Διαγώνισμα 4.2

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 144.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 104.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 162.

Α4. i) Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από την παραπάνω ισότητα είναι ξεκάθαρο ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Εφόσον η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της είναι το

$$\boxed{f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,1),}$$

όπου τα δύο όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το πρώτο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{0}{0+1}=0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=-\infty$.

- Το δεύτερο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

B2. Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι και «1-1» στο πεδίο ορισμού της. Συνεπώς, η f είναι αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το σύνολο τιμών της f, δηλαδή $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (0,1)$. Θα προσδιορίσουμε τώρα τον τύπο της. Για $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $y \in (0,1)$ ισχύει η ισοδυναμία

$$y = \frac{e^x}{e^x+1} \Leftrightarrow y\left(e^x+1\right) = e^x \Leftrightarrow ye^x - e^x = -y \Leftrightarrow e^x\left(y-1\right) = -y$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right).$$

Συμπεραίνουμε ότι $\boxed{f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \text{ για κάθε } x \in (0,1)}$.

B3. Στο Ερώτημα Β1 προσδιορίσαμε την παράγωγο της f και είδαμε ότι αυτή είναι πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επομένως, η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με

$$f''(x) = \left(\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)' = \frac{e^x\left(e^x+1\right)^2 - 2e^x\left(e^x+1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^4}$$

$$= \frac{e^x\left(e^x+1\right)\left(e^x+1-2e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^4} = \frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}.$$

Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$. Οι παράγοντες e^x και $\left(e^x+1\right)^3$ είναι και οι δύο θετικοί, οπότε το πρόσημο της f'' εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο του παράγοντα $1-e^x$. Αυτός είναι θετικός για $x<0$ και αρνητικός για $x>0$, όπως μπορούμε να δούμε και από την παρακάτω ισοδυναμία:

$$1-e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow e^0 > e^x \Leftrightarrow x < 0.$$

Συνεπώς, το πρόσημο της f'' και τα διαστήματα κυρτότητας της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	∪	∩

- Η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.
- Το μοναδικό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f είναι το $K(0,f(0))=\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Β4. Από τον τύπο των f και f' μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι $f(0)=\frac{1}{2}$ και $f'(0)=\frac{1}{4}$. Επομένως, η εφαπτομένη της C_f στο $K(0,f(0))$ έχει εξίσωση

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}(x-0)+\frac{1}{2}\ \boxed{\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}.}$$

Είδαμε στο Ερώτημα Β3 ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0,+\infty)$. Επομένως, για $x>0$, η παραπάνω εφαπτόμενη ευθεία θα βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f, με εξαίρεση φυσικά το σημείο επαφής, στο οποίο οι δύο αυτές συμπίπτουν. Επομένως, για $x\in(1,2)$ θα ισχύει

$$f(x)<\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2f(x)<\frac{1}{4}x^3+\frac{x^2}{2}.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\int_1^2 x^2f(x)dx<\int_1^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[\frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{6}\right]_1^2$$

$$=\frac{16}{16}+\frac{8}{6}-\frac{1}{16}-\frac{1}{6}=\frac{15}{16}+\frac{7}{6}=\frac{101}{48}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας με 48 μας δίνει ότι

$$\boxed{\int_1^2 48x^2f(x)dx<101,\ \text{δηλαδή το ζητούμενο.}}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, επομένως μπορούμε να παραγωγίσουμε τις δύο πρώτες δοσμένες σχέσεις. Η πρώτη σχέση λοιπόν μας δίνει

$$\left(f'(x)+e^{g(x)}\right)'=0 \Rightarrow f''(x)+e^{g(x)}g'(x)=0.$$

Από τη δεύτερη σχέση όμως γνωρίζουμε ότι $g'(x)=-e^{f(x)}$, οπότε η παραπάνω μπορεί να γραφτεί ως

$$f''(x)-e^{g(x)}e^{f(x)}=0. \quad (1)$$

Με όμοιο τρόπο, παραγωγίζοντας δηλαδή τη δεύτερη σχέση και αντικαθιστώντας το $f'(x)$ με $-e^{g(x)}$, κάτι που μας δίνεται από την πρώτη, παίρνουμε τελικά ότι

$$g''(x)-e^{f(x)}e^{g(x)}=0. \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $f''(x)=g''(x)$, άρα από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. παίρνουμε ότι

$$f'(x)=g'(x)+c \quad (3)$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Αντικαθιστώντας $x=1$ στην πρώτη από τις δύο δοσμένες σχέσεις έπεται ότι $f'(1)+e^{g(1)}=0$. Γνωρίζουμε όμως από την τρίτη σχέση ότι $g(1)=0$, άρα παίρνουμε τελικά ότι $f'(1)=-e^{0}=-1$. Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι $g'(1)=-1$. Αντικαθιστώντας $x=1$ στη σχέση (3) και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, έπεται ότι $c=0$, άρα θα είναι $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x>0$.

Στη συνέχεια ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με πριν. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. παίρνουμε ότι $f(x)=g(x)+C$ για κάθε $x>0$, όπου C σταθερός πραγματικός αριθμός. Λόγω όμως της σχέσης $f(1)=g(1)$ που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση, αντικαθιστούμε $x=1$ στην τελευταία ισότητα και έτσι προκύπτει ότι $C=0$.

Ισχύει λοιπόν $\boxed{f(x)=g(x) \text{ για κάθε } x>0}$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

Γ2. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Σημειώνουμε επίσης ότι λόγω της ισότητας των f,g, προκύπτει από την πρώτη δοσμένη σχέση ότι

$$f'(x)=-e^{g(x)}=-e^{f(x)} \quad (4)$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει

$$\varphi'(x)=-f'(x)e^{-f(x)}-1\overset{(4)}{=}e^{f(x)}e^{-f(x)}-1=1-1=0,$$

άρα η φ είναι σταθερή.

Έστω ότι $\varphi(x)=c$ για κάθε $x>0$. Γνωρίζουμε ότι $\varphi(1)=e^{-f(1)}-1=0$, άρα θα ισχύει $c=0$ και έτσι για κάθε $x>0$ θα είναι

$$e^{-f(x)}-x=0\Leftrightarrow e^{-f(x)}=x$$
$$\Leftrightarrow -f(x)=\ln x \boxed{\Leftrightarrow f(x)=-\ln x.}$$

Γ3. Η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται ισοδύναμα ως

$$e^x>1+\ln(x+1)$$

για κάθε $x>0$. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $h(x)=e^x-1-\ln(x+1)$ για $x\geq 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων και η παράγωγός της δίνεται από τη σχέση

$$h'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}.$$

Η h' είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\geq 0$ ισχύει

$$h''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2}>0.$$

Έπεται λοιπόν ότι η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Αφού $h'(0)=e^0-\frac{1}{0+1}=0$, θα είναι $h'(x)>h'(0)=0$ για κάθε $x>0$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η h είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x>0$ ισχύει $h(x)>h(0)$, η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$\boxed{e^x>1+\ln(x+1),\ \text{το οποίο είναι το ζητούμενο.}}$$

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\theta^x-1+f(1+x)$ για $x>-1$. Η φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων και η παράγωγός της είναι η $\varphi'(x)=\theta^x\ln\theta+f'(1+x)$. Η συνθήκη που μας δίνεται στην εκφώνηση γράφεται ισοδύναμα ως $\varphi(x)\geq 0$ για $x>-1$. Παρατηρούμε όμως ότι $\varphi(0)=\theta^0-1+f(1)=0$, άρα η φ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x=0$. Αυτό το σημείο είναι εσωτερικό σημείο του A_φ, οπότε από το θ. Fermat προκύπτει ότι

$$\varphi'(0)=0 \Leftrightarrow \ln\theta+f'(1)=0 \Leftrightarrow \ln\theta-1=0$$
$$\Leftrightarrow \ln\theta=1 \boxed{\Leftrightarrow \theta=e.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγώγισης γινομένου, η σχέση

$$f''(x)f(x)=2x-[f'(x)]^2$$

γράφεται ισοδύναμα ως

$$f''(x)f(x)+[f'(x)]^2-2x=0 \Leftrightarrow (f'(x))'f(x)+f'(x)f'(x)-(x^2)'=0$$
$$\Leftrightarrow (f'(x)f(x)-x^2)'=0.$$

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $\varphi(x)=f'(x)f(x)-x^2$ για $x\in\mathbb{R}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το ζητούμενο είναι να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=0$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ διότι η f έχει υποτεθεί δύο φορές παραγωγίσιμη. Από τη σχέση $f(-1)=f(1)=0$ προκύπτει ότι $\varphi(-1)=-1$ και $\varphi(1)=-1$, άρα $\varphi(-1)=\varphi(1)$. Εφόσον η φ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, ικανοποιεί σαφώς τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,1]$. Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=0$, όπως θέλαμε.

> Οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle είναι να είναι η συνάρτηση συνεχής στο [-1,1] και παραγωγίσιμη στο (-1,1). Εφόσον η φ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, οι υποθέσεις αυτές προφανώς ικανοποιούνται.

Δ2. Η f ικανοποιεί και αυτή τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,1]$ διότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και $f(-1)=f(1)$. Επομένως, υπάρχει $\lambda\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\lambda)=0$. Εφόσον η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	λ	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,\lambda]$. Άρα για κάθε $x\in(-1,\lambda]$ ισχύει

$$f(x)<f(-1)=0$$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\lambda,1]$, άρα για κάθε $x\in[\lambda,1)$ ισχύει $f(x)<f(1)=0$.

Συμπεραίνουμε τελικά ότι $\boxed{\text{για κάθε } x\in(-1,1) \text{ ισχύει } f(x)<0}$, όπως θέλαμε.

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x+1$ για $x\in(-1,1)$. Ισχύουν τα εξής:

- $g(-1)=f(-1)-2(-1)+1=3>0$.
- $g(1)=f(1)-2+1=-1<0$.
- Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

Από το θ. Bolzano, έπεται ότι υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$, δηλαδή

$$\boxed{f(x_0)=2x_0-1}$$

Δ4. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα ικανοποιεί και με το παραπάνω τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[-1,x_0]$ και $[x_0,1]$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο πρώτο από αυτά, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\rho_1\in(-1,x_0)\subseteq(-1,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\rho_1)=\frac{f(x_0)-f(-1)}{x_0+1}=\frac{2x_0-1}{x_0+1}.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το Θ.Μ.Τ. στο $[x_0,1]$ παίρνουμε ότι υπάρχει $\rho_2\in(x_0,1)\subseteq(-1,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\rho_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{-(2x_0-1)}{1-x_0}=\frac{2x_0-1}{x_0-1}.$$

Ισχύει λοιπόν

$$\boxed{f'(\rho_1)f'(\rho_2)=\frac{(2x_0-1)(2x_0-1)}{(x_0+1)(x_0-1)}=\frac{(2x_0-1)^2}{x_0^2-1},\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

Δ5. Αρχικά θα κάνουμε μια παρατήρηση που θα μας βοηθήσει στη συνέχεια. Αν θεωρήσουμε την $f(x-2h)$ ως συνάρτηση του h και θεωρήσουμε το x σταθερή ποσότητα, τότε η παράγωγος ως προς h θα είναι ίση με

$$f'(x-2h)\cdot(x-2h)' = -2f'(x-2h)$$

και η δεύτερη παράγωγος ίση με $-2f''(x-2h)\cdot(x-2h)' = 4f''(x-2h)$. Ομοίως υπολογίζουμε τις παραγώγους της ποσότητας $f(x+2h)$ ως προς h.

Πηγαίνοντας πίσω στο ζητούμενο όριο, παρατηρούμε ότι έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$, άρα θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Προκύπτει λοιπόν τότε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x-2h)+f(x+2h)-2f(x)}{4h^2} &= \lim_{h\to 0}\frac{-2f'(x-2h)+2f'(x+2h)}{8h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-f'(x-2h)+f'(x+2h)}{4h},\end{aligned}$$

όπου παραγωγίσαμε αριθμητή και παρονομαστή ως προς h και χρησιμοποιήσαμε την παρατήρηση στην αρχή της λύσης. Και το τελευταίο όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$, όμως δεν βολεύει να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα De L' Hospital, και θα εξηγήσουμε αργότερα το γιατί. Προς το παρόν ακολουθούμε μια διαφορετική στρατηγική. Προσθαφαιρούμε τον όρο $f'(x)$ στον αριθμητή, οπότε το όριο μπορεί να γραφτεί ως

$$\lim_{h\to 0}\frac{-f'(x-2h)+f'(x)+f'(x+2h)-f'(x)}{4h}.$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε ξεχωριστά τα όρια

$$\lim_{h\to 0}\frac{-f'(x-2h)+f'(x)}{4h} \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{4h},$$

καθώς το ζητούμενο όριο θα είναι το άθροισμα των δύο. Για το πρώτο από τα δύο όρια θέτουμε $u=-2h$, οπότε θα ισχύει $u\to 0$, καθώς $h\to 0$. Αυτό το όριο τότε γράφεται ως

$$\lim_{u\to 0}\frac{-f'(x+u)+f'(x)}{-2u} = \lim_{u\to 0}\frac{f'(x+u)-f'(x)}{2u}.$$

Το τελευταίο όριο είναι ίσο με $f''(x)/2$, όπως προκύπτει από τον ορισμό της παραγώγου στη σελ. 95 του σχολικού βιβλίου (δείτε τη συζήτηση κάτω από τον ορισμό, όπου αναφέρεται η ισοδύναμη μορφή της παραγώγου). Αυτός ο ορισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί εδώ, καθώς γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f' είναι εξ υποθέσεως παραγωγίσιμη. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{4h}$$

ισούται με $f''(x)/2$, άρα τελικά το ζητούμενο όριο, που είναι το άθροισμα των δύο μεμονωμένων όρων, είναι ίσο με

$$\boxed{\frac{f''(x)}{2}+\frac{f''(x)}{2}=f''(x),\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

Σημείωση:

Αναφέραμε νωρίτερα ότι ο κανόνας De L' Hospital δεν θα ήταν αποτελεσματικός στο τελευταίο μέρος της άσκησης. Πράγματι, αν εφαρμόζαμε τον κανόνα De L' Hospital, θα καταλήγαμε στο όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f''(x-2h)+f''(x+2h)}{2}.$$

Κάποιος εδώ θα αναρωτηθεί: Γιατί δεν μπορούμε απλώς να αφήσουμε το h να τείνει στο 0 και να συμπεράνουμε ότι το τελευταίο όριο είναι ίσο με

$$\frac{f''(x)+f''(x)}{2}=f''(x);$$

Ο λόγος είναι ότι, για να μπορέσουμε να το κάνουμε αυτό, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε ότι η f'' είναι συνεχής στο σημείο x. Αυτό όμως δεν συμπεριλαμβάνεται στις υποθέσεις του προβλήματος. Γνωρίζουμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, αλλά δεν μας έχει δοθεί ότι η f'' είναι συνεχής. Επομένως, χρειάστηκε να επιλέξουμε μια διαφορετική στρατηγική για να λύσουμε αυτό το ερώτημα. Πρόκειται για ένα πολύ λεπτό θεωρητικό σημείο, που μπορεί εύκολα να περάσει απαρατήρητο.