Διαγώνισμα 4.5

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 186.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 185.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 77.

Α4. **i)** Σ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$g(x)=xf(x)=x\frac{1}{x\ln x}=\frac{1}{\ln x}.$$

Ισχύει λοιπόν $g'(x)=\dfrac{-1}{x\ln^2 x}$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Επίσης, για κάθε $0<x\neq 1$ ισχύει ότι $\ln^2 x>0$ και άρα $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$
$g(x)$	$\searrow$		$\searrow$

Η g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Β2. Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει

$$g''(x)=-\frac{-(x\ln^2 x)'}{x^2\ln^4 x}=\frac{\ln^2 x+2x\ln x\frac{1}{x}}{x^2\ln^4 x}=\frac{\ln^2 x+2\ln x}{x^2\ln^4 x}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός, άρα ισχύει η ισοδυναμία

$$g''(x)>0 \overset{x^2\ln^4 x>0}{\Leftrightarrow} \ln^2 x+2\ln x>0.$$

Για τη μελέτη αυτής της ανίσωσης, θέτουμε $\omega=\ln x$. Ισχύει $\omega\neq 0$, καθώς $0<x\neq 1$.

Τότε η ανίσωση γίνεται $\omega^2+2\omega>0$. Αυτό το τριώνυμο έχει ρίζες $\omega=0$, $\omega=-2$. Από τον πίνακα προσήμου του $\omega^2+2\omega$ προκύπτει ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι $\omega\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$, επομένως πρέπει $\omega<-2$ ή $\omega>0$.

ω	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\omega^2+2\omega$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Εφόσον $\omega=\ln x$, προκύπτει ότι

$$\ln x<-2 \ \text{ή}\ \ln x<0 \ \Leftrightarrow\ x<e^{-2} \ \text{ή}\ x<1.$$

Συνεπώς, ισχύει η ισοδυναμία

$$g''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(0,e^{-2}\right)\cup(1,+\infty).$$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$g(x)$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

- Η g είναι κυρτή στο $\left(0,e^{-2}\right]$ και στο $(1,+\infty)$ και κοίλη στο $\left(e^{-2},1\right)$.
- Η C_g παρουσιάζει σημείο καμπής το $A\left(e^{-2},g\left(e^{-2}\right)\right)=\left(e^{-2},-\frac{1}{2}\right)$.

Β3. Αρχικά εξετάζουμε αν οι κατακόρυφες ευθείες $x=0$, $x=1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_g.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$ αφου $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

  Άρα η ευθεία $x=0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\ln x}=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x=0$ και $\ln x<0$ για $x<1$.

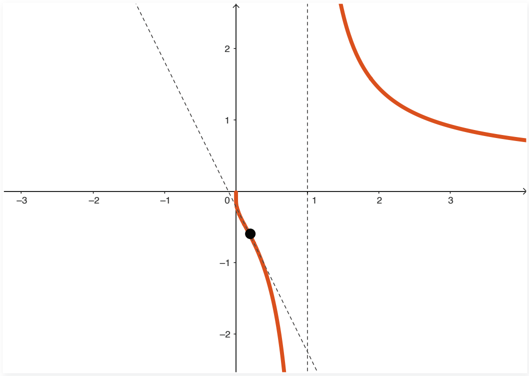
  Άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν υπάρχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0, \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty .$$

Συνεπώς, η οριζόντια ευθεία $\boxed{y=0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. Εφόσον υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη, δεν υπάρχουν πλάγιες. Στο παρακάτω σχήμα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g. Σε αυτήν, μπορούμε να δούμε την κατακόρυφη ασύμπτωτη, καθώς και το σημείο καμπής στο οποίο η εφαπτόμενη διαπερνά τη γραφική παράσταση.



B4. **i.** Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x\ln x}\right)' = \frac{-\ln x - 1}{x^2\ln^2 x}$$

και επομένως

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)x^2\ln^2 x + (\ln x + 1)\left(2x\ln^2 x + 2x^2\ln x\frac{1}{x}\right)}{x^4\ln^4 x}$$

$$= \frac{-x\ln^2 x + (\ln x+1)(2x\ln^2 x + 2x\ln x)}{x^4\ln^4 x} = \frac{-x\ln^2 x + (\ln x+1)2x\ln x(\ln x+1)}{x^4\ln^4 x}$$

$$= \frac{x\ln x\left(-\ln x + 2(\ln x+1)^2\right)}{x^4\ln^4 x} = \frac{2\ln^2 x + 3\ln x + 2}{x^3\ln^3 x}.$$

Για κάθε $x>1$ θα είναι $\ln x > 0$, άρα $f''(x) > 0$ και άρα η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$.

ii. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(e,f(e))$ είναι:

$$y-f(e)=f'(e)(x-e)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{e^2}(x-e)+\frac{1}{e}\ =-\frac{1}{e^2}x+\frac{2}{e}$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$, η C_f θα είναι «πάνω» από την εφαπτομένη της, με εξαίρεση ίσως το σημείο επαφής τους. Επομένως θα ισχύει ότι

$$\boxed{f(x)\geq -\frac{1}{e^2}x+\frac{2}{e}}$$

για κάθε $x>1$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x=e$.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η g είναι είναι εξ υποθέσεως παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $g'(x)=f'(x)-2x+1$. Έχουμε λοιπόν:

- $g(0)=f(0)-0^2+0=0$.
- $g'(0)=f'(0)-0+1=1$.
- $g'(1)=f'(1)-2+1=-1$.

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(0,g(0))$ θα έχει εξίσωση

$$\varepsilon_1: y=g'(0)(x-0)+g(0)\ =x.$$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(1,g(1))$ θα έχει εξίσωση:

$$\varepsilon_2: y=g'(1)(x-1)+g(1)\ =-(x-1)+g(1).$$

Όμως αφού οι δύο εφαπτομένες τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_3=\frac{1}{2}$, προκύπτει αντικαθιστώντας $x=\frac{1}{2}$ στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ότι

$$\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{2}-1\right)+g(1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+g(1)\ \boxed{\Leftrightarrow g(1)=0.}$$

Γ2. Η δοσμένη ισότητα, με μεταβλητή το x αντί του ξ, γράφεται ως

$$g'(x)+2x=1\Leftrightarrow g'(x)+2x-1=0\ \Leftrightarrow\left(g(x)+x^2-x\right)'=0.$$

Βάσει της υπόθεσης όμως, γνωρίζουμε ότι $g(x)=f(x)-x^2+x$, δηλαδή

$g(x)+x^2-x=f(x)$. Επομένως, η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως $f'(x)=0$. Ισχύει ότι:

- $f(0)=0$.
- $f(1)=g(1)+1^2-1=g(1)=0$.

Επιπλέον, η f είναι εξ υποθέσεως συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$, έτσι ώστε $f'(\xi)=0$. Όμως, όπως είδαμε και παραπάνω, ισχύει $f'(x)=g'(x)+2x-1$ και άρα το ξ ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(\xi)=0 \Leftrightarrow g'(\xi)+2\xi-1=0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow g'(\xi)+2\xi=1, \text{ όπως θέλαμε.}}$$

Γ3. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1-x)f'(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f'(x)dx-\int_0^1 xf'(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 xf'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1\left[xf(x)\right]'dx=f(1)-f(0)$$

$$\overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} \left[xf(x)\right]_0^1=f(1) \Leftrightarrow f(1)=f(1),$$

το οποίο προφανώς ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική ισότητα.

Γ4. Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$, καθώς η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Επομένως, από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής, υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ και $x_1,x_2\in[0,1]$, έτσι ώστε

$$m=f'(x_1)\le f'(x)\le M=f'(x_2)$$

για κάθε $x\in[0,1]$. Τότε, για κάθε $x\in[0,1]$ έχουμε

$$m\le f'(x)\le M \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} mx\le xf'(x)\le Mx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 mxdx\le\int_0^1 xf'(x)dx\le\int_0^1 Mxdx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{mx^2}{2}\right]_0^1\le\int_0^1 xf'(x)dx\le\left[\frac{Mx^2}{2}\right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{2} \le \int_0^1 xf'(x)dx \le \frac{M}{2} \Leftrightarrow m \le 2\int_0^1 xf'(x)dx \le M. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f'(x) - 2\int_0^1 f(x)dx,\ x \in [x_1, x_2]$$

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, καθώς η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$. Επιπλέον, για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ έχουμε

$$h(x) = f'(x) - 2\int_0^1 f(x)dx \overset{\Gamma 3.}{=} f'(x) - 2\int_0^1 (1-x)f'(x)dx$$
$$= f'(x) - 2\int_0^1 xf'(x)dx.$$

Από την (1) προκύπτει επίσης ότι

- $h(x_1) = f'(x_1) - 2\int_0^1 xf'(x)dx = m - 2\int_0^1 xf'(x)dx \le 0.$
- $h(x_2) = f'(x_2) - 2\int_0^1 xf'(x)dx = M - 2\int_0^1 xf'(x)dx \ge 0.$

Επομένως, έχουμε $h(x_1)h(x_2) \le 0$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $h(x_1)h(x_2) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ για το οποίο $h(x_0) = 0$.
- Αν $h(x_1)h(x_2) = 0$, τότε είτε $h(x_1) = 0$ είτε $h(x_2) = 0$ και άρα σε αυτήν την περίπτωση $x_0 = x_1$ ή $x_0 = x_2$.

Έτσι, σε οποιαδήποτε περίπτωση, υπάρχει $x_0 \in [x_1, x_2]$ για το οποίο να ισχύει

$$\boxed{h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 2\int_0^1 f(x)dx.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Στην ισότητα $f'(x)=\sqrt{16+f^2(x)}$, το δεύτερο μέλος είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Το πρώτο μέλος θα είναι συνεπώς επίσης παραγωγίσιμη συνάρτηση, άρα η f είναι πράγματι δύο φορές παραγωγίσιμη. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας παίρνουμε ότι

Η $\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, αλλά εδώ προφανώς ισχύει $\sqrt{16+f^2(x)}>0$, άρα το παραπάνω δεν αποτελεί πρόβλημα.

$$f''(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{16+f^2(x)}}=\frac{f(x)}{\sqrt{16+f^2(x)}}\sqrt{16+f^2(x)}=f(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπως θέλαμε. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα, για να δείξουμε ότι είναι σταθερή, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έχουμε

$$g'(x)=\left(f'(x)+f(x)\right)'e^{-x}+\left(f'(x)+f(x)\right)\left(e^{-x}\right)'$$
$$=\left(f''(x)+f'(x)\right)e^{-x}-\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}$$
$$=e^{-x}\left(f''(x)-f(x)\right)=0,$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f''(x)=f(x)$.

Δ2. Εφόσον $f''(x)=f(x)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f''(x)dx=\left[f'(x)\right]_{-1}^{1}=f'(1)-f'(-1)$$

$$=\sqrt{16+f^2(1)}-\sqrt{16+f^2(-1)}\overset{f(-1)=-f(1)}{=}\sqrt{16+f^2(1)}-\sqrt{16+\left(-f(1)\right)^2}$$

$$\boxed{=0,\text{ όπως θέλαμε.}}$$

Δ3. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή. Έστω ότι είναι ίση με μία σταθερά c. Ισχύει τότε η ισοδυναμία

$$g(x)=c\Leftrightarrow\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}=c\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=ce^{x}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι $f(0)=0$, οπότε από τις υποθέσεις του προβλήματος προκύπτει επίσης ότι $f'(0)=\sqrt{16+f^2(0)}=\sqrt{16}=4$. Όμως η παραπάνω ισότητα για $x=0$ δίνει

$$f'(0)+f(0)=c \Leftrightarrow c=4.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f'(x)+f(x)=4e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Πολλαπλασιάζοντας αυτήν την ισότητα με e^x παίρνουμε

$$f'(x)e^x+f(x)e^x=4e^{2x} \Leftrightarrow \left(f(x)e^x\right)'=\left(2e^{2x}\right)'$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι $f(x)e^x=2e^{2x}+C$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου C είναι μια νέα σταθερά. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$f(x)=2e^x+ce^{-x},\ x\in\mathbb{R}.$$

Για $x=0$ θα έχουμε $f(0)=2+c \Leftrightarrow c=-2$. Έτσι,

$$\boxed{f(x)=2e^x-2e^{-x}=2\left(e^x-e^{-x}\right),\ x\in\mathbb{R}.}$$

Δ4. Από την υπόθεση έχουμε $f'(x)=\sqrt{16+f^2(x)}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Εφόσον είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της f θα είναι το

$$f(\mathbb{R})\overset{f\nearrow}{=}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R},$$

όπου τα τελευταία όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2\left(e^x-e^{-x}\right)$.

  Υπολογίζουμε το τελευταίο όριο σε δύο μέρη ξεχωριστά. Το πρώτο μέρος είναι απλό: $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x=0$. Για το δεύτερο μέρος, δηλαδή το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{-x}$, εκτελούμε την αντικατάσταση $u=-x$. Καθώς $x\to-\infty$, θα είναι $u\to+\infty$. Το όριο τώρα γράφεται $\lim\limits_{u\to+\infty}2e^u=+\infty$. Έπεται λοιπόν ότι

  $$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}2e^x-\lim_{x\to-\infty}2e^{-x}=0-(+\infty)=-\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\left(e^x-e^{-x}\right)$.

  Υπολογίζουμε και το τελευταίο όριο σε δύο μέρη ξεχωριστά. Το πρώτο μέρος είναι απλό: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. Για το δεύτερο μέρος, δηλαδή για το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}2e^{-x}$, εκτελούμε και πάλι την αντικατάσταση $u=-x$, οπότε θα είναι $u\to-\infty$, καθώς $x\to+\infty$. Το όριο λοιπόν ισούται με $\lim\limits_{u\to-\infty}2e^u$ και έτσι το αρχικό όριο είναι ίσο με

  $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2e^x-\lim_{x\to+\infty}2e^{-x}=+\infty-0=+\infty.$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, θα είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $A_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και ισχύει η ισοδυναμία $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, αυτή η ισοδυναμία γράφεται πιο αναλυτικά ως

$$y=2\left(e^x-e^{-x}\right)\Leftrightarrow e^x-e^{-x}=\frac{y}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x-\frac{1}{e^x}=\frac{y}{2}\Leftrightarrow\frac{e^{2x}-1}{e^x}=\frac{y}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-1=\frac{y}{2}e^x\Leftrightarrow e^{2x}-\frac{y}{2}e^x-1=0.$$

Θέτουμε τώρα $\omega=e^x>0$. Τότε η παραπάνω ισότητα γίνεται $\omega^2-\frac{y}{2}\omega-1=0$. Θεωρούμε το y σταθερά και λύνουμε την εξίσωση ως προς x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\frac{y^2}{4}+4=\frac{y^2+16}{4}>0.$$

Οι δύο λύσεις του τριωνύμου δίνονται τότε ως εξής:

$$\omega_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{\frac{y}{2}\pm\frac{\sqrt{y^2+16}}{2}}{2}=\frac{y\pm\sqrt{y^2+16}}{4}.$$

Παρατηρούμε όμως ότι $y<\sqrt{y^2+16}$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Πράγματι, αν $y\le 0$, τότε η ανισότητα είναι προφανής. Αν $y\ge 0$, η ανισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$y<\sqrt{y^2+16}\Leftrightarrow y^2<y^2+16,$$

το οποίο ισχύει. Επομένως, η λύση $\omega=\frac{y-\sqrt{y^2+16}}{4}$ δεν γίνεται δεκτή, καθώς έτσι θα είχαμε $\omega<0$ που είναι άτοπο, διότι θυμηθείτε ότι $\omega=e^x>0$. Επομένως, θα είναι $\omega=\frac{y+\sqrt{y^2+16}}{4}$ και άρα $e^x=\frac{y+\sqrt{y^2+16}}{4}$ και επομένως $x=\ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2+16}}{4}\right)$. Η αντίστροφη συνάρτηση δίνεται λοιπόν από τον τύπο

$$\boxed{f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right),\ x\in\mathbb{R}.}$$

Δ5. Ισχύει

$$I=\int_0^3 \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right)dx=\int_0^3 f^{-1}(x)dx.$$

Για να υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα, θέτουμε $u=f^{-1}(x)$. Ισχύει τότε

$$u=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(u),$$

επομένως $dx=f'(u)du$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Όταν $x=0$, τότε $u=f^{-1}(0)=\ln\left(\frac{\sqrt{16}}{4}\right)=\ln\left(\frac{4}{4}\right)=\ln 1=0$.
- Όταν $x=3$, τότε $u=f^{-1}(3)=\ln\left(\frac{3+\sqrt{9+16}}{4}\right)=\ln\left(\frac{3+5}{4}\right)=\ln 2.$

Επομένως, το ολοκλήρωμα γράφεται ισοδύναμα ως

$$I=\int_0^{\ln 2} uf'(u)du$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} uf'(u)du&=\left[uf(u)\right]_0^{\ln 2}-\int_0^{\ln 2}(u)'f(u)du\\&=\ln 2 f(\ln 2)-\int_0^{\ln 2} f(u)du=\ln 2 f(\ln 2)-2\int_0^{\ln 2}\left(e^u-e^{-u}\right)du\\&=\ln 2 f(2)-2\left[e^u+e^{-u}\right]_0^{\ln 2}=2\ln 2\left(e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}\right)-2\left(e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}-2\right)\\&=2\ln 4\left(2-\frac{1}{2}\right)-2\left(2+\frac{1}{2}-2\right)\ \boxed{=3\ln 2-1.}\end{aligned}$$