Διαγώνισμα 4.6

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 135.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 161.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 185.

Α4. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Το αντίστροφο είναι σωστό, όμως αυτή η κατεύθυνση δεν ισχύει απαραίτητα. Κλασικό παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=-x^3$, $x\in\mathbb{R}$. Αυτή είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, όμως παρ' όλα αυτά για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=-3x^2$, οπότε $f'(0)=0$.

ii. Η μεταβλητή ολοκλήρωσης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Είναι το ίδιο να γράψουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \text{ ή } \int_\alpha^\beta f(y)dy \text{ ή } \int_\alpha^\beta f(u)du.$$

Για τον ισχυρισμό της πρότασης, δείτε τη σελ. 212 του σχολικού βιβλίου.

iii. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 116.

iv. Το συμπέρασμα θα ήταν σωστό αν μας είχε δοθεί ότι $x_0\in(\alpha,\beta)$, λόγω του θεωρήματος του Fermat. Όπως έχει διατυπωθεί, η πρόταση είναι λανθασμένη. Για παράδειγμα, αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση, δηλαδή η $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) ελάχιστο στο $x_0=0$, όμως παρ' όλα αυτά ισχύει $f'(0)=1\neq 0$.

v. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 214 (θεώρημα 3).

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=(0,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{1}{x}+2x>0,$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Εφόσον είναι συνεχής, το σύνολο τιμών της δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{f\left((0,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=\mathbb{R},}$$

όπου στο τελευταίο βήμα κάναμε τον υπολογισμό των ορίων ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\ln x+x^2-1\right)=2(-\infty)+0-1=-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\ln x+x^2-1\right)=2(+\infty)+(+\infty)-1=+\infty.$

B2. Εφόσον το πεδίο ορισμού είναι το $(0,+\infty)$, έχει νόημα να αναζητήσουμε ασύμπτωτες στο $x_0=0$ και στο $+\infty$. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο ερώτημα, ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Είδαμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$. Αναζητούμε λοιπόν κατακόρυφες ασύμπτωτες. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x}+\frac{x^2}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x}+x-\frac{1}{x}\right).$$

Οι δύο τελευταίοι όροι είναι εύκολοι στον υπολογισμό, οπότε επικεντρωνόμαστε στον πρώτο όρο. Αυτός έχει την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$, οπότε εφαρμόζουμε τον κανόνα De L' Hospital. Προκύπτει έτσι ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x}+x-\frac{1}{x}\right)=0+(+\infty)-0=+\infty,$$

οπότε η C_f δεν έχει ούτε πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

B3. Τα σημεία τομής είναι όλα τα σημεία της μορφής $A(x_0,0)$, όπου x_0 είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=0$. Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα, αυτή η εξίσωση μπορεί να έχει το πολύ μία λύση. Παρατηρούμε ότι $f(1)=2\ln 1+1^2-1=0$, επομένως το $x_0=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης. Το ζητούμενο σημείο τομής είναι λοιπόν το $A(1,0)$. Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f σε αυτό το σημείο, πρέπει να υπολογίσουμε αρχικά την παράγωγο $f'(1)$. Είδαμε στο Ερώτημα Β1 ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}+2x$, οπότε $f'(1)=3$. Η ζητούμενη εφαπτόμενη θα έχει λοιπόν εξίσωση

$$(\varepsilon): y=f'(1)(x-1)+f(1)=3(x-1)+0\boxed{=3x-3.}$$

Β4. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{x^2+x^3}{x+1}=\frac{x^2(x+1)}{x+1}=x^2,$$

οπότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_1^e(2\ln x+x^2-1-x^2)dx=\int_1^e(2\ln x-1)dx$$

$$=2\int_1^e \ln x dx-[x]_1^e=2\int_1^e \ln x dx-(e-1)\quad (1)$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου όρου στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες, όπως κάνουμε πολύ συχνά σε ολοκληρώματα λογαριθμικών συναρτήσεων. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\int_1^e \ln x dx=\int_1^e (x)'\ln x dx=[x\ln x]_1^e-\int_1^e x(\ln x)'dx$$

$$=(e\ln e-\ln 1)-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=e-\int_1^e 1dx$$

$$=e-[x]_1^e=e-(e-1)=1.$$

Προκύπτει λοιπόν από τη σχέση (1) ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$2\int_1^e \ln x dx-(e-1)=2-(e-1)\boxed{=3-e.}$$

Β5. Θεωρώντας τον λογάριθμο των δύο μελών, η δοσμένη ισότητα μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί ως

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=e^{\beta^2-\alpha^2}\Rightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\ln e^{\beta^2-\alpha^2}\Rightarrow 2\ln\frac{\alpha}{\beta}=\beta^2-\alpha^2$$

$$\Rightarrow 2(\ln\alpha-\ln\beta)=\beta^2-\alpha^2\Rightarrow 2\ln\alpha+\alpha^2=2\ln\beta+\beta^2$$

$$\Rightarrow 2\ln\alpha+\alpha^2-1=2\ln\beta+\beta^2-1\Rightarrow f(\alpha)=f(\beta).$$

Η f όμως είναι γνησίως αύξουσα, άρα και «1-1». Επομένως, η τελευταία ισότητα συνεπάγεται ότι $\boxed{\alpha=\beta\text{, όπως θέλαμε.}}$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Από τον τύπο της g προκύπτει άμεσα ότι $g(0)=f(0)=0$. Εφόσον η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\in\mathbb{R}.$$

Υπολογίζουμε καθένα από τα δύο όρια ξεχωριστά.

Για το δεξί όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f(x)-2x}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-2x}{x^2}$$

$$\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-2}{2x}\overset{f'(0)=2}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}f''(0),$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f(0)=0$ και εφαρμόσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$ και στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου για τη συνάρτηση f' στο σημείο $x_0=0$. Γνωρίζουμε εξ υποθέσεως ότι η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$, οπότε αυτό μας επιτρέπει τη χρήση του ορισμού της παραγώγου.

Για το αριστερό όριο έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-\frac{3x}{2}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{3}{2}\right)$$

$$\overset{f(0)=0}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-\frac{3}{2}\right)=f'(0)-\frac{3}{2}=\frac{1}{2},$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου για τη συνάρτηση f στο σημείο $x_0=0$.

Από την ισότητα των δύο ορίων έπεται ότι $\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}$, οπότε $\boxed{f''(0)=1.}$

Γ2. i. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}-1 \text{ για } x\neq 0.$$

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι η συνάρτηση είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(0,+\infty)$ και $(-\infty,0)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{0\}$ και για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$h'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}-1\right)'=\frac{xf'(x)-(x)'f(x)}{x^2}-\frac{x(e^x)'-(x)'e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\frac{xe^x-e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}-\frac{(x-1)e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}.$$

Από τη δοσμένη σχέση γνωρίζουμε ότι

$$xf'(x)-f(x)=(x-1)e^x+1$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, απ' όπου προκύπτει ότι $h'(x)=0$ για κάθε $x\neq 0$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η h είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, όχι όμως απαραίτητα σταθερή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}-\{0\}$.

Η αντίστοιχη συνέπεια του Θ.Μ.Τ ισχύει μόνο για διαστήματα. Δείτε τη σελ. 133 του σχολικού βιβλίου.

Ας υποθέσουμε ότι $h(x)=c_1$ για $x<0$ και $h(x)=c_2$ για $x>0$, όπου c_1,c_2 είναι σταθερές. Ισχύει τότε $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=c_1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=c_2$. Όμως από τον τύπο της h προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0^-}h(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)}{x}-\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}-1\right)\overset{f(0)=0}{=}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-\frac{e^x-1}{x}-1\right).\quad (2)$$

Ο πρώτος όρος στο παραπάνω όριο ισούται με $f'(0)$ από τον ορισμό της παραγώγου. Για το δεύτερο όρο μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου, αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον κανόνα De L' Hospital, εφόσον αυτός ο όρος έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Ο κανόνας De L' Hospital δίνει

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{1}=1,$$

άρα πλέον από τη σχέση (2) προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0^-}h(x)=f'(0)-1-1=f'(0)-2=0,$$

διότι γνωρίζουμε ότι $f'(0)=2$. Παραπάνω όμως είδαμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=c_1$, οπότε συμπεραίνουμε ότι τελικά $c_1=0$. Με μία εντελώς όμοια διαδικασία, αυτήν τη φορά για το δεξί όριο, μπορούμε να δείξουμε ότι $c_2=0$. Προκύπτει λοιπόν ότι $h(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, το οποίο ισοδύναμα μας δίνει ότι

$$\boxed{\frac{f(x)}{x}=\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}+1 \quad \text{για κάθε } x\neq 0, \text{ όπως θέλαμε.}}$$

ii. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας του Ερωτήματος Γ2i με το x προκύπτει ότι $f(x)=e^x+x-1$ για κάθε $x\neq 0$. Γνωρίζουμε όμως ότι $f(0)=0$, και ταυτόχρονα $e^0+0-1=0$, οπότε οι τύποι των δύο συναρτήσεων συμφωνούν και για $x=0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\boxed{f(x)=e^x+x-1 \quad \text{για κάθε } x\neq 0.}$$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=\left(e^x+x-1\right)'=e^x+1$. Είναι προφανές ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι λοιπόν και «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f. Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας, αυτό δίνεται από τον τύπο

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right).$$

Υπολογίζουμε τα δύο όρια ξεχωριστά:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x-1\right)=0+(-\infty)-1=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x-1\right)=(+\infty)+(+\infty)-1=+\infty.$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

Γ4. Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty$. Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα όπως και η f, άρα το σύνολο τιμών της δίνεται από τη σχέση

$$f^{-1}(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x), \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)\right). \quad (3)$$

Γνωρίζουμε όμως από την άλλη ότι το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι ίσο με το πεδίο ορισμού της f, όπως ισχύει με κάθε ζεύγος αντίστροφων συναρτήσεων. Με άλλα λόγια, το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι ίσο με το $\mathbb{R}$. Έπεται λοιπόν από την (3) ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty \text{, όπως θέλαμε.}$$

Στο ζητούμενο όριο θέτουμε $u=f^{-1}(x)$. Θα ισχύει τότε $x=f(u)$. Επίσης, όπως δείξαμε ακριβώς παραπάνω, ισχύει $u\to+\infty$, καθώς $x\to+\infty$. Επομένως, το όριο γράφεται

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+f^{-1}(x)}{x-1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)+u}{f(u)-1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u+2u-1}{e^u+u-2}$$

$$\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u+2}{e^u+1}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{e^u}=1,$$

όπου στο τρίτο και στο τέταρτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Αρχικά παρατηρούμε ότι, αφού η ευθεία $y=2x$ είναι εφαπτόμενη της C_f στο $O(0,0)$, θα ισχύει $f(0)=0$ και $f'(0)=2$. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα περιέχει την $f(x)$ και στην υπόθεση μας έχει δοθεί ένα ολοκλήρωμα που περιέχει την $f''(x)$. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν ολοκλήρωση κατά παράγοντες με σκοπό να εμφανίσουμε μέσα στο ολοκλήρωμα την f'' και να χρησιμοποιήσουμε τη δοσμένη υπόθεση. Ισχύει λοιπόν

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x-2)'f(x)dx=\left[(x-2)f(x)\right]_0^2-\int_0^2 (x-2)f'(x)dx$$

$$=-(-2)\cdot f(0)-\int_0^2\left(\frac{(x-2)^2}{2}\right)'f'(x)dx$$

$$\overset{f(0)=0}{=}-\left[\frac{(x-2)^2}{2}f'(x)\right]_0^2+\int_0^2\frac{(x-2)^2}{2}f''(x)dx$$

$$=-0+\frac{(-2)^2}{2}f'(0)-3\overset{f'(0)=2}{=}1,$$

όπου στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση

$$\int_0^2 (x-2)^2 f''(x)dx=-6.$$

Δ2. Έστω $g(x)=f(x)\ln(x-1)+e^{2-x}-3+x$ για $x\in(1,+\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $g(x)\leq 0$ για κάθε $x>1$. Ισχύει όμως

$$g(2)=f(2)\ln 1+e^{2-2}-3+2=0,$$

άρα η g παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) μέγιστο στη θέση $x=2$. Εφόσον είναι παραγωγίσιμη και το $x=2$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, έπεται ότι $g'(2)=0$. Για κάθε $x>1$ είναι

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(f(x)\ln(x-1)+e^{2-x}-3+x\right)' \\ &= f'(x)\ln(x-1)+f(x)\cdot\frac{1}{x-1}+e^{2-x}\cdot(2-x)'+1 \\ &= f'(x)\ln(x-1)+\frac{f(x)}{x-1}-e^{2-x}+1, \end{aligned}$$

άρα

$$g'(2)=f'(2)\ln 1+\frac{f(2)}{2-1}-e^{0}+1=f(2)$$

Εφόσον $g'(2)=0$, έπεται ότι $\boxed{f(2)=0\text{, όπως θέλαμε.}}$

Δ3. Εφόσον $f(1)\neq \eta\mu f(1)$, είναι καταρχάς ξεκάθαρο ότι $f(1)\neq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $f(1)<0$. Τότε, για τη συνάρτηση g του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} g(x) &= \lim_{x\to 1^+}\left(f(x)\ln(x-1)+e^{2-x}-3+x\right) \\ &= f(1)\cdot(-\infty)+e-3+1=+\infty, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προέκυψε λόγω της συνέχειας της f στο σημείο $x_0=1$ και η τελευταία ισότητα προέκυψε από το γεγονός ότι $f(1)<0$. Εφόσον $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=+\infty$, έπεται ότι $g(x)>0$ για x κοντά στο $x_0=1$ (και δεξιά από αυτό). Αυτό όμως είναι άτοπο, καθώς από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $g(x)\leq 0$ για κάθε $x>1$. Εφόσον καταλήξαμε σε άτοπο, συμπεραίνουμε ότι τελικά $f(1)>0$.

Δ4. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα εν προκειμένω ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[0,1]$ και $[1,2]$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο $[0,1]$ παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_1\in(0,1)\subseteq(0,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)>0,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. στο $[1,2]$, παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_2\in(1,2)\subseteq(0,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\overset{f(2)=0}{=}-f(1)<0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\boxed{f'(\xi_1)f'(\xi_2)<0\text{, όπως θέλαμε.}}$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και ότι η f'' είναι συνεχής. Επομένως, θα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη, άρα ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$. Σημειώνουμε ότι $\xi_1<\xi_2$, καθώς είδαμε ότι $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(1,2)$. Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. σε αυτό το διάστημα, παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}=\frac{-f(1)-f(1)}{\xi_2-\xi_1}=-\frac{2f(1)}{\xi_2-\xi_1}<0.$$

Εφόσον η f'' διατηρεί πρόσημο, έπεται ότι $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ5. i. Η f' είναι συνεχής διότι είναι παραγωγίσιμη. Μπορούμε επομένως να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$, μια και γνωρίζουμε ότι $f'(\xi_1)f'(\xi_2)<0$. Προκύπτει λοιπόν ότι η f' έχει μια ρίζα ρ στο διάστημα (ξ_1,ξ_2). Λόγω του ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Παραγωγίζουμε τώρα τα δύο μέλη της ισότητας $f(x)=f(2-x)$ και παίρνουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=f'(2-x)(2-x)'=-f'(2-x).$$

Για $x=\rho$ προκύπτει ότι $0=f'(\rho)=-f'(2-\rho)$, δηλαδή $f'(2-\rho)=0$. Εξηγήσαμε όμως ότι το ρ είναι η μοναδική ρίζα της f, άρα θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $2-\rho=\rho$, δηλαδή $\rho=1$. Συμπεραίνουμε ότι τελικά η μοναδική ρίζα της f' είναι η $\rho=1$, άρα αυτό είναι και το μοναδικό κρίσιμο της f. Άλλου είδους κρίσιμα σημεία δεν υπάρχουν, διότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Όσον αφορά τη μονοτονία της f, αυτή εξαρτάται από το πρόσημο της f'. Είδαμε όμως ότι $f'(1)=0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f \nearrow (-\infty,1]$ και $f \searrow [1,+\infty)$.

ii. Είδαμε ότι η μοναδική ρίζα της f' είναι η $x=1$, οπότε η δοσμένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$f\left(e^x+x\right)+\int_0^2 f(t)dt-f(1)=1 \Leftrightarrow f\left(e^x+x\right)+1-f(1)=1$$

$$\Leftrightarrow f\left(e^x+x\right)=f(1),$$

όπου στην πρώτη ισοδυναμία χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος, δηλαδή ότι $\int_0^2 f(t)dt=1$. Στο Ερώτημα i είδαμε ότι $f \nearrow (-\infty,1]$ και $f \searrow [1,+\infty)$, οπότε η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x=1$, και μάλιστα, λόγω της μονοτονίας, η θέση $x=1$ είναι η μοναδική στην οποία η f λαμβάνει την τιμή $f(1)$. Επομένως, η εξίσωση $f\left(e^x+x\right)=f(1)$, στην οποία έχουμε καταλήξει παραπάνω, είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$e^x+x=1 \Leftrightarrow e^x+x-1=0.$$

Για να λύσουμε αυτήν την εξίσωση, μπορούμε να θεωρήσουμε $g(x)=e^x+x-1$ για $x\in\mathbb{R}$ και να αποδείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. Εφόσον $g(0)=0$, η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$. Παραλείπουμε τις λεπτομέρειες της λύσης, καθώς η g είναι ακριβώς η συνάρτηση f στο ΘΕΜΑ Γ, στο οποίο την έχουμε ήδη μελετήσει αναλυτικά ως προς τη μονοτονία. Παραπέμπουμε λοιπόν εκεί για τις λεπτομέρειες.