Διαγώνισμα 4.1

ΘΕΜΑ Α
Λύση

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 142/143.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 74.

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 161.

A4. **i)** Σ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Λ

Προσοχή:
Το αντίστροφο ΔΕΝ ισχύει. Πολλές φορές τίθεται το αντίστροφο σε ερωτήσεις.

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Σωστό: Σχολικό βιβλίο, σελ. 53.

ii. Σωστό: Σχολικό βιβλίο, σελ. 99.

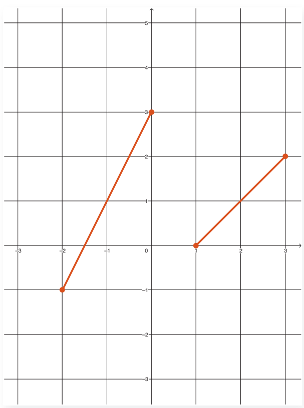
iii. Λάθος: Για να είναι σωστό το συμπέρασμα, θα έπρεπε να γίνει η επιπλέον υπόθεση ότι η συνάρτηση είναι συνεχής. Αν δεν είναι συνεχής, τότε μπορεί να συμβεί κάτι αντίστοιχο με το διπλανό σχήμα, όπου τα $f(-1), f(2)$ έχουν όντως διαφορετικό πρόσημο, αλλά η συνάρτηση δεν έχει ρίζες στο διάστημα $(-1,2)$.

iv. Σωστό: Σχολικό βιβλίο, σελ. 106.

v. Λάθος: Αν υπήρχε επιπλέον η υπόθεση ότι το A είναι διάστημα, τότε η πρόταση θα ήταν σωστή (σύμφωνα με το θεώρημα στη σελ. 135 του σχολικού βιβλίου). Παρ' όλα αυτά, χωρίς αυτήν την υπόθεση η πρόταση είναι λανθασμένη. Για παράδειγμα, αν $A=(-2,0)\cup(1,3)$, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3, & x\in(-2,0) \\ x-1, & x\in(1,3) \end{cases}$$

Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και μπορούμε να ελέγξουμε ότι $f'(x)=2$ για $x\in(-2,0)$ και $f'(x)=1$ για $x\in(1,3)$, επομένως, $f'(x)>0$ για κάθε $x\in A$. Παρ' όλα αυτά, η συνάρτηση ΔΕΝ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το A διότι, για παράδειγμα, ισχύει ότι $f(-1)=1>f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f = (-\infty,1)$, ενώ αυτό της συνάρτησης g είναι το $D_g = \mathbb{R}$. Το πεδίο ορισμού της $\varphi = f \circ g$ προκύπτει από το σύστημα των περιορισμών:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ g(x) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x < e^0 \end{cases} \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x < 0 \end{cases}.$$

Επομένως, η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού $\boxed{D_\varphi = (-\infty,0)}$. Ο τύπος της φ είναι

$$\varphi(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(1 - g(x))$$

$$\boxed{= \ln(1 - e^x) \text{ για } x < 0}.$$

B2. Η φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x < 0$ ισχύει

$$\varphi'(x) = (f \circ g)'(x) = \frac{1}{1-e^x}(1-e^x)' = -\frac{e^x}{1-e^x}.$$

Ισχύει ότι $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και για κάθε $x < 0$, και επιπλέον ισχύει ότι

$$x < 0 \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} e^x < e^0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0.$$

Επομένως, ισχύει $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$, επομένως η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Αφού φ συνεχής και γνησίως φθίνουσα, το σύνολο τιμών της θα δίνεται από τον τύπο

$$\varphi((-\infty,0)) = \left(\lim_{x \to 0^-} \varphi(x), \lim_{x \to -\infty} \varphi(x)\right) = (-\infty,0),$$

Γι' αυτόν τον τύπο, δες τη σελ. 78 του σχολικού βιβλίου.

όπου τα δύο όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 - e^x) = \ln(1-0) = 0$, καθώς $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \ln(1 - e^x)$.

  Γι' αυτό το όριο, θέτουμε $y = 1 - e^x$. Καθώς $x \to 0^-$, θα ισχύει ότι $y \to 0^+$. Συνεπώς, το όριο μπορεί να γραφτεί ως $\lim\limits_{y \to 0^+} \ln y = -\infty$.

Β3. Η φ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της φ^{-1} είναι ίσο με το σύνολο τιμών της φ, άρα $D_{\varphi^{-1}}=(-\infty,0)$. Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης, χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία

$$\varphi(x)=y \Leftrightarrow x=\varphi^{-1}(y).$$

Επομένως, για κάθε $x,y<0$ έχουμε

$$\varphi(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(1-e^x\right)=y \Leftrightarrow 1-e^x=e^y$$
$$\Leftrightarrow e^x=1-e^y \Leftrightarrow x=\ln\left(1-e^y\right).$$

Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $\boxed{\varphi^{-1}(x)=\ln\left(1-e^x\right),\ x<0.}$

Β4. Η φ' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$\varphi''(x)=-\frac{e^x\left(1-e^x\right)-e^x\left(-e^x\right)}{\left(1-e^x\right)^2}=-\frac{e^x-e^{2x}+e^{2x}}{\left(1-e^x\right)^2}=-\frac{e^x}{\left(1-e^x\right)^2}$$

για κάθε $x<0$. Ισχύει ότι $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα και για κάθε $x<0$ και επιπλέον ισχύει ότι

$$x<0 \overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow} e^x<e^0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow 1-e^x>0.$$

Επομένως, ισχύει $\varphi''(x)<0$ για κάθε $x<0$, οπότε η φ είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της και η γραφική παράσταση της φ δεν έχει σημεία καμπής.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Για να αποδείξουμε τη συνέχεια της f, θα πρέπει να ελέγξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Από τον τύπο της f προκύπτει ότι $f(0)=0$. Επίσης, είναι

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{x}{6}=0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x-x}{x^2}\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{2x}\overset{0/0}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\eta\mu x}{2}=0$,

  όπου στο δεύτερο και στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0=f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Σημείωση:

Το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{2x}$ μπορεί να υπολογιστεί και χωρίς τον κανόνα De L' Hospital. Συγκεκριμένα, είναι απλή εφαρμογή του θεωρητικού αποτελέσματος που τέθηκε και πιο πάνω, στο Ερώτημα Α4.i της θεωρίας.

Γ2. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, θα πρέπει να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Δεδομένου ότι $f(0)=0$, αυτό το όριο μπορεί να γραφτεί και ως $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)/x)$. Καθώς ο τύπος της f αλλάζει γύρω από το $x_0=0$, θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια ξεχωριστά. Θα πρέπει να δείξουμε ότι και τα δύο υπάρχουν, είναι πραγματικοί αριθμοί και, επιπλέον, ίσοι μεταξύ τους.

- $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{x}{6}}{x}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\eta\mu x-x}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x-x}{x^3}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\eta\mu x}{6x}=-\frac{1}{6},$$

  όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=-\frac{1}{6}$$

οπότε τελικά η $\boxed{f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0=0 \text{ με } f'(0)=-\frac{1}{6}.}$

Γ3. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$, η οποία ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $x=0$. Επίσης, για κάθε αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\alpha\le|\alpha|$. Συνεπώς,

$$\eta\mu x\le|\eta\mu x|\le|x|$$

Για $x>0$ ισχύει $|x|=x$, οπότε η τελευταία ανισότητα μπορεί να επεκταθεί στην

$$\eta\mu x \le |\eta\mu x| \le |x| = x,$$

για κάθε $x>0$. Επιπλέον, αφού η ισότητα στην ανισότητα $|\eta\mu x| \le |x|$ ισχύει μόνο για $x=0$, μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω ως γνήσια ανισότητα, δηλαδή

$$\eta\mu x \le |\eta\mu x| < |x| = x,$$

για κάθε $x>0$. Συνεπώς, για $x>0$ ισχύει $\eta\mu x < x$, άρα $\eta\mu x - x < 0$. Δεδομένου ότι $x^2>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι, για $x>0$,

$$\boxed{f(x)=\frac{\eta\mu x - x}{x^2}<0.}$$

Συμβουλή:
Σε ερωτήσεις με ανισότητες και τριγ. αριθμούς, η ανισότητα |ημx|≤|x| είναι πολύ συχνά χρήσιμη.

Γ4. Αν αντικαταστήσουμε το ξ με x, η δοσμένη ισότητα γράφεται ως εξής:

$$x^2 f'(x)=1 \underset{x\in(\pi,2\pi)}{\overset{x^2>0,}{\Leftrightarrow}} f'(x)=\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow f'(x)-\frac{1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \left(f(x)+\frac{1}{x}\right)'=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x}$, $x\in[\pi, 2\pi]$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\pi, 2\pi)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$. Θα εξετάσουμε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση g. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x>0$, άρα και για $x\in(\pi,2\pi)$, ισχύει ότι

$$g(x)=f(x)+\frac{1}{x}=\frac{\eta\mu x - x}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{\eta\mu x - x}{x^2}+\frac{x}{x^2}=\frac{\eta\mu x}{x}.$$

Επομένως, η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ισχύει επιπλέον $\eta\mu\pi = \eta\mu 2\pi = 0$, άρα μπορούμε να πούμε πως ισχύει ότι:

- Η g είναι συνεχής στο $[\pi,2\pi]$.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(\pi,2\pi)$.
- $g(\pi)=g(2\pi)=0$

Επομένως, από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(\pi,2\pi)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)-\frac{1}{\xi^2}=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{1}{\xi^2} \boxed{\Leftrightarrow \xi^2 f'(\xi)=1.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Για το πεδίο ορισμού της f, θα πρέπει $x-1\neq 0$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της είναι το

$$\boxed{D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty).}$$

Αναζητάμε αρχικά αν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x-1}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\cdot e^x\right)=+\infty,$$

καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

Επομένως, η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αναζητούμε τώρα αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty,$$

όπου στο δεύτερο βήμα εφαρμόσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Συμπεραίνουμε ότι η f δεν έχει ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Αναζητούμε τώρα αν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x-1}=\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}e^x\right)=1\cdot 0=0,$$

$\boxed{\text{οπότε η ευθεία } y=0 \text{ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } -\infty.}$

Δ2. Παρατηρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε ένα σημείο $(0,f(0))$ δίνεται από τον τύπο

$$(\varepsilon):y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow(\varepsilon):y=f'(0)x+f(0).$$

Είναι $f(0)=0$. Επιπλέον, για κάθε $x\neq 1$, είναι:

$$f'(x)=\frac{(xe^x)'(x-1)-xe^x(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(xe^x+e^x)(x-1)-xe^x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2e^x + xe^x + xe^x - e^x - xe^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x^2+x-1)}{(x-1)^2}.$$

Αντικαθιστώντας $x=0$, παίρνουμε ότι $f'(0)=-1$. Έπεται έτσι ότι η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$\boxed{(\varepsilon):\ y=-x}$$

Τυπική τακτική όταν μας ρωτούν για την ύπαρξη ορίου. ΠΡΟΣΟΧΗ! Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε De L' Hospital διότι δεν έχουμε απροσδιόριστη μορφή $0/0$ ή ∞/∞.

Δ3. Για να εξετάσουμε την ύπαρξη του δοθέντος ορίου, θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα δύο πλευρικά όρια.

- Το δεξί όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\cdot xe^x\right) = +\infty$$

καθώς για $x\to 1^+$ ισχύει $x-1>0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$. Επίσης, $\lim\limits_{x\to 1^+} xe^x = e$.

- Το αριστερό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x-1}\cdot xe^x\right) = -\infty$$

αφού για $x\to 1^-$ ισχύει $x-1<0$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$. Επίσης, ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^+} xe^x = e$.

Εφόσον τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει.

Δ4. Για να μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία, θα εξετάσουμε το πρόσημο της παραγώγου $f'(x)$. Στο Ερώτημα Δ2 είδαμε ότι

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να θέσουμε g(x)=x²+x-1 και να μελετήσουμε ως προς το πρόσημο τη συνάρτηση g. Αυτό όμως θα ήταν πολύ πιο χρονοβόρο.

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+x-1)}{(x-1)^2}$$

Ισχύει ότι $e^x>0$ και $(x-1)^2$ για κάθε $x\neq 1$. Επομένως, θα ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2+x-1>0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma = 1^2-4\cdot 1\cdot(-1) = 1+4 = 5$, οπότε οι ρίζες του δίνονται από τον τύπο

$$x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Σχεδιάζουμε τώρα τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου.

x	$-\infty$ $\quad$ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\quad$ $+\infty$
x^2+x-1	$+$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Με βάση τον πίνακα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right],\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)$ και $(1,+\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Σημείωση:

Θα ήταν λάθος να πούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το σύνολο $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$. Θυμηθείτε ότι η ιδιότητα

$$f'(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\Delta \Rightarrow f \text{ γνησίως αύξουσα στο } \Delta,$$

ισχύει ΜΟΝΟ όταν το Δ είναι διάστημα. Επομένως, όπως κάναμε στην παραπάνω λύση, πρέπει να μελετήσουμε τη μονοτονία ξεχωριστά σε καθένα από τα δύο υποδιαστήματα.

Δ5. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in[-1,0]$ ισχύει $e^x\le e^0=1$, με ισότητα μόνο για $x=0$. Ισχύει επίσης $\frac{x}{x-1}\ge 0$, καθώς και ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι αρνητικοί.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για $x\in[-1,0]$ θα ισχύει

$$f(x)=\frac{xe^x}{x-1}\le\frac{x}{x-1},$$

με ισότητα μόνο όταν $x=0$. Το κλάσμα $\frac{x}{x-1}$ μπορεί επίσης να γραφτεί ως

$$\frac{x}{x-1}=\frac{(x-1)+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}.$$

Προκύπτει λοιπόν από τα παραπάνω ότι

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx < \int_{-1}^{0}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx = \left[x+\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}$$

$$= (0+\ln 1)-(-1+\ln 2) \boxed{=1-\ln 2, \text{ όπως θέλαμε.}}$$