Διαγώνισμα 4.4

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 216.

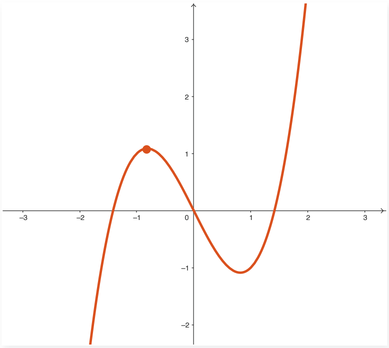
Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 141.

Α4. **i)** Σ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Αν η συνάρτηση είχε ακρότατο στη θέση $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, θα ίσχυε $f'(x_0)=0$, το οποίο είναι αδύνατο. Οι υποθέσεις αυτού του θεωρήματος ικανοποιούνται καθώς η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και το x_0 είναι προφανώς εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

ii. Ένα αντιπαράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x)=x^3-2x$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα: Αυτή η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ όπως φαίνεται στο σχήμα, όμως αυτό δεν είναι το ολικό της μέγιστο. Στην πραγματικότητα η συνάρτηση δεν έχει καν ολικό μέγιστο, αφού τείνει στο $+\infty$ για $x \to +\infty$.



iii. Θεωρία – Σχολικό βιβλίο, σελ. 157 (μετά από τον ορισμό).

iv. Ισχύει για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \Delta$, όπως προκύπτει από το θεώρημα 2 στη σελ. 214 του σχολικού βιβλίου.

v. Αναφέρεται σε σχόλιο στη σελ. 228 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η f είναι συνεχής ως ρητή, επομένως κατακόρυφη ασύμπτωτη αναζητούμε μόνο στα πεπερασμένα άκρα του πεδίου ορισμού της f, στα οποία όμως αυτή δεν ορίζεται. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=(-\infty,\alpha^2)\cup(\alpha^2,+\infty)$, άρα μοναδικό τέτοιο σημείο είναι το $x=\alpha^2$.

Αφού η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, έπεται ότι $\alpha^2=1$, οπότε $\alpha=-1$ ή $\alpha=1$.

- Αν $\alpha=-1$, τότε $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}=\dfrac{x(x-1)}{x-1}=x$ για κάθε $x\neq 1$ και άρα

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} x=1.$$

Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, η ευθεία $x=1$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

- Αν $\alpha=1$, τότε $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ για κάθε $x\neq 1$ και άρα

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x+1}{x-1}=+\infty.$$

Επομένως, η $x=1$ θα είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f σε αυτήν την περίπτωση. Τελικά λοιπόν θα ισχύει $\boxed{\alpha=1.}$

B2. Για $\alpha=1$ έχουμε $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, $x\neq 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή με

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \;\text{ ή }\; x=2.$$

Εφόσον ο παρονομαστής είναι θετικός, το πρόσημο της f' εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο των παραγόντων x και $x-2$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$ και είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0,1)$ και $(1,2]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=0$ το $f(0)=-1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2=2$ το $f(2)=3$.

B3. Η C_f έχει την $x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη, καθώς $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$. Θα εξετάσουμε αν η C_f έχει ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$ στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^2-x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1,$$

άρα $\lambda=1$. Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x(x-1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0,$$

άρα $\beta=0$.

Επομένως, η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=x$.

Θα εξετάσουμε τώρα αν η C_f έχει ασύμπτωτη της μορφής $y=\lambda x+\beta$ στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^2-x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1,$$

άρα $\lambda=1$. Επίσης,

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-x+1-x(x-1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-1}=0,$$

άρα $\beta=0$.

Επομένως, η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=x$.

Εφόσον η C_f έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$, αποκλείεται να έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Για το σύνολο τιμών της f εργαζόμαστε ως εξής:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_1=(-\infty,0)$ και άρα

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=(-\infty,-1),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = -1$$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_2 = [0,1)$ και άρα για το σύνολο τιμών ισχύει ότι

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to 1^-} f(x), f(0)\right] = (-\infty, -1],$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x+1}{x-1} = -\infty.$$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\Delta_3 = (1,2]$ και άρα

$$f(\Delta_3) = \left[f(2), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = [3, +\infty),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $f(2) = 3$ και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x+1}{x-1} = +\infty.$$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\Delta_4 = (2, +\infty)$ και άρα για το σύνολο τιμών ισχύει

$$f(\Delta_4) = \left(\lim_{x\to 2^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (3, +\infty),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 3$, και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\boxed{f(\mathbb{R}-\{1\}) = (\infty, -1] \cup [3, +\infty).}$

B4. Αφού $f'(x) = \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, η f' είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως ρητή και για κάθε $x \neq 1$ ισχύει

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\left[(2x-2)(x-1) - 2(x^2-2x)\right]}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας για την f:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$	
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

- Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1)$ και κυρτή στο $(1,+\infty)$.
- Η f δεν ορίζεται στο $x_0=1$, άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Β5. Ισχύει

$$I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\frac{x^2-x+1}{x-1}dx=\int_2^3\frac{x(x-1)+1}{x-1}dx=\int_2^3\left(x+\frac{1}{x-1}\right)dx.$$

Επομένως,

$$I=\left[\frac{x^2}{2}+\ln|x-1|\right]_2^3=\left(\frac{3^2}{2}+\ln|3-1|\right)-\left(\frac{2^2}{2}+\ln|2-1|\right)=\frac{9}{2}+\ln2-2$$

$$\boxed{=\ln2+\frac{5}{2}.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Θεωρούμε για $x>0$ τη συνάρτηση $g(x)=2\ln x+\frac{5\alpha}{x}-5\alpha$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{5\alpha}{x^2},\ x>0.$$

Παρατηρούμε ότι $g(1)=0$, άρα η σχέση (2) γράφεται $g(x)\geq g(1)$ για κάθε $x>0$. Επομένως, ισχύει ότι:

- Η g παρουσιάζει ελάχιστο (άρα και τοπικό ελάχιστο) στο $x_0=1$.
- Το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Από το θεώρημα Fermat έπεται ότι

$$g'(1)=0 \Leftrightarrow 2-5\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{2}{5}.$$

Γ2. Για το δοσμένο όριο χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u=e^{-h}$. Καθώς $h\to+\infty$, θα ισχύει $u\to 0^+$. Επίσης, ισχύει $e^h=\frac{1}{u}$. Επομένως, το ζητούμενο όριο γράφεται ως

$$\lim_{h\to+\infty} e^h\left(f\left(x+e^{-h}\right)-f(x)\right)=\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{1}{u}\left(f(x+u)-f(x)\right)\right]=f'(x),$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τον ορισμό της παραγώγου και συγκεκριμένα από τη συζήτηση μετά από τον ορισμό στη σελ. 95 του σχολικού βιβλίου.

Γ3. Από το προηγούμενο ερώτημα και από τη σχέση (1) που δίνεται στην εκφώνηση, καθώς και από το γεγονός ότι $\alpha=\frac{2}{5}$, προκύπτει ότι $e^{2x+f(x)}f'(x)=1-2x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$e^{f(x)}f'(x)e^{2x}=1-2x \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=(1-2x)e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=e^{-2x}-2xe^{-2x}.$$

Το παραπάνω ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$e^{f(x)}f'(x)=(x)'e^{-2x}+x\left(e^{-2x}\right)' \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'=\left(xe^{-2x}\right)'$$

για κάθε $x\ge 0$. Επιπλέον, οι συναρτήσεις $e^{f(x)}$, xe^{-2x} είναι συνεχείς στο $[0,+\infty)$, άρα από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$e^{f(x)}=xe^{-2x}+c \text{ για κάθε } x\ge 0.$$

Για $x=0$ έχουμε $e^{f(0)}=c\Leftrightarrow c=e^0=1$ και άρα

$$\boxed{e^{f(x)}=xe^{-2x}+1\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(xe^{-2x}+1\right) \text{ για κάθε } x\ge 0.}$$

Γ4. **i.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και για κάθε $x\ge 0$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{e^{-2x}-2xe^{-2x}}{xe^{-2x}+1}=\frac{e^{-2x}(1-2x)}{xe^{-2x}+1}.$$

Αναζητούμε αρχικά τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-2x}(1-2x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Επίσης, η παράγωγος είναι θετική όταν $1-2x>0$, δηλαδή όταν $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, και αντίστοιχα αρνητική για $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.
- Στη θέση $x_1=0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με $f(0)=0$. Στη θέση $x_2=\frac{1}{2}$ παρουσιάζει μέγιστο με $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2e}+1\right)$. Πράγματι, αν $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ τότε, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, θα ισχύει ότι $f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$. Αν $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, τότε, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, θα ισχύει ότι $f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$. Συνεπώς, για κάθε $x\ge 0$ είναι $f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$.

ii. Για $x\ge 0$, η δοσμένη εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως

$$x=e^{2x}\left(e^{\lambda}-1\right)\Leftrightarrow xe^{-2x}=e^{\lambda}-1$$
$$\Leftrightarrow xe^{-2x}+1=e^{\lambda} \Leftrightarrow \ln\left(xe^{-2x}+1\right)=\lambda \Leftrightarrow f(x)=\lambda.$$

Για να απαντηθεί αυτό το ερώτημα, βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f.

Στο $\Delta_1=\left[0,\frac{1}{2}\right]$, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$$f(\Delta_1)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right),f(0)\right]=\left[0,\ln\left(\frac{1+2e}{2e}\right)\right].$$

Στο $\Delta_2=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)\right).$$

Τώρα, έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(xe^{-2x}+1\right) \quad (1)$$

Θέτουμε $u = xe^{-2x}$. Πρέπει να βρούμε το όριο του u, καθώς $x \to +\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} \overset{+\infty/+\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

Επομένως, το αρχικό όριο στη σχέση (1) είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(xe^{-2x}+1\right) = \lim_{u\to 0}\ln(u+1) = \ln 1 = 0.$$

Επιπλέον, ισχύει $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1+2e}{2e}\right)$, συνεπώς

$$f(\Delta_2) = \left(0, \ln\left(\frac{1+2e}{2e}\right)\right)$$

και άρα

$$f(A_f) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[0, \ln\left(\frac{1+2e}{2e}\right)\right].$$

Για το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ χρησιμοποιούμε τα επιμέρους σύνολα τιμών ως εξής:

- Αν $\lambda < 0$, τότε $\lambda \notin f(D_f)$, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει καμία λύση.
- Αν $\lambda = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $f(x) = 0$, η οποία έχει ως μοναδική λύση την $x = 0$.
- Αν $0 < \lambda < \ln\left(\frac{1+2e}{e}\right)$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ και $\lambda \in f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in \Delta_1$, $x_2 \in \Delta_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = \lambda$. Το $x_1 \in \Delta_1$ είναι μοναδικό στο Δ_1, γιατί $f \nearrow \Delta_1$ και ομοίως το $x_2 \in \Delta_2$ είναι μοναδικό στο Δ_2, γιατί $f \searrow \Delta_2$.
- Αν $\lambda = \ln\left(\frac{1+2e}{e}\right)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \ln\left(\frac{1+2e}{e}\right)$ έχει ακριβώς μία ρίζα, την $x = \frac{1}{2}$ (μοναδική θέση ολικού μεγίστου).
- Αν $\lambda > \ln\left(\frac{1+2e}{e}\right)$, τότε $\lambda \notin f(D_f)$, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει καμία λύση.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. i. Ισχύει $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},+\infty\right)$. Θέτουμε $c=\int_0^1 f(x)dx$, οπότε για κάθε $x\geq 0$ ισχύει $f(x)=x-xe^x+2c$. Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη της ισότητας στο διάστημα $[0,1]$ παίρνουμε

$$c=\int_0^1\left(x-xe^x+2c\right)dx=\int_0^1(x+2c)dx-\int_0^1 xe^x dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+2cx\right]_0^1-\left[xe^x\right]_0^1+\int_0^1 e^x dx=\frac{1}{2}+2c-e+\left[e^x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}+2c-e+e-1=2c-\frac{1}{2},$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$c=2c-\frac{1}{2}\Leftrightarrow c=\frac{1}{2},$$

δηλαδή $\boxed{\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\text{, όπως θέλαμε.}}$

ii. Αφού η f συνεχής στο D_f θα ισχύει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$. Κοιτάζουμε ξεχωριστά καθένα από τα τρία μέλη της παραπάνω ισότητας.

- $f(0)=1$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha-e^{-x}\sigma\upsilon\nu x\right)=\alpha-1$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-xe^x+1\right)=1$.

Επομένως, πρέπει να ισχύει $\alpha-1=1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=2.}$

Έτσι, ο τύπος της f είναι:

$$f(x)=\begin{cases}2-e^{-x}\sigma\upsilon\nu x, & -\frac{\pi}{2}\leq x<0\\ x-xe^x+1, & x\geq 0\end{cases}.$$

Δ2. i. Στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$f'(x)=e^{-x}\sigma\upsilon\nu x+e^{-x}\eta\mu x=e^{-x}\left(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\right).$$

Αναζητούμε τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)=0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x \overset{\eta\mu x\neq 0}{\Leftrightarrow} \sigma\varphi x=-1,$$

όπου στο τρίτο βήμα εκμεταλλευτήκαμε το γεγονός ότι $\eta\mu x\neq 0$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ και διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με $\eta\mu x$. Η μοναδική ρίζα της τελευταίας εξίσωσης στο $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ είναι η $x=-\frac{\pi}{4}$. Άρα το $x=-\frac{\pi}{4}$ θα είναι κρίσιμο σημείο της f. Στο $(0,+\infty)$, η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων με $f'(x)=(1-e^x)-xe^x$. Η τελευταία ποσότητα είναι αρνητική ως άθροισμα δύο αρνητικών ποσοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $x>0$ ισχύει $e^x>1 \Rightarrow 1-e^x<0$ και επιπλέον $-xe^x<0$. Τέλος, εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Υπολογίζουμε τα αντίστοιχα πλευρικά όρια. Το αριστερό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2-e^{-x}\sigma\upsilon\nu x-1}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^-}\left(e^{-x}\sigma\upsilon\nu x+e^{-x}\eta\mu x\right)=1,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Το δεξί όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-xe^x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-e^x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1-e^x)=1-1=0.$$

Εφόσον

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0},$$

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, άρα και αυτό είναι κρίσιμο σημείο της. Έτσι, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα:

$$\boxed{x=-\frac{\pi}{4} \text{ και } x=0.}$$

ii. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς που έγιναν στο προηγούμενο υποερώτημα, ο τύπος της f' θα είναι

$$f'(x)=\begin{cases} e^{-x}(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x), & -\frac{\pi}{2}\leq x<0 \\ 1-e^x-xe^x, & x>0 \end{cases}.$$

Από το Δ2i έχουμε ήδη δείξει ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x>0$ και, αφού f συνεχής και στο $x_0=0$, η f θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$, η f' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, εφόσον δείξαμε παραπάνω ότι η μοναδική της ρίζα είναι το $x=-\frac{\pi}{4}$. Έπεται ότι η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από αυτά. Ας προσδιορίσουμε το πρόσημό της επιλέγοντας μια τιμή από κάθε διάστημα:

- Είναι $-\frac{\pi}{2}\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$ και $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\pi/2}<0$, οπότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$
- Επίσης, $-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$ και $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)=e^{\pi/6}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)>0$, συνεπώς $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right]$ και $[0,+\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$.
- Στη θέση $x_1=-\frac{\pi}{2}$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2$.
- Στη θέση $x_2=-\frac{\pi}{4}$, η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με
$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4-\sqrt{2}\,e^{-\pi/4}}{2}.$$
- Στη θέση $x_3=0$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $f(0)=1$.

Δ3. Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x>0$. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι οι ποσότητες $e^{1-x}+x-2$ και $x-1-\ln x$ είναι μη αρνητικές.

Για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $\ln x\le x-1$ και άρα $x-1-\ln x\ge 0$.
Μάλιστα, η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=1$.

Όπως έχουμε αναφέρει ξανά, αυτή η ανίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x+1$. Αυτό μπορούμε να το δούμε αντικαθιστώντας το x με e^x στην ανισότητα $\ln x \leq x-1$. Προκύπτει τότε $\ln e^x \leq e^x - 1$, δηλαδή $e^x \geq x+1$. Μάλιστα, σύμφωνα με τα παραπάνω, η ισότητα ισχύει μόνο όταν $e^x = 1$, δηλαδή όταν $x=0$. Αν τώρα στη θέση της μεταβλητής x θέσουμε το $1-x$, τότε θα έχουμε και $e^{1-x} \geq 1-x+1$, επομένως $e^{1-x}+x-2 \geq 0$, όπως θέλαμε.

Για να λύσουμε τη ζητούμενη ανισότητα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της f στο διάστημα $[0,+\infty)$.

$$f\left(e^{1-x}+x-2\right) > f\left(x-1-\ln x\right) \overset{f \searrow [0,+\infty)}{\Leftrightarrow} e^{1-x}+x-2 > x-1-\ln x$$
$$\Leftrightarrow e^{1-x}-1+\ln x > 0. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{1-x} - 1 + \ln x,\ x>0$. Αρχικά, η h έχει προφανή ρίζα την $x=1$, αφού $h(1) = e^0 - 1 + 0 = 0$. Επιπλέον, η h είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = -e^{1-x} + \frac{1}{x}$$

για κάθε $x>0$. Όπως είδαμε παραπάνω, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι $e^x \geq x+1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Αν στη θέση του x θέσουμε το $x-1$, θα είναι $e^{x-1} \geq x$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x-1=0$, δηλαδή για $x=1$.

Για $x>0$ μπορούμε να αντιστρέψουμε την ανισότητα και να καταλήξουμε στην $e^{1-x} \leq \frac{1}{x}$, η οποία, σύμφωνα με τον τύπο της h' παραπάνω, συνεπάγεται ότι $h'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$, με ισότητα μόνο για $x=1$. Αφού η h είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, η h θα είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επομένως, η (1) ισοδύναμα γίνεται

$$e^{1-x}-1+\ln x > 0 \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(1) \boxed{\overset{h \nearrow (0,+\infty)}{\Leftrightarrow} 0 < x < 1.}$$

Δ4. **i.** Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της f' που προσδιορίσαμε στο Ερώτημα Δ2i. Εφόσον η συνάρτηση είναι δίκλαδη, δουλεύουμε ξεχωριστά για κάθε κλάδο.

- Στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f''(x) = -e^{-x}\sigma\upsilon\nu x - e^{-x}\eta\mu x - e^{-x}\eta\mu x + e^{-x}\sigma\upsilon\nu x$$
$$= -2e^{-x}\eta\mu x.$$

Επειδή όμως $\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ και $e^x>0$ για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$, έπεται ότι

$$f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right).$$

- Στο διάστημα $(0,+\infty)$ η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f''(x)=-e^x-e^x-xe^x=-e^x(x+2)<0, \text{ για κάθε } x>0.$$

Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\pi/2$ 0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\smile$	$\frown$

- Η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.
- Το σημείο $A(0,1)$ δεν είναι σημείο καμπής της C_f, αφού η f δεν είναι καν παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii. Για κάθε $x>0$, ισχύει ότι

$$e^x>e^0\Rightarrow e^x>1\overset{e^x>0}{\Rightarrow}e^{2x}>e^x>1.$$

Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται ισοδύναμα μετά από μια απλή αναδιάταξη των όρων της ως

$$f(e^{2x})-f(e^x)<f(e^x)e^x-e^xf(1)\Leftrightarrow\frac{f(e^{2x})-f(e^x)}{e^x}<f(e^x)-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(e^{2x})-f(e^x)}{e^{2x}-e^x}<\frac{f(e^x)-1}{e^x-1},$$

όπου στο τελευταίο βήμα απλώς διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με τη θετική ποσότητα e^x-1. Για να αποδείξουμε την τελευταία ανισότητα, θεωρούμε τυχόν $x>0$. Τότε:

- Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,e^x]$ και $[e^x,e^{2x}]$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(1,e^x)$ και (e^x,e^{2x}).

Έτσι, από το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (1, e^x)$, $\xi_2 \in (e^x, e^{2x})$ για τα οποία

$$f'(\xi_1) = \frac{f(e^x) - 1}{e^x - 1},\ f'(\xi_2) = \frac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{e^{2x} - e^x}.$$

Όμως ισχύει ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, επομένως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Έτσι, έχουμε

$$\xi_2 > \xi_1 > e^x > 1 \overset{f' \nearrow (0,+\infty)}{\Leftrightarrow} f'(\xi_2) < f'(\xi_1) \quad \boxed{\Leftrightarrow \frac{f(e^{2x}) - f(e^x)}{e^{2x} - e^x} < \frac{f(e^x) - 1}{e^x - 1},}$$

που είναι ακριβώς το ζητούμενο. Αφού η ανισότητα ισχύει για το τυχόν $x > 0$, θα ισχύει σε κάθε $x > 0$.