Διαγώνισμα 4.3

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 142-143.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 186.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 155.

Α4. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Αν $f(x)=x^3$ και $x_0=0$, τότε ισχύει $f'(x_0)=3x_0^2=0$, όμως το $x_0=0$ δεν είναι θέση τοπικού ακροτάτου για την f. Πράγματι, για $x>0$ ισχύει $f(x)>f(0)=0$ και για $x<0$ ισχύει $f(x)<f(0)=0$.

ii. Το αντίστροφο θα ήταν σωστό, αλλά η συγκεκριμένη συνεπαγωγή δεν ισχύει. Αντιπαράδειγμα αποτελεί η ίδια συνάρτηση με αυτήν του προηγούμενου ερωτήματος: Αν $f(x)=x^3$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα, και όμως $f'(0)=0$, άρα η παράγωγός της δεν είναι παντού θετική.

iii. Δείτε τα σχόλια στη σελ. 163 του σχολικού βιβλίου.

iv. Δείτε τη σελ. 212 του σχολικού βιβλίου.

v. Αυτό το αποτέλεσμα αναφέρεται στη σελ. 53 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, ως πηλίκο παραγωγίσιμων. Για κάθε $x\neq 1$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{(x^2)'(x-1)-x^2(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x\neq 1$, οπότε το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από το πρόσημο των παραγόντων x και $x-2$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0,1)$ και $(1,2]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1=0$ το $f(0)=0$, και τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2=2$ το $f(2)=4$.

Β2. Αναζητούμε αρχικά κατακόρυφες ασύμπτωτες. Το μοναδικό σημείο στο οποίο έχει νόημα να αναζητήσουμε τέτοιες είναι το $x_0=1$. Ισχύει

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=+\infty,$$

διότι για τον αριθμητή ισχύει $\lim_{x\to 1^+} x^2=1$ και για τον παρονομαστή ισχύει $\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0$ και $x-1>0$ για $x>1$. Εφόσον το όριο ισούται με $+\infty$, έπεται ότι η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Αναζητούμε τώρα οριζόντιες ασύμπτωτες:

- Ξεκινάμε με το $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty,$$

άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

- Συνεχίζουμε τώρα με το $-\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty,$$

άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες ούτε στο $-\infty$.

Αναζητούμε τώρα πλάγιες ασύμπτωτες:

- Ξεκινάμε με το $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι η ευθεία $\boxed{y=x+1 \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty}$.

- Συνεχίζουμε με το $-\infty$. Η διαδικασία είναι εντελώς όμοια με πριν. Ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1.$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1.$$

Επομένως, η ευθεία $\boxed{y=x+1 \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } -\infty}$.

Β3. Είδαμε στο Ερώτημα Β1 ότι για κάθε $x\neq 1$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Αυτή είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\neq 1$ ισχύει

$$f''(x)=\frac{\left(x^2-2x\right)'(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)\left[(x-1)^2\right]'}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(2x-2)(x-1)^2-\left(x^2-2x\right)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)^3-2x(x-1)(x-2)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2(x-1)^2-2x(x-2)}{(x-1)^3}=\frac{2\left(x^2-2x+1\right)-2\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Το πρόσημο της f'' εξαρτάται μόνο από τον παράγοντα $(x-1)^3$, ο οποίος είναι θετικός για $x>1$ και αρνητικός για $x<1$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

- Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,1)$ και κυρτή στο $(1,+\infty)$.
- Το σημείο $x=1$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, οπότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Β4. Για κάθε $x\neq 1$ ισχύει

$$f(x)-(x+1)=\frac{x^2}{x-1}-(x+1)=\frac{x^2}{x-1}-\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\frac{x^2-(x^2-1)}{x-1}=\frac{1}{x-1}.$$

Έτσι, το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_2^3\big(f(x)-(x+1)\big)dx=\int_2^3\frac{1}{x-1}dx=\big[\ln|x-1|\big]_2^3=\ln 2-\ln 1\boxed{=\ln 2.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\eta\mu x$. Για να κάνουμε πιο εύκολο τον υπολογισμό του $f(0)$, θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τους όρους

$$I:=\int_0^{\pi/2}e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx \quad \text{και} \quad J:=\int_0^{\pi/2}e^x\eta\mu x\,dx$$

Χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες, μια στρατηγική που είναι συχνά χρήσιμη σε ολοκληρώματα που περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Ισχύει

$$I=\int_0^{\pi/2}e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx=\int_0^{\pi/2}e^x(\eta\mu x)'\,dx=\big[e^x\eta\mu x\big]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}(e^x)'\eta\mu x\,dx$$

$$=e^{\pi/2}\eta\mu(\pi/2)-e^0\eta\mu 0-\int_0^{\pi/2}e^x\eta\mu x\,dx=e^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}e^x(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx$$

$$=e^{\pi/2}-\big[-e^x\sigma\upsilon\nu x\big]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(e^x)'(-\sigma\upsilon\nu x)dx$$

$$=e^{\pi/2}+e^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu(\pi/2)-e^0\sigma\upsilon\nu 0-\int_0^{\pi/2}e^x\sigma\upsilon\nu x\,dx==e^{\pi/2}-1-I.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι $I = e^{\pi/2} - 1 - I$. Λύνοντας αυτήν την εξίσωση ως προς I, παίρνουμε ότι

$$I = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right) \qquad (2)$$

Υπολογίζουμε τώρα με όμοιο τρόπο το ολοκλήρωμα J. Ισχύει

$$\begin{aligned} J = \int_0^{\pi/2} e^x ημx\,dx &= \int_0^{\pi/2} e^x (-συνx)'\,dx \\ &= \left[-e^x συνx\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\left(e^x\right)' συνx\,dx \\ &= \left(-e^{\pi/2} συν(\pi/2) + e^0 συν0\right) + \int_0^{\pi/2} e^x συνx\,dx \\ &= 1 + I = 1 + \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει τελικά ότι

$$J = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} + 1\right). \qquad (3)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τη σχέση (1) που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση. Αυτή η σχέση μπορεί να γραφτεί ως

$$f(0) = \int_0^{\pi/2} e^{\pi/2 - x} συνx\,dx - \int_0^{\pi/2} e^x συνx\,dx. \qquad (4)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το I, το οποίο έχουμε υπολογίσει. Για το πρώτο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u = \frac{\pi}{2} - x$. Ισχύει $du = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' dx = -dx$ και $x = \frac{\pi}{2} - u$. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Όταν $x = 0$, είναι $u = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$
- Όταν $x = \frac{\pi}{2}$, είναι $u = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

Επομένως, αυτό το ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_{\pi/2}^{0} e^u συν(\pi/2 - u)(-du) = \int_0^{\pi/2} e^u ημu\,du = J.$$

Προκύπτει λοιπόν από τη σχέση (4) ότι $f(0) = J - I$ και από τις (2), (3) ότι

$$\boxed{f(0) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} + 1\right) - \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2} - 1\right) = 1.}$$

Γ2. Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι για κάθε $x \in (-1,+\infty)$ ισχύει

$$f'(x)+f(x)=\frac{e^{-x}}{x+1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη αυτής της ισότητας με e^x, παίρνουμε ότι

$$e^x f'(x)+e^x f(x)=\frac{1}{x+1}$$

για κάθε $x \in (-1,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος μπορεί να γραφτεί ως

$$e^x f'(x)+\left(e^x\right)' f(x)=\left(e^x f(x)\right)',$$

επομένως για κάθε $x \in (-1,+\infty)$ ισχύει $\left(e^x f(x)\right)' = \frac{1}{x+1}=\left(\ln|x+1|\right)'$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. έπεται ότι $e^x f(x)=\ln|x+1|+c$ για κάθε $x>-1$, όπου c είναι μια σταθερά. Εφόσον είμαστε στο διάστημα $(-1,+\infty)$, γνωρίζουμε ότι $x+1>0$, άρα η τελευταία μπορεί να γραφτεί ως

$$e^x f(x)=\ln(x+1)+c$$

Θέτοντας $x=0$, παίρνουμε ότι $c=1$. Έπεται λοιπόν ότι για κάθε $x \in (-1,+\infty)$ έχουμε

$$e^x f(x)=\ln(x+1)+1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x)=\frac{1+\ln(x+1)}{e^x}.}$$

Γ3. Θα δείξουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=0$, το οποίο θα μας δώσει το ζητούμενο. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x>-1$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{\left(1+\ln(x+1)\right)' e^x-\left(1+\ln(x+1)\right)\left(e^x\right)'}{e^{2x}}$$

$$=\frac{e^x\left(\frac{1}{x+1}-1-\ln(x+1)\right)}{e^{2x}}=\frac{1}{e^x}\left(\frac{1}{x+1}-1-\ln(x+1)\right).$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του $\frac{1}{x+1}-1-\ln(x+1)$. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$h(x)=\frac{1}{x+1}-1-\ln(x+1),\ \text{για } x>-1.$$

Το πρόσημο της f' είναι το ίδιο με το πρόσημο της h. Αυτή είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων και για κάθε $x>-1$ ισχύει

$$h'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}<0,$$

οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα. Ισχύει $h(0)=0$, άρα το πρόσημο της h και η μονοτονία της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$		$+$	$\searrow$	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα ότι πράγματι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=0$. Πράγματι, αν $x\in(-1,0]$, τότε, αφού f γνησίως αύξουσα στο $(-1,0]$, θα ισχύει ότι $f(x)\le f(0)$, ενώ, αν $x\in[0,+\infty)$, επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, θα ισχύει ότι $f(x)\le f(0)$, συνεπώς για κάθε $x>-1$ είναι $f(x)\le f(0)$ και άρα για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ ισχύει $f(x)\le f(0)$.

Β΄ τρόπος:

Μια άλλη λύση στο παραπάνω ερώτημα προκύπτει με τη χρήση της ανισότητας $\ln x\le x-1$. Αυτή η ανισότητα εμφανίζεται σε εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (σελ. 148) και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη. Ισχύει για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Για να λύσουμε αυτό το ερώτημα, χρησιμοποιούμε αυτήν την ανισότητα ως εξής:

- Θέτουμε $y=x+1$. Γνωρίζουμε ότι $\ln y\le y-1$ για κάθε $y>0$, δηλαδή για κάθε $x>-1$. Ισοδύναμα, $\ln(x+1)\le(x+1)-1$, δηλαδή

$$\ln(x+1)\le x \quad (5)$$

  για κάθε $x>-1$, με ισότητα μόνο όταν $y=1$, δηλαδή όταν $x=0$.

- Θέτουμε τώρα $u=e^x$. Η παραπάνω ανισότητα γίνεται $\ln u\le u-1$ για κάθε $u>0$, δηλαδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού $u=e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ισοδύναμα,

$$\ln e^x \le e^x - 1 \Leftrightarrow e^x \ge x+1 \quad (6)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει όταν $u=1$, δηλαδή όταν $x=0$.

Από τις σχέσεις (5), (6) προκύπτει ότι

$$\boxed{f(x)=\frac{1+\ln(x+1)}{e^x} \le \frac{x+1}{x+1} = 1 = f(0),}$$

και μάλιστα η ισότητα ισχύει όταν ισχύει η ισότητα στις (5), (6), δηλαδή μόνο όταν $x=0$.

Γ4. **i.** Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g'(x)=e^x-\lambda$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-\lambda>0 \Leftrightarrow e^x>\lambda \Leftrightarrow x>\ln\lambda,$$

άρα το πρόσημο της g' και η μονοτονία της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	-1		$\ln\lambda$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Συμπεραίνουμε από τον παραπάνω πίνακα ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=\ln\lambda$ και αυτό το ελάχιστο είναι το

$$g(\ln\lambda)=e^{\ln\lambda}-\lambda\ln\lambda-\lambda+1=\lambda-\lambda\ln\lambda-\lambda+1=1-\lambda\ln\lambda.$$

Πράγματι, αν $x \in (-1,\ln\lambda]$, τότε, αφού f γνησίως φθίνουσα στο $(-1,\ln\lambda]$, θα ισχύει ότι $f(x)\ge f(\ln\lambda)$, ενώ, αν $x\in[\ln\lambda,+\infty)$ επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $[\ln\lambda,+\infty)$, θα ισχύει ότι $f(x)\ge f(\ln\lambda)$, συνεπώς για κάθε $x>-1$ είναι $f(x)\ge f(\ln\lambda)$.

ii. Ισχύει $g(x)\ge 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν η ελάχιστη τιμή της g είναι μεγαλύτερη ή ίση του 1, δηλαδή αν $1-\lambda\ln\lambda\ge 1$. Ισοδύναμα θέλουμε $\lambda\ln\lambda\le 0$, δηλαδή $\ln\lambda\le 0$, καθώς η παράμετρος λ είναι ούτως ή άλλως θετική. Η τελευταία ανισότητα έχει λύσεις $\lambda\le 1$. Επομένως, η μέγιστη τιμή του λ είναι η $\lambda_{max}=1$.

iii. Είδαμε στο Ερώτημα Γ3 ότι η μέγιστη τιμή της f είναι η $f(0)=1$ και μάλιστα ότι αυτή λαμβάνεται μόνο για $x=0$. Στο προηγούμενο υποερώτημα είδαμε ότι, για $\lambda=1$, η ελάχιστη τιμή της g είναι η $g(\ln 1)=g(0)=1$ και από τον πίνακα μονοτονίας της g προκύπτει ότι και αυτή λαμβάνεται μόνο για $x=1$. Εφόσον $f(0)=g(0)=1$, προκύπτει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν κοινό σημείο το $A(0,1)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω σχόλια για τα ακρότατα των f,g, προκύπτει ότι για κάθε $x\neq 0$ θα ισχύει $f(x)<f(0)=g(0)<g(x)$. Έτσι, η εξίσωση $f(x)=g(x)$ δεν μπορεί να έχει άλλες λύσεις πέραν της $x=0$, οπότε οι C_f, C_g δεν έχουν άλλο κοινό σημείο πέραν του A.

Για να δείξουμε ότι έχουν κοινή εφαπτόμενη σε αυτό το σημείο, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(0)=g'(0)$. Όμως και οι δύο αυτές παράγωγοι θα είναι ίσες με μηδέν, διότι αντιστοιχούν σε εσωτερικά σημεία τοπικών (και ολικών) ακροτάτων των δύο συναρτήσεων (Θεώρημα Fermat). Αυτό μπορούμε να το επαληθεύσουμε και με απευθείας υπολογισμό:

- $f'(0)=\dfrac{1}{e^0}\left(\dfrac{1}{0+1}-1-\ln(0+1)\right)=0.$

- $g'(0)=e^0-\lambda=1-\lambda=1-1=0.$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Θα χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\frac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}.$$

Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, το όριο στο πρώτο μέλος ισούται με $2f'(x)$. Προσθαφαιρούμε τον όρο $f(x)$ στον αριθμητή και παίρνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\big(f(x-h)-f(x)\big)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}.$$

Εστιάζουμε στο καθένα από τα δύο όρια ξεχωριστά. Το πρώτο όριο είναι ίσο με $f'(x)$. Αυτό είναι άμεσο από τον ορισμό της παραγώγου, καθώς, σύμφωνα με τη συζήτηση στη σελ. 95 του σχολικού βιβλίου, ένας ισοδύναμος τρόπος να ορίσουμε την παράγωγο στο x_0 θα ήταν μέσω του ορίου

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Για το δεύτερο όριο εκτελούμε την αντικατάσταση $u=-h$. Εφόσον $h\to 0$, προκύπτει ότι $u\to 0$. Το όριο τώρα γράφεται

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{-u}=-\lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)-f(x)}{u},$$

το οποίο είναι ίσο με $-f'(x)$ λόγω ακριβώς της παραπάνω συζήτησης. Προκύπτει έτσι ότι το αρχικό όριο είναι ίσο με $f'(x)-\left(-f'(x)\right)=2f'(x)$, όπως ισχυριστήκαμε αρχικά.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $2f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}$.

Για να αποδείξουμε ότι η φ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\varphi'(x)=0$ για κάθε $x>0$. Ισχύει

$$\varphi'(x)=\left(f(x)-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'=f'(x)-\frac{(\ln x)'\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{x}$$

$$=f'(x)-\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=f'(x)-\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}},$$

το οποίο πράγματι είναι ίσο με μηδέν λόγω της παραπάνω παρατήρησης για την $f'(x)$. Γνωρίζουμε ότι $f(1)=0$, άρα $\varphi(1)=f(1)-\dfrac{\ln 1}{\sqrt{1}}=0$. Η φ είναι σταθερή, άρα $\varphi(x)=0$ για κάθε $x>0$, δηλαδή για κάθε $x>0$ ισχύει

$$\boxed{f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.}$$

Δ2. Μια προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x=e$. Για να αποδείξουμε ότι έχει ακόμη μία, ξεκινάμε μελετώντας την f ως προς τη μονοτονία, με σκοπό στη συνέχεια να βρούμε το σύνολο τιμών της. Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι

$$f'(x)=\frac{2-\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός, άρα ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow x < e^2.$$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0	e^2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας, προκύπτουν τα εξής:

- Όπως αναφέραμε και πριν, η εξίσωση $f(x) = f(e)$ έχει προφανώς λύση την $x = e$, η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, e^2)$. Σε αυτό το διάστημα η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, αυτή η λύση είναι μοναδική σε αυτό το διάστημα.

- Το σύνολο τιμών είναι το

$$f\left((e^2, +\infty)\right) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to (e^2)^+} f(x) \right) = (0, 2/e),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της f στο σημείο $x = e^2$ και το γεγονός ότι

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Στο δεύτερο βήμα παραπάνω, χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Παρατηρούμε ότι $f(e) = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Αυτός ο αριθμός είναι μικρότερος του $2/e$. Πράγματι, ισχύει η ισοδυναμία

$$\frac{1}{\sqrt{e}} < \frac{2}{e} \Leftrightarrow \sqrt{e} < 2 \Leftrightarrow e < 4,$$

η οποία είναι προφανώς αληθής. Προκύπτει λοιπόν ότι $\frac{1}{\sqrt{e}} \in f\left((e^2, +\infty)\right)$, άρα η εξίσωση $f(x) = f(e) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ έχει λύση και στο διάστημα $(e^2, +\infty)$. Λόγω της μονοτονίας της σε αυτό το διάστημα, αυτή η λύση είναι μοναδική στο $(e^2, +\infty)$.

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι η εξίσωση $f(x) = f(e)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, όπως θέλαμε.

Δ3. Θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Συνηθισμένη τακτική όταν πρέπει να υπολογίσουμε ολοκληρώματα που περιέχουν λογάριθμους.

Παρατηρήστε αρχικά ότι $1/\sqrt{x}=\left(2\sqrt{x}\right)'$. Έχουμε λοιπόν

$$\alpha=\int_1^{e^2} f(x)dx=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{e^2}\ln x\cdot\left(2\sqrt{x}\right)'dx$$

$$=\left[2\sqrt{x}\cdot\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\sqrt{x}\cdot(\ln x)'dx=\left(2e\ln e^2-2\ln 1\right)-\int_1^{e^2}\frac{2}{\sqrt{x}}dx$$

$$=4e-\left[4\sqrt{x}\right]_1^{e^2}=4e-(4e-4)=4,\text{ όπως θέλαμε.}$$

Δ4. i. Εφόσον $\alpha=4$, προκύπτει από την υπόθεση ότι $e^{g(x)}+g(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Εφόσον η g είναι παραγωγίσιμη, μπορούμε να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας και έτσι θα προκύψει ότι

$$e^{g(x)}g'(x)+g'(x)=1\Rightarrow g'(x)\left(e^{g(x)}+1\right)=1\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{e^{g(x)}+1}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Έπεται έτσι ότι και το πρώτο μέλος, δηλαδή η g', είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, δηλαδή η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, όπως θέλαμε. Επίσης, από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης και έτσι προκύπτει ότι

$$g''(x)=-\frac{1}{\left(e^{g(x)}+1\right)^2}\cdot\left(e^{g(x)}+1\right)'=-\frac{e^{g(x)}g'(x)}{\left(e^{g(x)}+1\right)^2}.$$

Εφόσον $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται από την τελευταία σχέση ότι $g''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η g είναι κοίλη.

ii. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από αυτό έπεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1». Επομένως αντιστρέφεται. Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού της αντίστροφης θα είναι το $A_{g^{-1}}=\mathbb{R}$. Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $g(x)=y$ ως προς x. Γνωρίζουμε όμως ότι $g(x)+e^{g(x)}=x$, άρα, αντικαθιστώντας $y=g(x)$, παίρνουμε ότι $x=y+e^y$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι λοιπόν η $g^{-1}(x)=x+e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

iii. Στον πρώτο όρο του αθροίσματος κάνουμε την αντικατάσταση $u=g(x)$. Ισχύει τότε $x=g^{-1}(u)=u+e^{u}$ και $dx=(u+e^{u})'du=(1+e^{u})du$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Όταν $x=e^{2}+2$, ισχύει $x=g^{-1}(2)$, άρα $u=g(x)=g(g^{-1}(2))=2$.
- Αντίστοιχα, όταν $x=e+1$, θα είναι $u=1$.

Επομένως, ο πρώτος όρος μπορεί να γραφτεί ως

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{2+g^{-1}(u)+u}\cdot(1+e^{u})du.$$

Φυσικά, μπορούμε να αλλάξουμε πάλι τη μεταβλητή σε x και να γράψουμε αυτό το ολοκλήρωμα ως $\int_{1}^{2}\frac{1+e^{x}}{2+g^{-1}(x)+x}dx$. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$I=\int_{1}^{2}\frac{1+e^{x}}{2+g^{-1}(x)+x}dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{2+x+g^{-1}(x)}dx=\int_{1}^{2}\frac{2+e^{x}}{2+2x+e^{x}}dx$$

$$=\int_{1}^{2}\frac{(2+2x+e^{x})'}{2+2x+e^{x}}dx=\int_{1}^{2}(\ln(2+2x+e^{x}))'dx=\left[\ln(2+2x+e^{x})\right]_{1}^{2}$$

$$=\ln(6+e^{2})-\ln(4+e).$$