είναι σταθερή και όχι γνησίως αύξουσα. Συμπεραίνουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα όταν  $c > 0$  και μόνο τότε.

**B.** Για κάθε  $c > 0$  ισχύει ότι  $f'(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [-1,0]$ , αλλά, όπως εξηγήσαμε και στο **Ερώτημα A**, η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 0$ . Σε αυτήν την περίπτωση, αφού η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, θα είναι

$$f([-1,0]) = [f(-1), f(0)] = [0, c].$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) + x$ ,  $x \in [-1,0]$ . Τότε, η  $g$  είναι συνεχής στο  $[-1,0]$  ως άθροισμα συνεχών. Επιπλέον:

- $g(-1) = f(-1) - 1 = 0 - 1 < 0$ ,
- $g(0) = f(0) + 0 = c + 0 = c > 0$ .

Έτσι, από το **Θεώρημα Bolzano**, έπεται ότι υπάρχει  $x_0 \in (-1,0)$ , ώστε  $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = -x_0$ . Επιπρόσθετα, η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[-1,0]$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε  $[-1,0]$  ισχύει

Εδώ χρησιμοποιούμε το θεώρημα στη σελ. 135 του σχολικού βιβλίου. Θυμηθείτε ότι αρκεί η παράγωγος να είναι θετική στο εσωτερικό του διαστήματος, αν η  $f$  είναι συνεχής σε όλο το διάστημα. Εδώ αυτό ισχύει.



$$g'(x) = f'(x) + 1 \geq 0 + 1 > 0.$$

Η  $g$  είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στο  $[-1, 0]$  και επομένως η ρίζα  $x_0$  είναι μοναδική.

- Γ. Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη για κάθε  $x \in [-1, 0]$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε  $[-1, 0]$  ισχύει

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-cxe^{-x})' = -ce^{-x} - cxe^{-x}(-x)' \\ &= -ce^{-x} + cxe^{-x} = ce^{-x}(x-1). \end{aligned}$$

Όμως, για κάθε  $x \in [-1, 0]$  είναι  $(x-1) < 0$  και επομένως για κάθε  $c > 0$  θα ισχύει ότι  $f''(x) < 0$ , άρα η  $f$  θα είναι κοίλη στο  $[-1, 0]$ .

- Δ. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται στη μορφή

$$f(x) = x+1 \Leftrightarrow c(x+1)e^{-x} = x+1 \Leftrightarrow (x+1)(ce^{-x} - 1) = 0.$$

Επομένως, θα ισχύει

$$\begin{aligned} x+1=0 \quad \text{ή} \quad ce^{-x} - 1=0 &\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad e^{-x} = \frac{1}{c} \\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{c}\right) \\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad \text{ή} \quad x = \ln c. \end{aligned}$$

Επειδή όμως, από την υπόθεση, η εξίσωση  $f(x) = x+1$  έχει μοναδική ρίζα, θα πρέπει υποχρεωτικά αυτές οι δύο λύσεις να ταυτίζονται, δηλαδή να ισχύει

$$\ln c = -1 \Leftrightarrow c = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) = \frac{1}{e}(x+1)e^{-x}$ . Παρατηρούμε τώρα ότι  $f(-1) = 0$  και  $f'(-1) = -\frac{1}{e}(-1)e^1 = 1$ , οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(-1, 0)$  θα έχει εξίσωση

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) = x + 1.$$

Καθώς όμως η  $f$  είναι κοίλη στο  $[-1, 0]$ , η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται «κάτω» από την εξίσωση εφαπτομένης, με εξαίρεση ίσως το σημείο επαφής τους  $A$ , άρα  $f(x) \leq x+1$  για κάθε  $x \in [-1, 0]$ .

**Σημείωση:**

Ένας δεύτερος τρόπος να λύσουμε το **Ερώτημα Δ** είναι ο εξής: Είδαμε ότι για κάθε  $x \in [-1, 0]$  ισχύει  $f(x) = \frac{1}{e}(x+1)e^{-x} = (x+1)e^{-x-1}$ . Είναι  $x \geq -1$ , άρα  $x+1 \geq 0$ . Ισοδύναμα,  $-x-1 \leq 0$ , άρα  $e^{-x-1} \leq e^0 = 1$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$f(x) = (x+1)e^{-x-1} \leq (x+1) \cdot 1 = x+1.$$

**ΘΕΜΑ 2.6****Λύση**

**A.** Αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη, θα είναι και συνεχής. Επομένως, αρχικά θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) \Leftrightarrow \eta\mu\pi = \alpha\pi + \beta \Leftrightarrow \alpha\pi + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha\pi.$$

Επιπλέον, λόγω παραγωγισιμότητας θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi}$$

- Το δεξί όριο μπορεί να γραφτεί ως

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu x}{x - \pi} = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$  και επομένως από τον ορισμό της παραγώγου θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} = \sigma\upsilon\nu x_0$$

για κάθε  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Εδώ χρησιμοποιήσαμε αυτόν τον ορισμό για  $x_0 = \pi$ , γνωρίζοντας επίσης ότι  $\eta\mu\pi = 0$ . Ένας άλλος τρόπος να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα θα ήταν φυσικά με χρήση του **κανόνα De L'Hospital**.

- Το αριστερό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\alpha x + \beta - \alpha\pi - \beta}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\alpha x - \alpha\pi}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\alpha(x - \pi)}{x - \pi} = \alpha.$$

Από την ισότητα των πλευρικών ορίων προκύπτει ότι  $\alpha = -1$  και επομένως  $\beta = -\alpha\pi = \pi$ . Άρα ο τύπος της  $f$  θα είναι

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < \pi \\ -x + \pi, & x \geq \pi \end{cases}$$

- B.** Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $x \in (-\infty, \pi)$  έχει σύνολο τιμών το  $[-1, 1]$  ως βασική τριγωνομετρική συνάρτηση. Επιπλέον, η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα (γραμμική με αρνητικό συντελεστή κλίσης) και συνεχής στο  $[\pi, +\infty)$  και επομένως

$$f([\pi, +\infty)) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(\pi) \right] = (-\infty, 0]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \pi) = -\infty$  και  $f(\pi) = -\pi + \pi = 0$ .

- Γ.** Η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi + 1\right)$  και με το παραπάνω, διότι είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Επομένως, υπάρχει  $\xi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi + 1\right)$ , έτσι ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\pi + 1) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi + 1 - \frac{\pi}{2}} = \frac{-(\pi + 1) + \pi - \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{2\pi + 2 - \pi}{2}} = -\frac{4}{\pi + 2}.$$

Ισοδύναμα,  $(\pi + 2)f'(\xi) = -4$ , όπως θέλαμε.

- Δ.** Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε  $x \geq \pi$  ισχύει  $f(x) = -x + \pi$ , επομένως πράγματι η ζητούμενη ανισότητα ισχύει ως ισότητα για  $x \geq \pi$ . Επιπλέον, για  $0 \leq x < \pi$  η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με  $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ ,  $f''(x) = -\eta\mu x$ .

Παρατηρούμε ότι  $f''(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in [0, \pi)$  και η ισότητα ισχύει μόνο στο  $x = 0$ , άρα η  $f$  είναι κοίλη στο  $[0, \pi]$ .

$x$	0	$\pi$
$f''(x)$	0	-
$f(x)$		$\curvearrowright$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο  $B(\pi, f(\pi))$  έχει εξίσωση

$$y = f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi)$$

Από το **Ερώτημα Α** έχουμε  $f'(\pi) = -1$  και  $f(\pi) = 0$ , άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι

$$y = -(x - \pi) = -x + \pi$$

Αφού όμως η  $f$  είναι κοίλη στο  $[0, \pi]$ , τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  θα είναι «κάτω» από την εξίσωση εφαπτομένης, με εξαίρεση το σημείο επαφής, επομένως

$$f(x) \leq -x + \pi \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

Έτσι, θα είναι  $f(x) \leq -x + \pi$  για κάθε  $x \geq 0$  και η ισότητα ισχύει για κάθε  $x \geq \pi$ .

## ΘΕΜΑ 2.7

### Λύση

- A.** Αφού η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 2)$ , τότε  $f(-1) = 2$ , επομένως

$$\lambda(-1)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 2 \quad \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Επιπλέον, λόγω συνέχειας θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow 1 = 0^3 + \mu \quad \Leftrightarrow \mu = 1.$$

- B.** Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραμέτρων  $\lambda, \mu$  που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα, παίρνουμε ότι

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x^3 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 0)$  ως πολυωνυμική με  $f'(x) = 2x$ . Ομοίως, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως πολυωνυμική με  $f'(x) = 3x^2$ . Ελέγχουμε με τον ορισμό για το  $x_0 = 0$ :

- Το αριστερό πλευρικό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0.$$

- Το δεξί όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0.$$

Εφόσον τα πλευρικά όρια είναι ίσα, η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  με  $f'(0) = 0$ , δηλαδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε όλο το  $\mathbb{R}$  και ο τύπος της παραγώγου είναι ο εξής:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 3x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

- Γ. Είναι  $f'(-1) = 2(-1) = -2$ ,  $f(-1) = 2$ . Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $A$  είναι

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) = -2(x + 1) + 2 = -2x.$$

Παρατηρούμε ότι η  $f'$  είναι συνεχής σε όλο το  $\mathbb{R}$ , γιατί στα  $(-\infty, 0)$  και  $(0, +\infty)$  είναι πολυωνυμική και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) = 0.$$

- Η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 0)$ , με  $f''(x) = 2 > 0$ . Αφού η  $f'$  είναι και συνεχής στο  $x_0 = 0$ , θα είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα  $(-\infty, 0]$ .
- Ομοίως, η  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$ , με  $f''(x) = 6x > 0$  για κάθε  $x > 0$ . Αφού η  $f'$  είναι και συνεχής στο  $x_0 = 0$ , θα είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα  $[0, +\infty)$ .

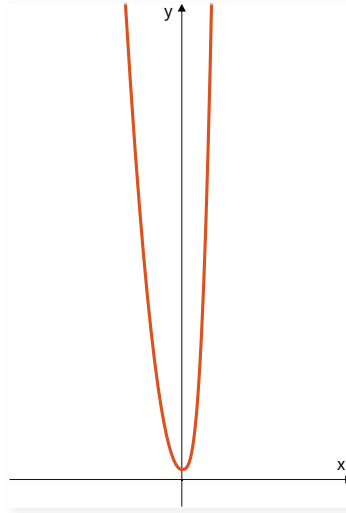
Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η  $f'$  είναι συνεχής σε όλο το  $\mathbb{R}$ , άρα από τα παραπάνω προκύπτει ότι θα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Συνεπώς, η  $f$  είναι κυρτή σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

Εδώ χρησιμοποιούμε για τη συνάρτηση  $f'$  το μέρος (iii) του θεωρήματος στη σελ. 144 του σχολικού βιβλίου. Γι' αυτό, είναι σημαντικό να έχουμε αιτιολογήσει ότι η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$

Έτσι, η γραφική παράσταση της  $f$  είναι πάνω από την εφαπτόμενη ευθεία της στο σημείο  $A$ , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Άρα η  $C_f$  και η ευθεία  $(\varepsilon)$  δεν έχουν άλλα κοινά σημεία, πέραν του σημείου  $A$ .

- Δ. Η γραφική παράσταση της  $f$  απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Από αυτήν τη γραφική παράσταση θα συμπεραίναμε ότι η  $f$  δεν είναι «1-1».

Για να αιτιολογήσουμε αυτό το συμπέρασμα αλγεβρικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι  $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$  και  $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ . Επομένως, η  $f$  δεν είναι «1-1».



**ΘΕΜΑ 2.8**

**Λύση**

A. Για να είναι η  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 0$ , θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow 2 - \alpha = e^{\alpha-1} \Leftrightarrow e^{\alpha-1} + \alpha - 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = e^{x-1} + x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$g'(x) = e^{x-1} + 1 > 0.$$

Έτσι, η  $g$  θα είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα και «1-1» σε αυτό. Η εξίσωση τότε ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$e^{\alpha-1} + \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = 0 \stackrel{g(1)=0}{\Leftrightarrow} g(\alpha) = g(1) \stackrel{g \text{ "1-1" }}{\Leftrightarrow} \alpha = 1.$$

**Σημείωση:**

Ένας ακόμη τρόπος να λύσουμε αυτό το ερώτημα είναι με τη χρήση της ανισότητας  $\ln x \leq x - 1$ , η οποία ισχύει για κάθε  $x > 0$  και η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη, διότι αποτελεί εφαρμογή στη **σελ. 148** του σχολικού βιβλίου. Μάλιστα, σύμφωνα με αυτήν την εφαρμογή, η ισότητα σε αυτήν την ανισότητα ισχύει μόνο για  $x = 1$ .

Αντικαθιστώντας το  $x$  με το  $e^{\alpha-1}$ , η ανισότητα γίνεται  $\ln e^{\alpha-1} \leq e^{\alpha-1} - 1$ , η οποία ισοδύναμα γράφεται ως  $e^{\alpha-1} \geq \alpha - 2$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω, η ισότητα ισχύει μόνο για  $e^{\alpha-1} = 1$ , δηλαδή για  $\alpha = 1$ . Στο παραπάνω ερώτημα έχουμε να λύσουμε ακριβώς την εξίσωση  $e^{\alpha-1} = \alpha - 2$ , οπότε μπορούμε, σύμφωνα με το παραπάνω επιχείρημα, να συμπεράνουμε ότι η μοναδική λύση είναι η  $\alpha = 1$ .

**B.** Αντικαθιστώντας το  $\alpha$  με 1, προκύπτει ότι

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 2x + 1, & x \geq 0 \\ 1 - \eta\mu(\beta x), & x < 0 \end{cases}$$

Για να είναι η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ , θα πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \in \mathbb{R}$$

Υπολογίζουμε καθένα από τα δύο όρια ξεχωριστά: Το δεξί πλευρικό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^4 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^3 - 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 2) = -2. \quad (1)$$

Το αριστερό πλευρικό όριο ισούται με

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \eta\mu(\beta x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu(\beta x)}{x}. \quad (2)$$

Αν  $\beta = 0$ , τότε θα είχαμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu(\beta x)}{x} = 0 \neq -2$  και επομένως η  $f$  δεν θα ήταν παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ . Άρα, θέλουμε  $\beta \neq 0$ . Έτσι, τελικά θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu(\beta x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \beta \frac{\eta\mu(\beta x)}{\beta x}.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση  $y = \beta x$ , έχουμε ότι  $y \rightarrow 0$ , καθώς  $x \rightarrow 0$ , και το όριο γράφεται

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \beta \cdot \frac{\eta\mu y}{y} = \beta \cdot 1 = \beta. \quad (3)$$

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ , αν και μόνο αν  $\beta = -2$ .

Γ. Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε  $f(0) = -1$  και  $f'(0) = -2$ , άρα η εξίσωση εφαπτομένης στο  $M(0, f(0))$  θα είναι:

$$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow (\varepsilon): y + 1 = -2x$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon): y = -2x - 1.$$

Δ. Έχουμε

$$\begin{aligned} L &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(-2h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(0) + f(0) - f(-2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(3h) - f(0)}{h} - \frac{f(-2h) - f(0)}{h} \right). \end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, κάνουμε την αντικατάσταση  $x = 3h$ . Ισχύει  $x = \frac{h}{3}$  και  $x \rightarrow 0$ , καθώς  $h \rightarrow 0$ . Επομένως,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(3h) - f(0)}{h} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x/3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 3 \frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = 3f'(0) = -6.$$

Ομοίως, με την αντικατάσταση  $x = -2h$ , προκύπτει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(-2h) - f(0)}{h} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - f(0)}{-x/2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -2 \frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = -2f'(0) = -4.$$

Έτσι,  $L = -6 - (-4) = -2$ . Για το δεύτερο όριο έχουμε

$$\begin{aligned} B &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2\pi + h) + f(2\pi - h) - 2f(2\pi)}{h^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(2\pi + h) - f'(2\pi - h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(2\pi + h) + f''(2\pi - h)}{2}, \end{aligned}$$

όπου και στα δύο βήματα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή  $0/0$ .

Για να υπολογίσουμε το τελευταίο όριο, παρατηρούμε ότι για κάθε  $x \geq 0$  ισχύει  $f(x) = x^4 - 2x + 1$ , άρα η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως πολυωνυμική. Συγκεκριμένα, για κάθε  $x > 0$  ισχύει

$$f'(x) = (x^4 - 2x + 1)' = 4x^3 - 2 \text{ και } f''(x) = 12x^2.$$



Η τελευταία είναι προφανώς συνεχής στο  $(0, +\infty)$ . Επομένως, το τελευταίο όριο ισούται με  $f''(2\pi) = 48\pi^2$ .

- E. Παρατηρούμε ότι  $f(1) = 0$  και επομένως το 1 είναι ρίζα του πολωνύμου  $x^4 - 2x + 1$ . Εφαρμόζουμε λοιπόν **σχήμα Horner**:

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & & \end{array}$$

Από το **σχήμα Horner** προκύπτει ότι  $f(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 1)$  για κάθε  $x \geq 0$ . Έτσι, στο διάστημα  $(0, 1)$  θα ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + x - 1) = 0 \stackrel{x \in (0,1)}{\Leftrightarrow} x^3 + x^2 + x - 1 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ ,  $x \in [0, 1]$ . Η  $h$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  ως πολωνυμική. Επιπλέον,  $h(0) \cdot h(1) = (-1) \cdot 2 < 0$  και επομένως από το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει  $\rho \in (0, 1)$  με  $h(\rho) = 0$ .

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$  με  $h'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ , άρα η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, 1]$ . Επομένως, η ρίζα  $\rho \in (0, 1)$  θα είναι μοναδική.

## ΘΕΜΑ 2.9

### Λύση

- A. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη ως πολωνυμική και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $f'(x) = 3(x - \alpha)^2$ . Η ευθεία  $\varepsilon: y = 3\alpha^2x - 3$  εφάπτεται της  $C_f$  στο σημείο  $A(2, f(2))$  αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(2) = 6\alpha^2 - 3 \\ f'(2) = 3\alpha^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (2-\alpha)^3 + \kappa = 6\alpha^2 - 3 \\ 3(2-\alpha)^2 = 3\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\alpha)^3 = 6\alpha^2 - 3 - \kappa \\ (2-\alpha)^2 = \alpha^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2-\alpha)^3 = 6\alpha^2 - 3 - \kappa \\ 4 - 4\alpha + \alpha^2 = \alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-\alpha)^3 = 6\alpha^2 - 3 - \kappa \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 2 \\ \alpha = 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

όπου στο πάνω σκέλος της τελευταίας ισοδυναμίας αντικαταστήσαμε  $\alpha = 1$ , όπως εξάλλου μας δίνεται από το κάτω σκέλος. Επομένως,  $\alpha = 1$  και  $\kappa = 2$ .

- B. Για  $\alpha=1$  και  $\kappa=2$  έχουμε  $f(x)=(x-1)^3+2$ , άρα  $f'(x)=3(x-1)^2$  και η εφαπτομένη ευθεία στο  $A$  είναι η  $(\varepsilon): y=3x-3$ . Για να βρούμε τα κοινά σημεία της  $C_f$  με την  $(\varepsilon)$ , κοιτάζουμε την εξίσωση  $f(x)=3x-3$ . Συγκεκριμένα, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$\begin{aligned} f(x)=3x-3 &\Leftrightarrow (x-1)^3+2=3(x-1) \\ &\Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)+2=0. \end{aligned}$$

Θέτουμε  $y=x-1$ . Τότε, η παραπάνω εξίσωση γίνεται  $y^3-3y+2=0$ . Παρατηρούμε ότι το  $y_1=1$  είναι λύση αυτής της εξίσωσης, οπότε προχωράμε σε **σχήμα Horner** γι' αυτήν τη λύση:

1	0	-3	2	1
1	1	-2	0	

Έτσι, προκύπτει ότι  $y^3-3y+2=(y-1)(y^2+y-2)$ , οπότε η εξίσωση

$$y^3-3y+2=0$$

είναι ισοδύναμη με την  $(y-1)(y^2+y-2)=0$ . Έχουμε λοιπόν

$$y=1 \quad \eta \quad y^2+y-2=0.$$

Λύνοντας τη 2η εξίσωση με διακρίνουσα, παίρνουμε τις λύσεις  $y=1$  και  $y=-2$ .

Εφόσον είχαμε θέσει  $y=x-1$ , προκύπτουν από τα παραπάνω οι απλές εξισώσεις  $x-1=1$  και  $x-1=-2$ , οι οποίες μας δίνουν τις λύσεις  $x=2$  (η οποία αντιστοιχεί στο σημείο επαφής  $A$  που ήδη γνωρίζαμε) και  $x=-1$ . Επομένως, η  $C_f$  έχει και άλλο κοινό σημείο με την ευθεία  $\varepsilon$ , εκτός του  $A$ , και αυτό είναι το  $B(-1,-6)$ , όπου η τεταγμένη υπολογίστηκε μέσω του τύπου της  $f$ .

Μπορούμε να επαληθεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα αντικαθιστώντας  $x=-2$  στην εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$ , αφού τότε θα πάρουμε πάλι ως αποτέλεσμα το  $-6$ .

Για το δεύτερο ζητούμενο, που αφορά την κλίση της  $C_f$  στο δεύτερο σημείο τομής, υπολογίζουμε από τον τύπο της  $f'$  ότι  $f'(2)=3$  και  $f'(-1)=12$ . Ισχύει λοιπόν ξεκάθαρα  $f'(-1)=4f'(2)$ ,

οπότε η κλίση της  $C_f$  στο  $B$  είναι τετραπλάσια της κλίσης της  $C_f$  στο  $A$ .

- Γ. Η τετμημένη μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο  $t$ , έτσι ώστε  $\beta'(t) = 2\text{m/sec}$ . Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο  $M(\beta, f(\beta))$  είναι:

$$(\delta): y - f(\beta) = f'(\beta)(x - \beta) = 3(\beta - 1)^2(x - \beta).$$

Το σημείο τομής της  $(\delta)$  με τον  $y'y$  προκύπτει αντικαθιστώντας  $x = 0$  στην παραπάνω εξίσωση. Παίρνουμε τότε

$$y - (\beta - 1)^3 - 2 = 3(\beta - 1)^2(0 - \beta) \Leftrightarrow y = (\beta - 1)^3 + 2 - 3\beta(\beta - 1)^2.$$

Επομένως, οι συντεταγμένες του σημείου  $N$  κάθε χρονική στιγμή  $t$  είναι  $N(0, y_N)$  με

$$y_N(t) = (\beta(t) - 1)^3 + 2 - 3\beta(t)(\beta(t) - 1)^2.$$

Έτσι, ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης σε κάθε χρονική στιγμή  $t$  θα είναι:

$$y'_N(t) = 3(\beta(t) - 1)^2 \beta'(t) - 3\beta'(t)(\beta(t) - 1)^2 - 6\beta(t)(\beta(t) - 1)\beta'(t).$$

Τη χρονική στιγμή όπου  $y_N(t_0) = -6$ , έχουμε  $-6 = f(\beta(t_0))$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} -6 &= (\beta(t_0) - 1)^3 + 2 \Leftrightarrow (\beta(t_0) - 1)^3 = -8 \\ &\Leftrightarrow \beta(t_0) - 1 = -2 \Leftrightarrow \beta(t_0) = -1. \end{aligned}$$

Επομένως, τη χρονική στιγμή  $t_0$  θα είναι

$$y'_N(t_0) = 6(-1-1)^2 - 6(-1-1)^2 + 12(-1-1) = -24 \text{ m/sec.}$$

- Δ. Για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2$ , έχουμε

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow (x_1 - 1)^3 < (x_2 - 1)^3 \\ &\Rightarrow (x_1 - 1)^3 + 2 < (x_2 - 1)^3 + 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \end{aligned}$$

Συνεπώς, η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ . Έτσι, η  $f$  αντιστρέφεται στο  $\mathbb{R}$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει η ισοδυναμία  $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ . Αυτή μπορεί να ξαναγραφτεί ισοδύναμα ως

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = (x - 1)^3 + 2 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = y - 2.$$

- Αν  $y \geq 2$ , τότε η τελευταία είναι ισοδύναμη με

$$x - 1 = \sqrt[3]{y - 2} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[3]{y - 2}.$$

- Αν  $y < 2$ , τότε η παραπάνω είναι ισοδύναμη με

$$x - 1 = -\sqrt[3]{2 - y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{2 - y}.$$

Έτσι, τελικά ισχύει

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x - 2} & x \geq 2 \\ 1 - \sqrt[3]{2 - x} & x < 2 \end{cases}.$$

- E.** Λόγω της ύπαρξης του όρου  $\ln x^2$ , η ανίσωση ορίζεται για κάθε  $x \neq 0$ . Πράγματι, αν  $x \neq 0$ , τότε ο όρος  $x^2$  στο εσωτερικό του λογαρίθμου είναι θετικός, επομένως η ποσότητα που δίνεται είναι καλά ορισμένη. Για  $x \neq 0$ , έχουμε την ισοδυναμία

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(\ln x^2) - 7) < -1 &\stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(\ln x^2) - 7 < f(-1) \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(\ln x^2) - 7 < -6 \Leftrightarrow f^{-1}(\ln x^2) < 1 \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(\ln x^2)) < f(1). \end{aligned}$$

Όμως, για κάθε  $y \in D_{f^{-1}}$  ισχύει  $f(f^{-1}(y)) = y$ , άρα, εφόσον  $f(1) = 2$ , η παραπάνω γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} \ln x^2 < 2 &\Leftrightarrow \ln x^2 < \ln e^2 \Leftrightarrow x^2 < e^2 \\ &\Leftrightarrow |x| < e \Leftrightarrow -e < x < e. \end{aligned}$$

Αφού λοιπόν  $x \neq 0$  και  $x \in (-e, e)$ , οι λύσεις είναι οι  $x \in (-e, 0) \cup (0, e)$ .

## ΘΕΜΑ 2.10

### Λύση

- A.** Έστω ότι οι συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$  είναι της μορφής  $\Gamma(x_0, y_0)$ . Τότε θα πρέπει  $y_0 = e^{-x_0}$ , γιατί το σημείο  $\Gamma$  ανήκει στη  $C_f$ . Επειδή όμως το  $\Delta B\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο, θα πρέπει ταυτόχρονα η τεταγμένη του  $\Gamma$  να είναι ίση με αυτήν του  $B$ , οπότε ισχύει ότι  $y_0 = \alpha + 1$ , δηλαδή  $e^{-x_0} = \alpha + 1$ . Άρα, ισοδύναμα, θα ισχύει

$$-x_0 = \ln(\alpha + 1) \Leftrightarrow x_0 = -\ln(\alpha + 1).$$

Έτσι, το σημείο  $\Gamma$  θα έχει συντεταγμένες  $\Gamma(x_0, y_0) = (-\ln(\alpha + 1), \alpha + 1)$ . Συμπεραίνουμε πλέον εύκολα ότι το  $\Delta$  έχει συντεταγμένες  $\Delta(-\ln(\alpha + 1), 0)$ .

B. Αν  $E(\alpha)$  είναι το εμβαδόν τον ορθογώνιου  $AB\Gamma\Delta$ , τότε θα είναι

$$E(\alpha) = A\Delta \cdot AB = (-\ln(\alpha+1) - \alpha)(\alpha+1),$$

όπου γνωρίζουμε ότι  $-1 < \alpha < 0$ .

Γ. Η συνάρτηση  $h$  με τύπο  $h(x) = -2 - 2x - \ln(x+1)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-1, 0)$ , ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε  $x \in (-1, 0)$  ισχύει

$$h'(x) = -2 - \frac{1}{x+1} < 0.$$

Επομένως, η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-1, 0)$ .

x	-1	0
$h'(x)$		-
$h(x)$		↘

Λόγω μονοτονίας και συνέχειας, θα ισχύει για το σύνολο τιμών ότι

$$h((-1, 0)) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) \right) = (-2, +\infty),$$

όπου τα όρια στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2 - 2x - \ln(x+1)) = -2.$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} (-2 - 2x - \ln(x+1)) = -2 - 2 - (-\infty) = +\infty.$

Δ. Η συνάρτηση  $E$  με τύπο  $E(\alpha) = (-\ln(\alpha+1) - \alpha) \cdot (\alpha+1)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-1, 0)$  ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε  $\alpha \in (-1, 0)$  ισχύει

$$E'(\alpha) = \left( -\frac{1}{\alpha+1} - 1 \right) (\alpha+1) + (-\ln(\alpha+1) - \alpha) = -2 - 2\alpha - \ln(\alpha+1) = h(\alpha).$$

Παρατηρούμε ότι  $0 \in (-2, +\infty) = h((-1, 0))$  και επομένως υπάρχει  $\alpha_0 \in (-1, 0)$  τέτοιο, ώστε  $h(\alpha_0) = 0 \Leftrightarrow E'(\alpha_0) = 0$ . Από τη μονοτονία της  $h$ , την οποία μελετήσαμε στο προηγούμενο ερώτημα, προκύπτουν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Αν  $-1 < \alpha < \alpha_0$ , τότε, επειδή η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-1, \alpha_0)$ , θα ισχύει

$$h(\alpha) > h(\alpha_0) \Leftrightarrow E'(\alpha) > 0$$

- Αν  $\alpha_0 < \alpha < 0$ , τότε, επειδή η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-1,0)$ , θα είναι

$$h(\alpha) < h(\alpha_0) \Leftrightarrow E'(\alpha) < 0$$

Αυτά συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\alpha$	-1	$\alpha_0$	0
$h(\alpha) = E'(\alpha)$	+	0	-
$E(\alpha)$	$\nearrow$		$\searrow$

Με βάση τον πίνακα, προκύπτει ότι η  $E$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο  $\alpha = \alpha_0$  την τιμή  $E(\alpha_0) = (-\ln(\alpha_0 + 1) - \alpha_0) \cdot (\alpha_0 + 1)$ . Πράγματι, αν  $\alpha \in (-1, \alpha_0]$ , τότε, αφού  $E$  γνησίως αύξουσα, θα ισχύει ότι  $E(\alpha) \leq E(\alpha_0)$ , ενώ, αν  $\alpha \in [\alpha_0, 0)$  επειδή η  $E$  είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει ότι  $E(\alpha) \leq E(\alpha_0)$ .

Όμως, ισχύει  $E'(\alpha_0) = h(\alpha_0) = 0 \Rightarrow -\ln(\alpha_0 + 1) = 2 + 2\alpha_0$ . Συνεπώς,

$$E(\alpha_0) = (-\ln(\alpha_0 + 1) - \alpha_0) \cdot (\alpha_0 + 1) = (2 + 2\alpha_0 - \alpha_0)(\alpha_0 + 1) = (\alpha_0 + 2)(\alpha_0 + 1).$$

### ΘΕΜΑ 2.11

#### Λύση

- A. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(x) - 3}{x - 1}$ ,  $x \neq 1$ . Μας έχει δοθεί στην υπόθεση ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$ . Επίσης, για  $x \neq 1$  έχουμε  $f(x) = (x - 1)h(x) + 3$  και επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1)h(x) + 3] = (1 - 1) \cdot 1 + 3 = 3.$$

Αφού όμως  $f$  συνεχής στο  $x_0 = 1$ , συμπεραίνουμε ότι  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ . Έτσι όμως έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 1,$$

δηλαδή η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  με  $f'(1) = 1$ . Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  είναι

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = (x - 1) + 3 = x + 2.$$

Β. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 K &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3\sqrt{x}}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)h(x) + 3 - 3\sqrt{x}}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{(x-1)h(x)}{x^2 - x} + \frac{3 - 3\sqrt{x}}{x^2 - x} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{(x-1)h(x)}{x^2 - x} + \frac{3 - 3\sqrt{x}}{x^2 - x} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{(x-1)h(x)}{x(x-1)} + \frac{3(1-\sqrt{x})}{x(x-1)} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{h(x)}{x} + \frac{3(1-x)}{x(x-1)(1+\sqrt{x})} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{h(x)}{x} - \frac{3}{x(1+\sqrt{x})} \right] \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$ , που το έχουμε αναφέρει παραπάνω. Για το δεύτερο όριο έχουμε

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x) - e f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x h(x)(x-1) + 3e^x - 3e}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{e^x h(x)(x-1)}{x-1} + 3 \frac{e^x - e}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ e^x h(x) + 3 \frac{e^x - e}{x-1} \right] \\
 &= e^1 \cdot 1 + 3e = 4e,
 \end{aligned}$$

καθώς  $\lim_{x \rightarrow 1} 3 \frac{e^x - e}{x-1} = 3\varphi'(1)$ , όπου  $\varphi(x) = e^x$ . Υπολογίζουμε στη συνέχεια το τρίτο όριο:

$$\begin{aligned}
 M &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{h^{2023} + 1}{h^{2022} + 1} \left[ f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 3 \right] = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left( \frac{h^{2023} \left(1 + \frac{1}{h^{2023}}\right)}{h^{2022} \left(1 + \frac{1}{h^{2022}}\right)} \left[ f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 3 \right] \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \left( \frac{h \left(1 + \frac{1}{h^{2023}}\right)}{\left(1 + \frac{1}{h^{2022}}\right)} \left[ f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 3 \right] \right) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\left(1 + \frac{1}{h^{2023}}\right) \left[ f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 3 \right]}{\left(1 + \frac{1}{h^{2022}}\right) \frac{1}{h}} \right] = 1,
 \end{aligned}$$

καθώς

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 + \frac{1}{h^{2023}}}{1 + \frac{1}{h^{2022}}} \right) = \frac{1+0}{1+0} = 1,$$

ενώ για το όριο  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\left[ f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 3 \right]}{\frac{1}{h}}$  θέτουμε  $x = 1 + \frac{1}{h}$ . Τότε, όταν  $h \rightarrow +\infty$ , είναι  $x \rightarrow 1$  και επομένως

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{\left[ f\left(1 + \frac{1}{h}\right) - 3 \right]}{\frac{1}{h}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 1,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη δοσμένη υπόθεση.

- Γ. i. Η  $g$  είναι συνεχής για  $x \in [0, 1)$  ως σύνθεση και διαφορά συνεχών. Ομοίως, η  $g$  είναι συνεχής στο  $(1, 2]$  ως γινόμενο και άθροισμα συνεχών. Για το  $x_0 = 1$ , πρέπει να ελέγξουμε τη συνέχεια με τον ορισμό: Το αριστερό όριο ισούται με

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{1-x} - x) = e^0 - 1 = 0.$$

Το δεξί όριο είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ((x-2)f(x) + (\alpha + e)(x-1) + 3) \\ &= -f(1) + 3 = -3 + 3 = 0. \end{aligned}$$

Τέλος, ισχύει  $g(1) = e^0 - 1 = 0$ . Επομένως, η  $g$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , άρα θα είναι συνεχής σε ολόκληρο το  $[0, 2]$ .

- ii. Αφού η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$ , ο μόνος τρόπος να μην ικανοποιεί τις **προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών** είναι να ισχύει  $g(0) = g(2)$ . Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} g(0) = g(2) &\Leftrightarrow e^{-0} - 0 = (2-2)f(2) + (\alpha + e)(2-1) + 3 \\ &\Leftrightarrow e = \alpha + e + 3 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -3}. \end{aligned}$$



iii. Με χρήση του κανόνα De L'Hospital προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{1-x} - x}{x - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(e^{1-x} - x)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{1-x}(1-x)' - 1}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-e^{1-x} - 1) = -2.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τώρα και το δεξι όριο:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2)f(x) + (3-e)(x-1) + 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{(x-2)((x-1)h(x) + 3) + 3}{x - 1} + \frac{(3-e)(x-1)}{x - 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{(x-2)(x-1)h(x)}{x - 1} + \frac{3(x-2) + 3}{x - 1} + 3 - e \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} ((x-2)h(x) + 6 - e) = -1 + 6 - e = 5 - e \neq -2.\end{aligned}$$

Αφού  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$ , η  $g$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ .

Δ. Αφού  $g(0) = e \neq 0$ , η γραφική παράσταση της  $g$  δεν διέρχεται από το  $O(0,0)$ . Αν  $M(x, g(x))$  ένα σημείο της  $C_g$ , τότε η απόσταση του  $M$  από το  $O$  δίνεται από τον τύπο:

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (g(x)-0)^2} = \sqrt{x^2 + g^2(x)}, \quad x \in [0, 2].$$

Η  $d$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  ως πράξη και σύνθεση συνεχών, οπότε από το **θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής** υπάρχει  $x_0 \in [0, 2]$  για το οποίο η  $d$  γίνεται ελάχιστη. Ισοδύναμα, υπάρχει σημείο της  $C_g$  στο οποίο η απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι μικρότερη, είτε ίση της απόστασης των υπόλοιπων σημείων της  $C_g$  από το σημείο  $O$ .

**ΘΕΜΑ 2.12****Λύση**

**A.** Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned} g^2(x) - x^2 &= 2g(x)\ln(x+1) - \ln^2(x+1) \\ \Leftrightarrow g^2(x) - 2g(x)\ln(x+1) + \ln^2(x+1) &= x^2 \\ \Leftrightarrow (g(x) - \ln(x+1))^2 &= x^2 \Leftrightarrow |g(x) - \ln(x+1)| = |x|. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = g(x) - \ln(x+1)$ ,  $x > -1$ . Τότε ισχύει ότι  $|h(x)| = |x|$  και επιπλέον ισχύει η ισοδυναμία

$$|h(x)| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Έτσι, αφού η  $h$  είναι συνεχής με μοναδική ρίζα την  $x=0$ , η  $h$  θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα  $(-1,0)$  και αντίστοιχα σταθερό πρόσημο στο  $(0,+\infty)$ .

Αφού  $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$ , θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (g(x) - \ln(x+1)) = -\infty$$

κι επομένως θα ισχύει ότι  $h(x) < 0$  για  $x > -1$  κοντά στο  $-1$ , οπότε  $h(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-1,0)$ , λόγω του ότι η  $h$  διατηρεί πρόσημο σε αυτό το διάστημα. Επιπλέον,  $h(e-1) = g(e-1) - \ln e = e-1 > 0$ , άρα  $h(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0,+\infty)$  λόγω και πάλι της διατήρησης προσήμου. Συνεπώς, για κάθε  $x \in (-1,0)$  ισχύει  $h(x) < 0$  και  $|x| = -x$ , οπότε

$$-h(x) = -x \Leftrightarrow \ln(x+1) - g(x) = -x \Leftrightarrow g(x) = x + \ln(x+1).$$

Επιπλέον, για κάθε  $x \in (0,+\infty)$  ισχύει  $h(x) > 0$  και  $|x| = x$ , οπότε

$$h(x) = x \Leftrightarrow g(x) - \ln(x+1) = x \Leftrightarrow g(x) = x + \ln(x+1)$$

Τέλος,  $h(0) = 0 \Leftrightarrow g(0) - \ln(0+1) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0 + \ln(0+1)$ , άρα οι συναρτήσεις  $g$  και  $h$  με  $\varphi(x) = x + \ln(x+1)$  είναι ίσες σε όλο το  $(-1,+\infty)$ , οπότε

$$g(x) = x + \ln(x+1) \text{ για κάθε } x > -1.$$

B. i. Αρχικά παρατηρούμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , καθώς

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{1/x} - x) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left( e^u - \frac{1}{u} \right) = 0,$$

Εφόσον  $u = 1/x$   
και  $x \rightarrow 0^-$ , θα  
είναι  $u \rightarrow -\infty$ .

όπου στη 2η ισότητα κάναμε την αντικατάσταση  $u = 1/x$  και στην 3η χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$  και  $\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{u} = 0$ . Επιπλέον,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln(x+1)) = 0 + \ln 1 = 0 = f(0),$$

άρα η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ . Για  $x > 0$  ισχύει

$$f(x) = g(x) = x + \ln(x+1).$$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x+1} > 0$  για κάθε  $x > 0$ , άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ . Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$ , θα έχουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το  $[0, +\infty)$ . Έπεται για το σύνολο τιμών ότι

$$f([0, +\infty)) = \left[ f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty),$$

όπου ο υπολογισμός του ορίου στην τελευταία ισότητα έγινε ως εξής:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(x+1)) = +\infty.$$

Για  $x < 0$  ισχύει  $f(x) = e^{1/x} - x$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 0)$  και για κάθε  $x < 0$  ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} - 1 < 0.$$

Άρα η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0)$ . Έτσι, θα έχουμε για το σύνολο τιμών ότι

$$f((-\infty, 0)) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left( f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της  $f$  στο  $x_0 = 0$ , καθώς και το γεγονός ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1/x} - x) \stackrel{u=1/x}{=} \lim_{u \rightarrow 0^-} \left( e^u - \frac{1}{u} \right) = +\infty,$$

όπου στη δεύτερη ισότητα κάναμε την αντικατάσταση  $u = \frac{1}{x}$  και στην τρίτη χρησι-

μπουήσαμε τα όρια  $\lim_{u \rightarrow 0^-} e^u = 1$  και  $\lim_{u \rightarrow 0^-} (-1/u) = +\infty$ . Επομένως, το σύνολο τιμών της  $f$  θα είναι το

$$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty) \cup [0, +\infty) = [0, +\infty).$$

- ii. Θέτουμε  $u = f(x) \geq 0$ , καθώς λόγω του συνόλου τιμών θα έχουμε ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$u^2 + u = 2 \Leftrightarrow u^2 + u - 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα αυτού του τριωνύμου είναι ίση με

$$\Delta = 1^2 - 4(-2) = 1 + 8 = 9,$$

$$\text{άρα } u_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

Έτσι, θα είναι  $u_1 = -2$ , το οποίο απορρίπεται (αφού  $u \geq 0$ ), ή  $u_2 = 1$  το οποίο είναι δεκτό. Άρα η αρχική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$u = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1.$$

Ισχύει ότι  $1 \in f((-\infty, 0)) = (0, +\infty)$  κι επομένως υπάρχει  $\kappa \in (-\infty, 0)$ , για το οποίο ισχύει ότι  $f(\kappa) = 1$  και είναι μοναδικό στο  $(-\infty, 0)$  γιατί η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

Επιπλέον,  $1 \in f((0, +\infty)) = (0, +\infty)$  κι επομένως υπάρχει  $\lambda \in (0, +\infty)$ , για το οποίο ισχύει ότι  $f(\lambda) = 1$  και είναι μοναδικό στο  $(0, +\infty)$  γιατί η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα. Επομένως, συνολικά η εξίσωση  $f^2(x) + f(x) = 2$  έχει ακριβώς 2 ρίζες  $\kappa < 0 < \lambda$ .

- iii. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} e^{\alpha+\beta} &= \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)} \Leftrightarrow \alpha + \beta = \ln\left(\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\right) \\ &\Leftrightarrow \alpha + \beta = -\ln(\alpha+1) - \ln(\beta+1) \\ &\Leftrightarrow \alpha + \ln(\alpha+1) + \beta + \ln(\beta+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Για κάθε  $x \geq 0$  ισχύει ότι  $f(x) \geq 0$  και επιπλέον ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα, αν είχαμε  $\alpha > 0$  ή  $\beta > 0$ , τότε θα ίσχυε  $f(\alpha) > 0$  ή  $f(\beta) > 0$  και έτσι, αφού γενικώς  $f(\alpha) \geq 0$ ,  $f(\beta) \geq 0$ , η ισότητα  $f(\alpha) + f(\beta) = 0$  δεν θα ίσχυε. Άρα πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει  $\alpha = \beta = 0$ .

Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x)(x - \lambda) + f(1 - e^x)(x - \kappa) - 2024(x - \lambda)(x - \kappa).$$

Η  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $[\kappa, \lambda]$  ως πράξη συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον

- $\varphi(\kappa) = f(\kappa)(\kappa - \lambda) = 1 \cdot (\kappa - \lambda) = \kappa - \lambda < 0$ , αφού  $\kappa < \lambda$ .
- $\varphi(\lambda) = f(1 - e^\lambda)(\lambda - \kappa)$ .

Θα αποδείξουμε ότι αυτός ο αριθμός είναι θετικός. Επειδή  $\lambda > 0$  και η συνάρτηση  $e^x$  είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει  $e^\lambda > 1$ , άρα  $1 - e^\lambda < 0$ . Αφού η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$  και  $1 - e^\lambda, 0 \in (-\infty, 0]$ , προκύπτει ότι

$$f(1 - e^\lambda) > f(0) = 0.$$

Συμπεραίνουμε έτσι ότι  $\varphi(\lambda) > 0$ , καθώς  $f(1 - e^\lambda) > 0$  και  $\lambda - \kappa > 0$ .

Συνεπώς, από το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει  $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ , έτσι ώστε  $\varphi(x_0) = 0$ , δηλαδή

$$f(x_0)(x_0 - \lambda) + f(1 - e^{x_0})(x_0 - \kappa) - 2024(x_0 - \lambda)(x_0 - \kappa) = 0.$$

Επειδή  $x_0 \in (\kappa, \lambda)$ , θα ισχύει  $x_0 - \lambda, x_0 - \kappa \neq 0$ , οπότε στην τελευταία εξίσωση μπορούμε να διαιρέσουμε με  $(x_0 - \lambda)(x_0 - \kappa)$  και αυτή τότε γράφεται ως

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - \kappa} + \frac{f(1 - e^{x_0})}{x_0 - \lambda} = 2024,$$

η οποία είναι ακριβώς η αρχική εξίσωση. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το  $x_0$  θα είναι ρίζα και της αρχικής εξίσωσης.

Δ. Παρατηρούμε ότι

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3}{x + \eta\mu x} \left( f\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - f(1) \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3}{x + \eta\mu x} \left( f\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - f(1) \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3}{x + \eta\mu x} \cdot \frac{1}{x^2} \left( \frac{f\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - f(1)}{\frac{1}{x^2}} \right) \right]$$

Αντικαθιστούμε  $u = \frac{1}{x^2}$ . Τότε είναι  $u \rightarrow 0^+$ , καθώς  $x \rightarrow +\infty$ , άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - f(1)}{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = f'(1) = \frac{3}{2}.$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{x + \eta\mu x} \cdot \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\eta\mu x}{x}}.$$

Για το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$  χρησιμοποιούμε το **κριτήριο παρεμβολής**. Για κάθε  $x > 0$  είναι

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{x} \leq \frac{1}{x}$$

άρα  $-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$ . Καθώς  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ , προκύπτει από το κριτήριο παρεμ-

βολής ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ . Συνεπώς,

$$L = \frac{1}{1+0} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

**ΘΕΜΑ 2.13**

**Λύση**

A. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $D_f$  ως πράξη παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = \left( \ln x + \frac{1}{\ln x} \right)' = (\ln x)' + \frac{(1)' \ln x - 1(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln^2 x} = \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln^2 x}.$$

Θα βρούμε αρχικά τα σημεία μηδενισμού της  $f'$ . Ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \ln^2 x = 1 \\ &\Leftrightarrow \ln x = 1 \quad \text{ή} \quad \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e \quad \text{ή} \quad x = e^{-1}. \end{aligned}$$

Θα βρούμε τώρα το πρόσημο της  $f'$ . Ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln^2 x < 1 \Leftrightarrow |\ln x| < 1 \Leftrightarrow -1 < \ln x < 1 \Leftrightarrow e^{-1} < x < e.$$

Γνωρίζουμε όμως επίσης ότι το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f$ , άρα τελικά οι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης είναι οι  $x \in (e^{-1}, 1) \cup (1, e)$ . Εντελώς όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι η  $f'$  είναι θετική για  $x \in (0, 1/e) \cup (e, +\infty)$ . Επομένως, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας για την  $f$ :

x	0	1/e	1	e	+∞			
f'(x)		+	0	-	-	0	+	
f(x)		↗		↘		↘		↗

Για το σύνολο τιμών της  $f$  εργαζόμαστε ως εξής:

- Η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{e}\right]$ , επομένως

$$f(\Delta_1) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e^{-1}) \right] = (-\infty, -2],$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln x + \frac{1}{\ln x} \right) = \left( -\infty + \frac{1}{-\infty} \right) = -\infty$$

και το γεγονός ότι  $f(e^{-1}) = \ln e^{-1} + \frac{1}{\ln e^{-1}} = -1 - 1 = -2$ .

- Η  $f$  συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_2 = \left[\frac{1}{e}, 1\right)$ , επομένως

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), f(e^{-1})\right) = (-\infty, -2],$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right) = 0 + \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

- Η  $f$  συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_3 = (1, e]$ , επομένως

$$f(\Delta_3) = \left[f(e), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)\right) = [2, +\infty),$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right) = 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

καθώς και ότι  $f(e) = \ln e + \frac{1}{\ln e} = 1 + 1 = 2$ .

- Η  $f$  συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_4 = [e, +\infty)$ , επομένως

$$f(\Delta_4) = \left[f(e), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = [2, +\infty),$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + \frac{1}{\ln x}\right) = +\infty + 0 = +\infty.$$

Έτσι, το σύνολο τιμών θα είναι το

$$f(D_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \cup f(\Delta_4) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) = \mathbb{R}.$$

**B.** Για κάθε  $0 < x \neq 1$  ισχύει

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \ln x^{-1} + \frac{1}{\ln x^{-1}} = -\ln x - \frac{1}{\ln x} = -f(x),$$

δηλαδή  $f(1/x) = -f(x)$  κι επομένως  $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$ . Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται ως εξής:



$$f\left(\frac{e^{-2x}}{1+e^{1-2x}}\right) + f(4+2\sqrt{e}\cdot e^x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{e^{2x}(1+e^{1-2x})}\right) + f(4+2\sqrt{e}\cdot e^x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{e^{2x}+e}\right) + f(4+2\sqrt{e}\cdot e^x) = 0.$$

Όμως από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι

$$f\left(\frac{1}{e^{2x}+e}\right) + f(e^{2x}+e) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{e^{2x}+e}\right) = -f(e^{2x}+e).$$

Έτσι, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$-f(e^{2x}+e) + f(4+2\sqrt{e}\cdot e^x) = 0 \Leftrightarrow f(4+2\sqrt{e}\cdot e^x) = f(e^{2x}+e).$$

Όμως, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $4+2\sqrt{e}\cdot e^x > e$  και  $e^{2x}+e > e$  και, αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(e, +\infty)$ , προκύπτει ότι η εξίσωση

$$f(4+2\sqrt{e}\cdot e^x) = f(e^{2x}+e)$$

είναι ισοδύναμη της  $4+2\sqrt{e}\cdot e^x = e^{2x}+e$ . Για να λύσουμε αυτήν την εξίσωση, θέτουμε  $\omega = e^x > 0$ . Τότε η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$4+2\sqrt{e}\omega = \omega^2 + e \Leftrightarrow \omega^2 - 2\sqrt{e}\omega + e - 4 = 0$$

Η διακρίνουσα αυτής της εξίσωσης είναι  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\sqrt{e})^2 - 4(e-4) = 16$ , οπότε οι λύσεις είναι

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2\sqrt{e} \pm 4}{2}$$

Συνεπώς,

$$\omega = \frac{2\sqrt{e}+4}{2} = \sqrt{e}+2 \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{2\sqrt{e}-4}{2} = \sqrt{e}-2.$$

Όμως, επειδή  $\sqrt{e}-2 < 0$ , δεκτή γίνεται μόνο η τιμή  $\omega = \sqrt{e}+2$ .

Επομένως, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\omega = \sqrt{e}+2 \Leftrightarrow e^x = \sqrt{e}+2 \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{e}+2).$$

- Γ. i. Έστω  $\varphi(x) = 2\left(\frac{1}{x} - 1\right) - \ln x$ ,  $x \in (0,1)$ . Η  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,1)$  ως γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε  $x \in (0,1)$  ισχύει

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$$

Ισχύει λοιπόν κάθε  $x \in (0,1)$  ότι  $\varphi'(x) < 0$ , επομένως η  $\varphi$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0,1)$ . Αφού η  $\varphi$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, προκύπτει ότι

$$\varphi((0,1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)\right) = (0, +\infty),$$

όπου ο υπολογισμός των δύο ορίων στην τελευταία ισότητα δεν παρουσιάζει δυσκολίες. Έτσι, θα είναι  $\varphi(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0,1)$ , οπότε

$$2\left(\frac{1}{x} - 1\right) - \ln x > 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

Συνεπώς,  $2\left(\frac{1}{x} - 1\right) > \ln x$ , για κάθε  $x \in (0,1)$ .

- ii. Για  $x \in (0,1)$  είναι

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{\ln^2 x - 1}{x \ln^2 x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \ln^2 x - x \ln^2 x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-x)\ln^2 x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Οι δύο εξισώσεις είναι ισοδύναμες επειδή έχουμε περιοριστεί στο  $(0,1)$ . Αλλιώς δεν θα ήταν, αφού η κάτω ορίζεται για  $x = 1$ , ενώ η πάνω όχι, αφού για  $x = 1$  μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\rho(x) = (1-x)\ln^2 x - 1$ ,  $x \in (0,1)$ . Λόγω της παραπάνω ισοδυναμίας, η εξίσωση  $f'(x) = 1$  είναι ισοδύναμη με τη  $\rho(x) = 0$ . Η  $\rho$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,1]$  ως γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων και για κάθε  $x \in (0,1]$  ισχύει

$$\rho'(x) = -\ln^2 x + 2(1-x)\ln x \frac{1}{x} = 2\ln x \left(\frac{1}{x} - 1\right) - \ln^2 x = \ln x \left[ 2\left(\frac{1}{x} - 1\right) - \ln x \right].$$

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι για κάθε  $x \in (0,1)$  ισχύει  $2(1/x - 1) > \ln x$  και επειδή επίσης  $\ln x < 0$  για κάθε  $x \in (0,1)$ , έπεται ότι το παραπάνω γινόμενο έχει αρνητικό πρόσημο.

Έτσι, η  $\rho$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0,1)$  και, αφού είναι και συνεχής, προκύπτει για το σύνολο τιμών της ότι

$$\rho((0,1)) = \left( \lim_{x \rightarrow 1^-} \rho(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} \rho(x) \right) = (-1, +\infty),$$

όπου τα όρια στο τελευταίο βήμα υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \rho(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(1-x)\ln^2 x - 1] = 0 \cdot 0 - 1 = -1.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \rho(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(1-x)\ln^2 x - 1] = 1 \cdot (+\infty) - 1 = +\infty.$

Αφού λοιπόν  $0 \in \rho((0,1))$ , έπεται ότι υπάρχει  $x_0 \in (0,1)$  έτσι ώστε

$$\rho(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 1.$$

Το  $x_0$  είναι μοναδικό στο  $(0,1)$  γιατί η  $\rho$  είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό.

- Δ.** Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, είναι  $x'(t) = 1 \text{ cm/sec}$ . Η απόσταση του σημείου  $M(x, f(x))$  από το σημείο  $A(e, 2)$  δίνεται από τον τύπο

$$d(t) = \sqrt{(x(t) - e)^2 + (f(x(t)) - 2)^2}$$

Έτσι, ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης δίνεται σε  $\text{cm/sec}$  από τον τύπο

$$\begin{aligned} d'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{(x(t) - e)^2 + (f(x(t)) - 2)^2}} \left( (x(t) - e)^2 + (f(x(t)) - 2)^2 \right)' \\ &= \frac{(2(x(t) - e)x'(t) + 2(f(x(t)) - 2)f'(x(t))x'(t))}{2\sqrt{(x(t) - e)^2 + (f(x(t)) - 2)^2}} \\ &= \frac{x'(t)(x(t) - e) + f'(x(t))x'(t)(f(x(t)) - 2)}{\sqrt{(x(t) - e)^2 + (f(x(t)) - 2)^2}} \end{aligned}$$

Τη χρονική στιγμή  $t_0$  κατά την οποία ισχύει  $x(t_0) = e^2$ , είναι

$$f(x(t_0)) = f(e^2) = \ln e^2 + \frac{1}{\ln e^2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

και

$$f'(x(t_0)) = f'(e^2) = \frac{\ln^2(e^2) - 1}{e^2 \ln^2(e^2)} = \frac{3}{4e^2}.$$

Επομένως,

$$d'(t_0) = \frac{1 \cdot (e^2 - e) + \frac{3}{4e^2} \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{2} - 2\right)}{\sqrt{(e^2 - e)^2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2}} \text{ cm/sec.}$$

Εκτελώντας τους υπολογισμούς σε αριθμητή και παρονομαστή, καταλήγουμε στην απλούστερη μορφή

$$d'(t_0) = \frac{e^2 - e + \frac{3}{8e^2}}{\sqrt{(e^2 - e)^2 + \frac{1}{4}}} \text{ cm/sec.}$$

## ΘΕΜΑ 2.14

### Λύση

- A. Καθότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , θα είναι και συνεχής στο  $\mathbb{R}$ . Επομένως θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \Leftrightarrow \alpha^4 - 3\alpha = -\frac{1}{\alpha} - 1.$$

- B. Αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = \alpha$ , θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

Υπολογίζουμε τα δύο πλευρικά όρια ξεχωριστά.

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} \frac{x^4 - 3x - \alpha^4 + 3\alpha}{x - \alpha} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow \alpha^-} (4x^3 - 3) = 4\alpha^3 - 3,$$

όπου στο δεύτερο βήμα κάναμε χρήση του κανόνα De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή  $0/0$ . Το δεξί όριο ισούται με

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{-\frac{1}{x} - 1 - \alpha^4 + 3\alpha}{x - \alpha} \stackrel{A.}{=} \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{-\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{\alpha} + 1}{x - \alpha} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \left( \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{\alpha^2},$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Α και στο τρίτο βήμα τον κανόνα De L'Hospital. Θα πρέπει επομένως να ισχύει ότι

$$4\alpha^3 - 3 = \frac{1}{\alpha^2} \Leftrightarrow 4\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^2} = 3. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = 4x^3 - \frac{1}{x^2}$ ,  $x > 0$ . Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε  $x > 0$  ισχύει

$$h'(x) = 12x^2 + \frac{2}{x^3} > 0.$$

Άρα η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ . Θα είναι λοιπόν και «1-1» σε αυτό το διάστημα. Η εξίσωση (1) τότε γράφεται ισοδύναμα ως

$$4\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^2} = 3 \Leftrightarrow h(\alpha) = 3 \Leftrightarrow h(\alpha) = h(1) \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Γ. Η  $f$  είναι από υπόθεση παραγωγίσιμη σε όλο το  $\mathbb{R}$  και επομένως:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

Είναι  $f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 3 = 1$  και  $f(1) = 1^4 - 1 \cdot 3 = -2$ . Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, -2)$  θα είναι λοιπόν

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = (x - 1) - 2 = x - 3.$$

Η  $f'$  είναι συνεχής σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Πράγματι:

- Στο  $(-\infty, 1)$  είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Μάλιστα, γι' αυτόν τον λόγο είναι επιπλέον παραγωγίσιμη με παράγωγο  $f''(x) = 12x^2$ . Για  $x < 1$  ισχύει  $f''(x) \geq 0$  με ισότητα μόνο για  $x = 0$ .
- Στο  $(1, +\infty)$  είναι συνεχής ως πηλίκιο συνεχών συναρτήσεων. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η  $f$  είναι επιπλέον παραγωγίσιμη. Για  $x > 1$  ισχύει  $f''(x) = -\frac{2}{x^3}$ .
- Για τη συνέχεια στο  $x_0 = 1$ , θα πρέπει να υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια. Το δεξί όριο είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x^3 - 3) = 1$$

και το αριστερό είναι ίσο με

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2} = 1$$

Από την ισότητα των δύο, συμπεραίνουμε ότι η  $f'$  είναι συνεχής και στο  $x_0 = 1$ .

Όπως είδαμε παραπάνω, για  $x > 1$  ισχύει  $f''(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$ . Αφού η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , η  $f'$  θα είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα  $[1, +\infty)$  κι επομένως η  $f$  είναι κοίλη σε αυτό το διάστημα. Έτσι, η γραφική παράσταση της  $f$  θα είναι για  $x > 1$  «κάτω» από την εφαπτομένη της στο σημείο  $A(1, -2)$ , με εξαίρεση το σημείο  $A$ , όπου συναντιούνται. Θα ισχύει δηλαδή  $f(x) < x - 3$  για κάθε  $x > 1$ , όπως θέλαμε.

Για ακόμη μία φορά, χρησιμοποιούμε το θεώρημα της σελ. 135 του σχολικού βιβλίου για τη συνάρτηση  $f'$ .

Αντίστοιχα, είδαμε ότι για  $x < 1$  ισχύει  $f''(x) = 12x^2$ , η οποία είναι θετική, με εξαίρεση το σημείο  $x = 0$ , όπου μηδενίζεται. Εφόσον η  $f'$  είναι συνεχής, θα είναι γνησίως αύ-

Εδώ χρησιμοποιούμε το μέρος (iii) του θεωρήματος στη σελ. 144. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο όταν η παράγωγος δεν είναι παντού θετική αλλά ενδεχομένως μηδενίζεται σε ένα σημείο, στο οποίο όμως η συνάρτηση είναι συνεχής.

ξουσα στο διάστημα  $(-\infty, 1]$ . Άρα η  $f$  είναι κυρτή σε αυτό το διάστημα και έτσι συμπεραίνουμε ότι η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο  $A$ , με εξαίρεση το ίδιο το σημείο  $A$ , όπου συναντιούνται. Με άλλα λόγια, θα ισχύει  $f(x) \geq x - 3$  για κάθε  $x \leq 1$ , όπως θέλαμε.

- Δ. Ξεκινάμε με ένα συμπέρασμα από το προηγούμενο ερώτημα, το οποίο δεν είναι άμεσο ζητούμενο, αλλά θα μας βοηθήσει στην πορεία. Είδαμε ότι για  $x \leq 1$  ισχύει  $f(x) \geq x - 3$ , με ισότητα μόνο για  $x = 1$ . Επίσης είδαμε ότι για  $x > 1$  ισχύει  $f(x) < x - 3$ . Επομένως, η μοναδική λύση της εξίσωσης  $f(x) = x - 3$  είναι η  $x = 1$ .

Περνάμε τώρα στο κύριο μέρος της λύσης. Η δοσμένη ισότητα γράφεται ως εξής:

$$g^2(x) = (f(x) - x + 3)^2 \Leftrightarrow |g(x)| = |f(x) - x + 3| \quad (2)$$

Θα αναζητήσουμε τα σημεία μηδενισμού της  $g$ . Σύμφωνα με την παρατήρηση στην αρχή του ερωτήματος, ισχύει η ισοδυναμία

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = 0 \Leftrightarrow |f(x) - x + 3| = 0 \Leftrightarrow f(x) = x - 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

Επομένως, η μοναδική ρίζα της συνεχούς συνάρτησης  $g$  είναι το  $x_0 = 1$ , συνεπώς η  $g$  θα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα  $(-\infty, 1)$  και  $(1, +\infty)$ .

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

**Περίπτωση 1:**

Σε αυτήν την περίπτωση, υποθέτουμε ότι  $g(x) < 0$ , και για  $x \in (-\infty, 1)$ , αλλά και για  $x \in (1, +\infty)$ . Σε αυτήν την περίπτωση, η σχέση (2) για  $x < 1$  γράφεται

$$\begin{aligned} -g(x) &= |f(x) - x + 3| \Leftrightarrow -g(x) = f(x) - x + 3 \\ &\Leftrightarrow g(x) = x - f(x) - 3, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος, σύμφωνα με το οποίο  $f(x) > x - 3$  για  $x < 1$ . Ανάλογα, για  $x \in (1, +\infty)$ , η σχέση (2) γράφεται

$$\begin{aligned} -g(x) &= |f(x) - x + 3| \Leftrightarrow -g(x) = x - 3 - f(x) \\ &\Leftrightarrow g(x) = f(x) - x + 3, \end{aligned}$$

όπου στην πρώτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε και πάλι τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος για  $x > 1$ . Καταφέραμε λοιπόν να βρούμε τον τύπο της  $g$  και στις δύο περιπτώσεις, ενώ παρατηρούμε επίσης ότι  $g(1) = 0 = f(1) - 1 + 3$ .

Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει  $g(x) = \begin{cases} x - f(x) - 3, & x < 1 \\ f(x) - x + 3, & x \geq 1 \end{cases}$ .

**Περίπτωση 2:**

Σε αυτήν την περίπτωση, υποθέτουμε ότι  $g(x) < 0$  για  $x \in (-\infty, 1)$  και  $g(x) > 0$  για  $x \in (1, +\infty)$ . Για  $x < 1$ , η σχέση (2) γράφεται

$$-g(x) = |f(x) - x + 3| \stackrel{\Gamma}{\Leftrightarrow} -g(x) = f(x) - x + 3 \Leftrightarrow g(x) = x - f(x) - 3.$$

Ανάλογα, για  $x \in (1, +\infty)$ , η σχέση (2) γράφεται

$$g(x) = |f(x) - x + 3| \stackrel{\Gamma}{\Leftrightarrow} g(x) = x - 3 - f(x),$$

ενώ γνωρίζουμε και ότι  $g(1) = 0 = 1 - 3 - f(1)$ . Επομένως

$$g(x) = x - f(x) - 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Περίπτωση 3:**

Αυτή η περίπτωση είναι η αντίστροφη της προηγούμενης, υποθέτουμε δηλαδή ότι  $g(x) > 0$  για  $x \in (-\infty, 1)$  και  $g(x) < 0$  για  $x \in (1, +\infty)$ . Τότε, για  $x < 1$  η σχέση (2) γράφεται

$$g(x) = |f(x) - x + 3| \stackrel{\Gamma}{\Leftrightarrow} g(x) = f(x) - x + 3.$$

Ανάλογα, για  $x > 1$  η σχέση (2) γράφεται

$$-g(x) = |f(x) - x + 3| \stackrel{r}{\Leftrightarrow} -g(x) = x - 3 - f(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x) - x + 3,$$

ενώ, όπως και σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις,

$$g(1) = 0 = f(1) = 1 + 3.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι  $g(x) = f(x) - x + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Περίπτωση 4:

Αυτή η περίπτωση είναι η αντίστροφη της πρώτης, υποθέτουμε δηλαδή ότι  $g(x) > 0$ , και για  $x \in (-\infty, 1)$  και για  $x \in (1, +\infty)$ . Επομένως, για  $x < 1$  η σχέση (2) γράφεται

$$g(x) = |f(x) - x + 3| \stackrel{r}{\Leftrightarrow} g(x) = f(x) - x + 3.$$

Αντίστοιχα, για  $x \in (1, +\infty)$  η (2) γράφεται

$$g(x) = |f(x) - x + 3| \stackrel{r}{\Leftrightarrow} g(x) = x - 3 - f(x)$$

ενώ, όπως και πριν,  $g(1) = 0 = f(1) - 1 + 3$ . Επομένως, σε αυτήν την τελευταία περίπτωση,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - x + 3, & x < 1 \\ x - f(x) - 3, & x \geq 1 \end{cases}$$