Διαγώνισμα 4.7

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 144.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 185.

Α3. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Σ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Για το πεδίο ορισμού της f, θα πρέπει $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ και άρα $D_f=(-1,+\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1},\ x>-1.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων με

$$f''(x)=e^x+\frac{1}{(x+1)^2},\ x>-1.$$

Επειδή για κάθε $x>-1$ ισχύει $e^x>0$ και $1/(x+1)^2>0$, προκύπτει ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$, άρα η f είναι κυρτή στο D_f.

Β2. Αφού η f είναι κυρτή στο $(-1,+\infty)$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f'(0)=e^0-\frac{1}{0+1}=1-1=0$ και αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα $x=0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$.

- Αν $-1<x<0$, τότε, αφού $f'\nearrow(-1,+\infty)$, προκύπτει ότι $f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<0$.
- Αν $x>0$, τότε, αφού $f'\nearrow(-1,+\infty)$, προκύπτει ότι $f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0$.

Τα παραπάνω συνοψίζονται και στον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=e^0-\ln 1-2=-1$. Πράγματι, αν $-1<x\le 0$, τότε $f(x)\ge f(0)$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$, ενώ, αν $x\ge 0$, τότε $f(x)\ge f(0)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε $x\in(-1,+\infty)$, ισχύει ότι

$$f(x)\ge f(-1).$$

B3. Έστω $\Delta_1=(-1,0]$ και $\Delta_2=(0,+\infty)$. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_1, θα ισχύει

$$f(\Delta_1)=\left[f(0),\lim_{x\to -1^+}f(x)\right)=[-1,+\infty),$$

όπου το όριο

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(e^x-\ln(x+1)-2\right)$$

στο τελευταίο βήμα υπολογίστηκε ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to -1^+}\left(e^x-2\right)=e^{-1}-2.$
- Για τον όρο $\lim\limits_{x\to -1^+}-\ln(x+1)$ θέτουμε $u=x+1$. Θα ισχύει τότε $u\to 0^+$, καθώς $x\to -1^+$, άρα αυτό το όριο γράφεται ως $\lim\limits_{u\to 0^+}-\ln u=+\infty$.

Προσθέτοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=+\infty$, όπως ισχυριστήκαμε παραπάνω.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_2, θα ισχύει

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x),\lim_{x\to +\infty}f(x)\right)=(-1,+\infty),$$

όπου τα όρια στο τελευταίο βήμα υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=-1$

  όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της f στο $x=0$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}e^x\left(1-\dfrac{\ln(x+1)}{e^x}-\dfrac{2}{e^x}\right)$

  Ο δεύτερος όρος έχει την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$, οπότε χρησιμοποιούμε τον κανόνα De L' Hospital:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)}{e^x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{e^x}\right)=0\cdot 0=0.$$

Για τον τρίτο όρο ισχύει προφανώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$. Το όριο ξαναγράφεται λοιπόν ως

$$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{e^x}-\frac{2}{e^x}\right)=(+\infty)(1-0-0)=+\infty,\text{ όπως θέλαμε.}$$

Προκύπτει τελικά ότι το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(D_f)=[-1,+\infty)\cup(-1,+\infty)=[-1,+\infty).$$

Η εξίσωση $e^x=\ln(x+1)+2026$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} e^x=\ln(x+1)+2026 &\Leftrightarrow e^x-\ln(x+1)-2=2024\\ &\Leftrightarrow f(x)=2024. \end{aligned}$$

Ισχύει ότι:

- $2024\in f(\Delta_1)$, άρα υπάρχει $x_1\in(-1,0]$ για το οποίο ισχύει ότι $f(x_1)=2024$. Το x_1 είναι το μοναδικό στο Δ_1 με αυτήν την ιδιότητα, επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1. Επιπλέον, $x_1\neq 0$, αφού
$$f(0)=-1\neq 2024.$$
- $2024\in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει $x_2\in(0,+\infty)$ για το οποίο ισχύει ότι $f(x_2)=2024$. Το x_2 είναι το μοναδικό στο Δ_2 με αυτήν την ιδιότητα, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2.

B4. Είδαμε στο Ερώτημα Β2 ότι $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$, οπότε η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Είδαμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Θα αναζητήσουμε αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}-\frac{2}{x}\right)=+\infty,$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τα εξής:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$,

  όπου στο πρώτο βήμα κάναμε χρήση του κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1}=+\infty$,

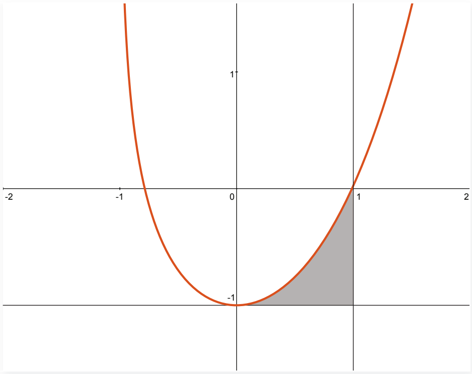
  όπου και πάλι στο πρώτο βήμα κάναμε χρήση του κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

Άρα η C_f δεν έχει ούτε οριζόντια, ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B5. Από τα αποτελέσματα των προηγούμενων ερωτημάτων προκύπτει ότι για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ ισχύει

$$f(x)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x)\geq -1\Leftrightarrow f(x)+1\geq 0,$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται το εν λόγω γραμμοσκιασμένο σκιασμένο χωρίο Ω. Έτσι, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με



$$\mathrm{E}(\Omega)=\int_0^1|f(x)-(-1)|dx\overset{f(x)+1\geq 0}{=}\int_0^1(f(x)+1)dx$$

$$=\int_0^1(e^x-\ln(x+1)-1)dx=\left[e^x\right]_0^1-\int_0^1\ln(x+1)dx-[x]_0^1$$

$$=e-1-\int_0^1\ln(x+1)dx-1.$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_0^1\ln(x+1)dx=\int_0^1(x+1)'\ln(x+1)dx$$

$$=\left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx$$

$$=2\ln 2-[x]_0^1=2\ln 2-1.$$

Επομένως, $\mathrm{E}(\Omega)=e-1-(2\ln 2-1)-1=e-1-2\ln 2$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-xe^{2x}$. Τότε, από υπόθεση έχουμε ότι $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(0)=f(0)-0=0$ και άρα $g(x)\geq g(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων σε όλο το $\mathbb{R}$ με
$$g'(x)=f'(x)-e^{2x}-2xe^{2x}$$
- Η g παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=0$ που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Από το Θεώρημα Fermat προκύπτει ότι

$$g'(0)=0\Leftrightarrow f'(0)-1=0\ \boxed{\Leftrightarrow f'(0)=1.}$$

Γ2. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\int_0^1 f^2(x)-2xf(x)e^{2x}+x^2e^{4x}dx=0\Leftrightarrow\int_0^1\left(f(x)-xe^{2x}\right)^2dx=0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1 g^2(x)\,dx=0,$$

όπου $g(x)=f(x)-xe^{2x}$. Ισχύει ότι $g^2(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και g^2 συνεχής στο $[0,1]$. Αν υπήρχε $x_0\in[0,1]$ για το οποίο $g(x_0)>0$, τότε θα ίσχυε ότι $g^2(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και η g^2 δεν θα ήταν παντού μηδέν στο $[0,1]$. Επομένως θα είχαμε ότι $\int_0^1 g^2(x)dx>0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού είδαμε προηγουμένως ότι $\int_0^1 g^2(x)dx=0$.

Άρα θα πρέπει τελικά να ισχύει ότι $g^2(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$, επομένως και $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Ισοδύναμα,

$$\boxed{f(x)-xe^{2x}=0\Leftrightarrow f(x)=xe^{2x}\ \text{ για κάθε } x\in[0,1].}$$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=e^{2x}(1+2x).$$

Επομένως, για το πρόσημο της f' ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)>0\overset{e^{2x}>0}{\Leftrightarrow}1+2x>0\ \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύουν οι ισοδυναμίες $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<-1/2$ και $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1/2$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=-1/2$ το

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-1}=-\frac{1}{2e}.$$

Πράγματι, αν $x\leq -\frac{1}{2}$, τότε $f(x)\geq f\left(-\frac{1}{2}\right)$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$, ενώ, αν $x\geq -\frac{1}{2}$, τότε $f(x)\geq f\left(-\frac{1}{2}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\geq f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x)=2e^{2x}+2(1+2x)e^{2x}=2e^{2x}(1+1+2x)=2e^{2x}(2+2x)=4e^{2x}(1+x).$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$f''(x)>0 \overset{e^{2x}>0}{\Leftrightarrow} 1+x>0 \Leftrightarrow x>-1.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο προκύπτουν οι ισοδυναμίες $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<-1$ και $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

- Η f είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,-1]$.
- Η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής στη θέση $x_1=-1$. Ισχύει $f(-1)=-e^{-2}=-\frac{1}{e^2}$, άρα

το σημείο καμπής είναι το $\left(-1,-\frac{1}{e^2}\right)$.

Γ4. **i.** Η F είναι αρχική της f, άρα είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $F'(x)=f(x)$. Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$f(\xi)=\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow f(\xi)=\int_0^1 F'(x)dx \Leftrightarrow f(\xi)=F(1)-F(0).$$

Θα επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. για την F στο διάστημα $[0,1]$.

- Η F είναι συνεχής στο $[0,1]$ διότι είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ για τον ίδιο λόγο.

Από το Θ.Μ.Τ. έπεται ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$, ώστε

$$f(\xi)=F'(\xi)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}=F(1)-F(0), \text{ όπως θέλαμε.}$$

ii. Η f είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$, επομένως η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται για $x\geq-1$ «πάνω» από την εφαπτομένη της στο σημείο $A\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Αυτό το γεγονός γράφεται με μαθηματικούς όρους ως

$$f(x)\geq f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right),$$

για κάθε $x\geq-1$. Επειδή το μοναδικό σημείο του $[-1,+\infty)$ στο οποίο ισχύει η ισότητα είναι το $x=\frac{1}{2}$, προκύπτει για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ότι:

$$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\left(f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left[\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2\right]_0^1+f\left(\tfrac{1}{2}\right)[x]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\right)+f\left(\tfrac{1}{4}\right)\text{ ή }(1-0)=f\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Για το σημείο ξ γνωρίζουμε όμως ότι $f(\xi)=\int_0^1 f(x)dx$, άρα η παραπάνω σχέση μάς δίνει ότι $f(\xi)>f\left(\frac{1}{2}\right)$. Η f όμως είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, όπως έχουμε δείξει στο Ερώτημα Γ3, οπότε από την τελευταία ανισότητα προκύπτει ότι $\xi>\frac{1}{2}$, όπως θέλαμε.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 g(x)dx$ είναι απλώς ένας σταθερός αριθμός, ο οποίος δεν εξαρτάται από το t. Μπορούμε επομένως να τον βγάλουμε εκτός του ολοκληρώματος ως προς t μέσα στο οποίο βρίσκεται. Η δοσμένη ισότητα λοιπόν γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$g(x)=\frac{3}{4}x^2\int_0^1 g(x)dx+\frac{9}{16}\int_0^1\left(\int_0^1 g(x)dx\right)g(t)dt$$

$$=\frac{3}{4}x^2\int_0^1 g(x)dx+\frac{9}{16}\int_0^1 g(x)dx\int_0^1 g(t)dt.$$

Θέτουμε $\alpha=\int_0^1 g(x)dx\in\mathbb{R}$. Προκύπτει τότε από την παραπάνω ισότητα ότι

$$g(x)=\frac{3}{4}\alpha x^2+\frac{9}{16}\alpha^2.$$

Έπεται λοιπόν ότι

$$\alpha=\int_0^1 g(x)dx=\frac{\alpha}{4}\left[x^3\right]_0^1+\frac{9}{16}\alpha^2\left[x\right]_0^1=\frac{\alpha}{4}+\frac{9}{16}\alpha^2.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην εξίσωση

$$\alpha=\frac{\alpha}{4}+\frac{9}{16}\alpha^2\overset{\cdot 16}{\Leftrightarrow}12\alpha=9\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 12\alpha-9\alpha^2=0\Leftrightarrow 3\alpha(4-3\alpha)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } 4-3\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \alpha=\frac{4}{3}.$$

Αν $\alpha=0$, τότε $g(x)=\frac{3}{4}\cdot 0\cdot x^2+\frac{9}{16}\cdot 0^2=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το οποίο είναι άτοπο, αφού στην εκφώνηση μας έχει δοθεί ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως, προκύπτει ότι $\alpha=\frac{4}{3}$ και έτσι

$$\boxed{g(x)=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^2+\frac{9}{16}\cdot\frac{16}{9}=x^2+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.}$$

Δ2. Είναι $f(\varepsilon\varphi x)=\dfrac{1}{g(\varepsilon\varphi x)}=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2 x+1}$ και επομένως έχουμε

$$f(\varepsilon\varphi x)=\frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x+1}\Leftrightarrow(\varepsilon\varphi^2 x+1)f(\varepsilon\varphi x)=1\Leftrightarrow\left[F(\varepsilon\varphi x)\right]'=(x)'.$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι υπάρχει $c\in\mathbb{R}$, ώστε $F(\varepsilon\varphi x)=x+c$ για κάθε $x>0$. Για $x=0$ λαμβάνουμε ότι $F(\varepsilon\varphi 0)=0+c\Leftrightarrow c=0$ και άρα $F(\varepsilon\varphi x)=x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Επομένως, για $x=\pi/4$ θα έχουμε $F\left(\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow F(1)=\frac{\pi}{4}$. Προκύπτει λοιπόν ότι

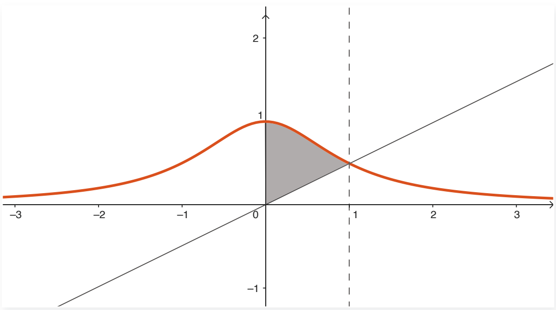
$$\boxed{\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=F(1)-F(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4},\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

Δ3. Ο άξονας $y'y$ είναι φυσικά η κατακόρυφη ευθεία $x=0$. Θα βρούμε αρχικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\frac{1}{2}x$, καθώς και τη σχετική θέση των δύο. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)\geq\frac{x}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+1}\geq\frac{x}{2}\overset{x^2+1>0}{\Leftrightarrow}2\geq x^3+x\Leftrightarrow x^3+x-2\leq 0.\quad(1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x^3+x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η (1) τότε γράφεται ισοδύναμα ως

$$h(x)\leq 0\Leftrightarrow h(x)\leq h(1)\overset{h\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}x\leq 1.$$



Έπεται ότι το σημείο τομής της C_f με την ευθεία $y=\frac{1}{2}x$ είναι το $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ και ότι η C_f βρίσκεται «πάνω» από αυτήν την ευθεία για $x\leq 1$. Το διπλανό σχήμα απεικονίζει όλες αυτές τις πληροφορίες. Εφόσον $f(x)\geq x/2$ στο $[0,1]$, το ζητούμενο εμβαδόν, εκφρασμένο σε τετραγωνικές μονάδες, είναι ίσο με

$$E(\Omega)=\int_0^1\left|f(x)-\frac{x}{2}\right|dx=\int_0^1\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^1 f(x)dx-\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\boxed{=\frac{\pi-1}{4}.}$$

Δ4. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Για $x \geq 0$ ισχύει $f'(x) \leq 0$ και η ισότητα στην τελευταία ανισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Η f είναι συνεχής στη θέση $x = 0$, οπότε συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Σαφώς αυτό σημαίνει ότι είναι γνησίως φθίνουσα και στο $[0,1] \subseteq [0,+\infty)$. Έτσι, για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε ότι:

$$\boxed{0 \leq x \leq 1 \overset{f \searrow [0,1]}{\Leftrightarrow} f(0) \geq f(x) \geq f(1),}$$

όπως θέλαμε. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$T(x) = \int_0^1 e^{t^2} f(t)\,dt - f(x)\int_0^1 e^{t^2}\,dt$$

για $x \in [0,1]$. Επειδή οι συναρτήσεις e^{t^2} και $f(t)$ είναι συνεχείς, η συνάρτηση $e^{t^2} f(t)$ είναι επίσης συνεχής και έτσι τα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 e^{t^2} f(t)\,dt, \quad \int_0^1 e^{t^2}\,dt$$

ορίζονται και είναι πραγματικοί αριθμοί. Η T είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης έχουμε

Τα δύο ολοκληρώματα είναι απλώς πραγματικοί αριθμοί, άρα η συνάρτηση έχει τη μορφή α-β f(x).

$$T(1) = \int_0^1 e^{t^2} f(t)\,dt - f(1)\int_0^1 e^{t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 e^{t^2} f(t)\,dt - \int_0^1 f(1) e^{t^2}\,dt = \int_0^1 e^{t^2}\left(f(t) - f(1)\right)dt$$

και

$$T(0) = \int_0^1 e^{t^2} f(t)\,dt - f(0)\int_0^1 e^{t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 e^{t^2} f(t)\,dt - \int_0^1 f(0) e^{t^2}\,dt = \int_0^1 e^{t^2}\left(f(t) - f(0)\right)dt.$$

Από την $f(0) \geq f(t) \geq f(1)$, και εφόσον $e^{t^2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ισοδύναμα ότι

$$e^{t^2} f(0) \geq e^{t^2} f(t) \geq e^{t^2} f(1) \quad (2)$$

για κάθε $t\in[0,1]$. Επομένως, είναι

$$e^{t^2}f(t)\geq e^{t^2}f(1)\Rightarrow e^{t^2}\left(f(t)-f(1)\right)\geq 0$$

για κάθε $t\in[0,1]$. Όμως, η συνάρτηση $e^{t^2}\left(f(t)-f(1)\right)$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$ γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Για την ακρίβεια, το μοναδικό σημείο στο οποίο μηδενίζεται είναι το $t=1$. Συνεπώς, το ολοκλήρωμά της θα είναι αυστηρά θετικό, δηλαδή

$$\int_0^1 e^{t^2}\left(f(t)-f(1)\right)dt>0\Rightarrow T(1)>0. \quad (3)$$

Με όμοιο τρόπο, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι είναι $e^{t^2}f(t)\leq e^{t^2}f(0)$, άρα $e^{t^2}\left(f(t)-f(0)\right)\leq 0$. Όμοια με πριν, η συνάρτηση $e^{t^2}\left(f(t)-f(0)\right)$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$ γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Άρα το ολοκλήρωμά της είναι γνησίως αρνητικό, δηλαδή

$$\int_0^1 e^{t^2}\left(f(t)-f(1)\right)dt<0\Rightarrow T(1)<0. \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει ότι $T(0)\cdot T(1)<0$, άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(0,1)$, ώστε

$$T(\xi)=0\Leftrightarrow \int_0^1 e^{t^2}f(t)dt-f(\xi)\int_0^1 e^{t^2}dt=0,$$

όπως θέλαμε. Επιπλέον, η T είναι παραγωγίσιμη διότι και η f είναι παραγωγίσιμη. Για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει

$$T'(x)=-f'(x)\int_0^1 e^{t^2}dt.$$

Για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $f'(x)\leq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Επίσης, για κάθε $t\in[0,1]$ ισχύει $e^{t^2}>0$, άρα $\int_0^1 e^{t^2}dt>0$. Από αυτές τις δύο ανισότητες συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει $T'(x)\geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Εφόσον η T είναι συνεχής στη θέση $x=0$, προκύπτει λοιπόν ότι η T είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το $[0,1]$. Συνεπώς, η ρίζα ξ της συνάρτησης T, την οποία βρήκαμε παραπάνω, είναι μοναδική.

Δ5. Για το ολοκλήρωμα $\int_{1/2}^1 3x^2f^{-1}(x)dx$ θέτουμε $y=f^{-1}(x)$. Ισχύει τότε $x=f(y)$, οπότε $dx=f'(y)dy$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x=1$ έχουμε $f(y)=1 \Leftrightarrow f(y)=f(0) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} y=0$.
- Για $x=\frac{1}{2}$ έχουμε $f(y)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(y)=f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} y=1$.

Έτσι, αυτό το ολοκλήρωμα γράφεται ως

$$\int_{1/2}^{1} 3x^2 f^{-1}(x)dx = \int_{1}^{0} 3yf^2(y)f'(y)dy.$$

Φυσικά, στο δεξιό ολοκλήρωμα μπορούμε να αλλάξουμε πάλι τη μεταβλητή ολοκλήρωσης από y σε x. Επομένως, το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης γράφεται ως

$$\int_0^1 f^3(x)dx - \int_{1/2}^{1} 3x^2 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 f^3(x)dx + \int_0^1 3xf^2(x)f'(x)dx$$

$$= \int_0^1 (x)' f^3(x) + x\cdot\left(f^3(x)\right)' dx = \int_0^1 \left(xf^3(x)\right)' dx$$

$$= \left[xf^3(x)\right]_0^1 = f^3(1) - 0\cdot f^3(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \boxed{=\frac{1}{8}.}$$