Διαγώνισμα 4.8

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 216-217.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 143.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 155.

Α4. Σχολικό βιβλίο, σελ. 156.

Α5. **i)** Σ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Σ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f=\mathbb{R}$, καθώς $x^2+9\geq 9>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{(6x)'(x^2+9)-6x(x^2+9)'}{(x^2+9)^2}=\frac{6(x^2+9)-6x\cdot 2x}{(x^2+9)^2}$$

$$=\frac{6x^2+54-12x^2}{(x^2+9)^2}=\frac{54-6x^2}{(x^2+9)^2}=\frac{6(9-x^2)}{(x^2+9)^2}.$$

Ισχύει τώρα ότι η ισοδυναμία

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{6(9-x^2)}{(x^2+9)^2}>0\overset{x^2+9>0}{\Leftrightarrow}9-x^2>0$$

$$\Leftrightarrow x^2<9\Leftrightarrow|x|<3\Leftrightarrow -3<x<3.$$

Ομοίως μπορούμε να δείξουμε ότι $f'(x)<0$ για $x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$, ενώ οι ρίζες της παραγώγου είναι οι $x=\pm 3$. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		-3		$+3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[-3,3]$ και γνησίως φθίνουσα στα υποδιαστήματα $\Delta_1=(-\infty,-3)$ και $\Delta_3(3,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_1=-3$ με $f(-3)=-1$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x_2=3$ με $f(3)=1$.

B2. Βρίσκουμε την εικόνα καθενός από τα υποδιαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ μέσω της f.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, άρα

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to-3^-} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right)=(-1,0),$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τα όρια

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{x^2+9}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x}=0,$$

και

$$\lim_{x\to-3^-} f(x)=f(-3)=-\frac{18}{18}=-1.$$

Στο πρώτο βήμα της τελευταίας ισότητας χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f είναι συνεχής στη θέση $x=3$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2, άρα

$$f(\Delta_2)=[f(-3),f(3)]=[-1,1],$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τις ισότητες $f(-3)=-1,\ f(3)=1$.

- Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_3, άρα

$$f(\Delta_3)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to3^+} f(x)\right)=(0,1),$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x}=0$$

και $\lim_{x\to3^+} f(x)=f(3)=1$. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη συνέχεια της f.

Έτσι, τελικά προκύπτει ότι $\boxed{f(\mathbb{R})=(-1,0)\cup[-1,1]\cup(0,1)=[-1,1].}$

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x)=6\left(\frac{(9-x^2)}{(x^2+9)^2}\right)'=6\frac{-2x(x^2+9)^2-(9-x^2)\cdot 2(x^2+9)\cdot 2x}{(x^2+9)^4}$$

$$=6\frac{(x^2+9)\left(-2x(x^2+9)-4x(9-x^2)\right)}{(x^2+9)^4}$$

$$=6\frac{-2x^3-18x-36x+4x^3}{(x^2+9)^3}=6\frac{2x^3-54x}{(x^2+9)^3}$$

$$=12\frac{x^3-27x}{(x^2+9)^3}=\frac{12x(x^2-27)}{(x^2+9)^3}.$$

Βρίσκουμε τα σημεία μηδενισμού της δεύτερης παραγώγου:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 12x(x^2-27)=0\ \Leftrightarrow x=0\ \text{ ή }\ x=\pm\sqrt{27}=\pm 3\sqrt{3}.$$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$		$-3\sqrt{3}$		0		$3\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-27		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$		$\frown$		$\smile$	

- Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-3\sqrt{3}\right]$ και $\left[0,3\sqrt{3}\right]$ και κυρτή στα διαστήματα $\left[-3\sqrt{3},0\right]$ και $\left[3\sqrt{3},+\infty\right)$.
- Τα σημεία $A\left(-3\sqrt{3},f\left(-3\sqrt{3}\right)\right)$, $B\left(0,f(0)\right)$, $\Gamma\left(3\sqrt{3},f\left(3\sqrt{3}\right)\right)$ είναι τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης C_f.

B4. Το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο $D_g = \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}$
Όμως ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{x^2+9} = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Επομένως, το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$g(x) = \frac{12}{\frac{6x}{x^2+9}} = \frac{12(x^2+9)}{6x} = \frac{2(x^2+9)}{x}.$$

Αναζητούμε αρχικά τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f. Το μοναδικό υποψήφιο σημείο για την κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι το $x = 0$. Είναι

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2+9) \cdot \frac{2}{x} = +\infty,$$

επομένως η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

Στη συνέχεια, αναζητούμε πλάγια-οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2 \cdot \frac{x^2+9}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty,$$

άρα δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Εξετάζουμε στη συνέχεια αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη. Ισχύει

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \frac{x^2+9}{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+18}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 := \lambda.$$

Επίσης,

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x) - \lambda x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2 \cdot \frac{x^2+9}{x} - 2x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+18-2x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{18}{x} = 0 := \beta.$$

Έπεται ότι η ευθεία $y = 2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. Με εντελώς όμοιο τρόπο, προκύπτει ότι η ευθεία $y = 2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$.

Β5. Ισχύει

$$A=\int_{-1}^{1}\frac{6x}{x^2+9}dx=3\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+9}dx=3\int_{-1}^{1}\frac{(x^2+9)'}{x^2+9}dx=3\left[\ln(x^2+9)\right]_{-1}^{1}$$

$$\boxed{=3[\ln 10-\ln 10]=0.}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα ισούται με

$$B=\int_{1}^{3}\frac{6}{xf(x)}dx=\int_{1}^{3}\frac{6}{x\cdot\frac{6x}{x^2+9}}dx=\int_{1}^{3}\frac{x^2+9}{x^2}dx=\int_{1}^{3}\left(1+\frac{9}{x^2}\right)dx=\left[x-\frac{9}{x}\right]_{1}^{3}$$

$$\boxed{=3-3-(1-9)=8.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Αρχικά παρατηρούμε ότι $f(1)=e^{1-1}-\alpha\cdot 1^2=1-\alpha$ και επομένως από την υπόθεση προκύπτει ότι $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως:

- η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$,
- αυτό το σημείο είναι εσωτερικό σημείο του $D_f=\mathbb{R}$,
- η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Συνεπώς, από το Θεώρημα Fermat έπεται ότι $f'(1)=0$. Όμως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(e^{x^2-1}-\alpha x^2\right)'=2xe^{x^2-1}-2\alpha x.$$

Εφόσον $f'(1)=0$, προκύπτει από τον παραπάνω τύπο ότι

$$2\cdot 1\cdot e^{1^2-1}-2\alpha\cdot 1=0\Leftrightarrow 2-2\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=1.$$

Γ2. i. Όπως δείξαμε προηγουμένως, και αφού $\alpha=1$, προκύπτει ότι

$$f'(x)=2xe^{x^2-1}-2x=2x\left(e^{x^2-1}-1\right)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα βρούμε τώρα τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0 \;\text{ ή }\; e^{x^2-1}=1=e^0 \overset{e^x\ \text{"1–1"}}{\Leftrightarrow} x=0 \;\text{ ή }\; x^2-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \;\text{ ή }\; x=\pm 1.$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο των παραγόντων $2x$ και $e^{x^2-1}-1$. Ο παράγοντας $e^{x^2-1}-1$ είναι θετικός όταν

$$x^2-1>0 \Leftrightarrow |x|>\sqrt{1} \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).$$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	-1		0		$+1$		$+\infty$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{x^2-1}-1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,-1]$ και $\Delta_3=(0,1)$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\Delta_2=[-1,0]$ και $\Delta_4=[1,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=-1$ με $f(-1)=0$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2=0$ με $f(0)=\dfrac{1}{e}$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_3=1$ με $f(1)=0$.

ii. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_1, θα έχουμε

$$f(\Delta_1)=\left[f(-1),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=[0,+\infty),$$

όπου για την τελευταία ισότητα υπολογίσαμε το όριο ως εξής:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x^2-1}-x^2\right).$$

Εκτελούμε την αντικατάσταση $u=x^2-1$. Καθώς το x τείνει στο $-\infty$, ισχύει

$$u=x^2-1\to+\infty-1=+\infty.$$

Επομένως, το παραπάνω όριο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\lim_{u\to+\infty}e^u\left(1-\frac{u}{e^u}-\frac{1}{e^u}\right).$$

Στο τελευταίο όριο όλοι οι όροι είναι άμεσα υπολογίσιμοι, εκτός από τον $\frac{u}{e^u}$, ο οποίος έχει την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$ και για τον οποίο χρησιμοποιούμε τον κανόνα De L' Hospital:

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^u}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{e^u}=0.$$

Έτσι, το αρχικό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{u\to+\infty}e^u\left(1-\frac{u}{e^u}-\frac{1}{e^u}\right)=(+\infty)(1-0-0)=+\infty,$$

όπως ακριβώς ισχυριστήκαμε και παραπάνω.

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_2, οπότε ισχύει

$$f(\Delta_2)=\left[f(-1),f(0)\right]=\left[0,\frac{1}{e}\right].$$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_3, οπότε ισχύει

$$f(\Delta_3)=\left(\lim_{x\to1^-}f(x),\lim_{x\to0^+}f(x)\right)=\left(0,\frac{1}{e}\right),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της f για να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=f(1)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=\frac{1}{e}.$$

- Τέλος, η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_4, οπότε ισχύει

$$f(\Delta_4)=\left[f(1),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[0,+\infty),$$

όπου για το τελευταίο βήμα υπολογίσαμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ όπως ακριβώς είχαμε υπολογίσει και το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ λίγο παραπάνω (δηλαδή μέσω της αντικατάστασης $u=x^2-1$ και του κανόνα De L' Hospital).

Προκύπτει λοιπόν ότι το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο

$$f(\mathbb{R})=[0,+\infty)\cup\left[0,\frac{1}{e}\right]\cup\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup[0,+\infty)\ \boxed{=[0,+\infty).}$$

Γ3. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\left(\lambda+x^2\right)e^{1-x^2}=1 \Leftrightarrow e^{x^2-1}=\lambda+x^2 \Leftrightarrow e^{x^2-1}-x^2=\lambda \Leftrightarrow f(x)=\lambda.$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $\lambda<0$, τότε $\lambda\notin f(\mathbb{R})$ και άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=0$, τότε έχουμε ότι $f(-1)=f(1)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$, άρα έχει ακριβώς δύο λύσεις.
- Αν $0<\lambda<\dfrac{1}{e}$, τότε έχουμε ότι $\lambda\in f(\Delta_1)$, $\lambda\in f(\Delta_2)$, $\lambda\in f(\Delta_3)$, $\lambda\in f(\Delta_4)$, οπότε υπάρχουν $x_1\in\Delta_1$, $x_2\in\Delta_2$, $x_3\in\Delta_3$, $x_4\in\Delta_4$, έτσι ώστε

  $$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=\lambda.$$

  Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από αυτά τα υποδιαστήματα, αυτή η εξίσωση έχει ακριβώς αυτές τις 4 λύσεις.
- Αν $\lambda=\frac{1}{e}$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, άρα υπάρχει μοναδική λύση στο Δ_1. Επίσης, $\lambda\in f(\Delta_2)$ και μάλιστα $f(0)=\frac{1}{e}$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2, η ρίζα $x=0$ είναι μοναδική σε αυτό το διάστημα. Επιπλέον, $\lambda\notin f(\Delta_3)$,$\lambda\in f(\Delta_4)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_4, άρα υπάρχει μοναδική λύση στο Δ_4. Έτσι, συνολικά σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση θα έχει ακριβώς 3 ρίζες.
- Αν $\lambda>\dfrac{1}{e}$, τότε $\lambda\in f(\Delta_1)$, $\lambda\notin f(\Delta_2)$, $\lambda\notin f(\Delta_3)$, $\lambda\in f(\Delta_4)$ και άρα υπάρχει μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης στο Δ_1 και μοναδική λύση αυτής της εξίσωσης στο Δ_4. Έτσι, συνολικά σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση θα έχει ακριβώς 2 ρίζες.

Γ4. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Ισχύει

$$A=\int_1^{\sqrt{2}}2x^3\left[f(x)+x^2\right]dx=\int_1^{\sqrt{2}}2x^3e^{x^2-1}dx=\int_1^{\sqrt{2}}x^2\left(x^2-1\right)'e^{x^2-1}dx$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}x^2\left(e^{x^2-1}\right)'dx=\left[x^2e^{x^2-1}\right]_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}}\left(x^2\right)'e^{x^2-1}dx$$

$$=2e-1-\int_1^{\sqrt{2}}2xe^{x^2-1}dx=2e-1-\int_1^{\sqrt{2}}\left(x^2-1\right)'e^{x^2-1}dx$$

$$=2e-1-\int_1^{\sqrt{2}}\left(e^{x^2-1}\right)'dx=2e-1-\left[e^{x^2-1}\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= 2e - 1 - (e - 1) = e.$$

Γ5. Σημειώνουμε αρχικά ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $x^2 - x = x(x-1) > 0$. Αυτή η παρατήρηση θα μας χρησιμεύσει σε λίγο. Η αποδεικτέα ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$f(x^2) + xf'(x) > x^2 f'(x) + f(x) \Leftrightarrow f(x^2) - f(x) > x^2 f'(x) - xf'(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x^2) - f(x) > (x^2 - x) f'(x)$$

$$\overset{x^2 - x > 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} > f'(x).$$

Έστω $x > 1$. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x, x^2]$. Επομένως, από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, x^2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x}.$$

Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Από αυτό, θα μπορέσουμε να συμπεράνουμε ότι $f'(\xi) > f'(x)$, μια και $\xi > x > 1$. Αυτό με τη σειρά του, σε συνδυασμό με τις παραπάνω παρατηρήσεις, θα μας δώσει το ζητούμενο.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x) = 2\left(e^{x^2-1} - 1\right) + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2-1} = e^{x^2-1}\left(4x^2 + 2\right) - 2.$$

Για $x > 1$ έχουμε $x^2 > 1$, άρα $x^2 - 1 > 0$ και, αφού η e^x είναι γνησίως αύξουσα, έπεται ότι

$$e^{x^2-1} > 1 \qquad (1)$$

Επιπλέον, για κάθε $x > 1$ ισχύει

$$4x^2 > 4 \Rightarrow 4x^2 + 2 > 4 + 2 \Rightarrow 4x^2 + 2 > 6 \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2) κατά μέλη, παίρνουμε

$$e^{x^2-1}\left(4x^2 + 2\right) > 6 \Rightarrow e^{x^2-1}\left(4x^2 + 2\right) - 2 > 4 \Rightarrow f''(x) > 4 > 0$$

οπότε f'' γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Τότε όμως, όπως εξηγήσαμε και νωρίτερα, προκύπτει από τη σχέση $\xi > x > 1$ ότι

$$\boxed{f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} > f'(x),}$$

και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. i. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$x(x-1)g'(x) + g(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left[(x-1)g(x)\right]' = (\ln x)'$$

για κάθε $x > 0$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $(x-1)g(x) = \ln x + c$ για κάθε $x > 0$. Για $x = 1$ προκύπτει ότι $c = 0$. Επομένως, για κάθε $x \neq 1$ θα είναι $g(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$, οπότε

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ g(1), & x = 1 \end{cases}.$$

Όμως, αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, τότε θα είναι και συνεχής σε αυτό το διάστημα, άρα και στο $x_0 = 1$. Έτσι όμως προκύπτει ότι

$$g(1) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{0/0}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x \to 1} 1/x = 1,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.}$$

ii. Ελέγχουμε αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με χρήση του ορισμού. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x-(x-1)}{x-1}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to1}\frac{(\ln x-x+1)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{2x(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\left(-\frac{1}{2x}\right)=-\frac{1}{2},$$

όπου στο πέμπτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Εφόσον το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, έπεται ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $g'(1)=-\frac{1}{2}$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1,g(1))$ έχει εξίσωση

$$y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-\frac{1}{2}(x-1)\ \boxed{\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.}$$

Δ2. i. Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $(1+\alpha)^x+\beta^{-x}\geq2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=(1+\alpha)^x+\beta^{-x}$. Η προηγούμενη σχέση τότε γράφεται ισοδύναμα ως $\varphi(x)\geq2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Παρατηρούμε όμως ότι $\varphi(0)=(1+\alpha)^0+\beta^{-0}=1+1=2$, άρα για $x=0$ ισχύει η ισότητα. Με άλλα λόγια, ισχύει $\varphi(x)\geq\varphi(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$. Έτσι λοιπόν έχουμε ότι:

- Η φ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0=0$.
- Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $D_\varphi=\mathbb{R}$.
- Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ αφού είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Από το θεώρημα Fermat προκύπτει ότι $\varphi'(0)=0$. Όμως, ο τύπος της παραγώγου είναι

$$\varphi'(x)=(1+\alpha)^x\ln(1+\alpha)+\beta^{-x}\ln\beta(-x)'=(1+\alpha)^x\ln(1+\alpha)-\beta^{-x}\ln\beta.$$

Άρα $\varphi'(0)=\ln(1+\alpha)-\ln\beta$. Εξηγήσαμε όμως ότι $\varphi'(0)=0$, άρα προκύπτει ότι

$$\ln(1+\alpha)=\ln\beta\overset{\ln 1-1}{\Leftrightarrow}\boxed{\alpha+1=\beta,\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

ii. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, επομένως ισχύει $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$. Υπολογίζουμε τα δύο πλευρικά όρια ξεχωριστά. Το δεξιό πλευρικό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x-1}\cdot x\ln x\right) = -1\cdot 0 = 0,$$

όπου για την τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

Το αριστερό πλευρικό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(e^{\alpha}(1+x) - \beta e^{x}\right) = e^{\alpha} - \beta.$$

Τα δύο πλευρικά όρια θα πρέπει να είναι ίσα, άρα

$$e^{\alpha} - \beta = 0 \Leftrightarrow e^{\alpha} = \beta.$$

Από το προηγούμενο ερώτημα όμως έχουμε και $\alpha + 1 = \beta$, άρα το α πρέπει να ικανοποιεί την ισότητα

$$e^{\alpha} = \alpha + 1. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{x} - x - 1$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = e^{x} - 1$. Θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της h. Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x} > 1 \Leftrightarrow e^{x} > e^{0} \overset{e^{x}\nearrow}{\Leftrightarrow} x > 0.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η παράγωγος είναι αρνητική για $x < 0$ και ότι μηδενίζεται για $x = 0$. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	0 $\quad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

- Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ το $h(0)=e^0-0-1=0$. Πράγματι, αν $x\le 0$, τότε $h(x)\ge h(0)$, αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, ενώ, αν $x\ge 0$, τότε $h(x)\ge h(0)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $h(x)\ge h(0)$.

Άρα ισχύει $h(x)>0$ για κάθε $x\ne 0$ και $h(x)=0$ μόνο για $x=0$. Έτσι, η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα ως

$$e^{\alpha}=\alpha+1 \Leftrightarrow e^{\alpha}-\alpha-1=0 \Leftrightarrow h(\alpha)=0 \boxed{\Leftrightarrow \alpha=0.}$$

Έπεται λοιπόν ότι $\boxed{\beta=\alpha+1=0+1=1.}$

Δ3. i. Για $\alpha=0$ και $\beta=1$ ισχύει

$$f(x)=\begin{cases} 1+x-e^x, & x\le 0 \\ \dfrac{x\ln x}{x-1}, & 0<x\ne 1. \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι, γι' αυτές τις τιμές των παραμέτρων, η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$. Επίσης, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πράξη παραγωγίσιμων. Μάλιστα, για κάθε $x<0$ ισχύει

$$f'(x)=\left(1+x-e^x\right)'=1-e^x.$$

Όμως για κάθε $x<0$ έχουμε

$$x<0 \overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow} e^x<e^0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow f'(x)>0.$$

Από τη συνέχεια της f στη θέση $x=0$, σε συνδυασμό με την τελευταία ανισότητα, παίρνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.

Η f είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$, και για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\frac{x\ln x}{x-1}\right)'=\frac{(x\ln x)'(x-1)-x\ln x(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}=-\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}.$$

Για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x \leq x-1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$. Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενα σημεία του βιβλίου, αυτή η ανισότητα θεωρείται γνωστή και μπορεί να χρησιμοποιείται χωρίς απόδειξη, αφού αποτελεί εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (σελ. 148).

Από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ ισχύει $\ln x < x-1$. Από τον τύπο της παραγώγου, τον οποίο υπολογίσαμε παραπάνω, προκύπτει τελικά ότι $f'(x)>0$ στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Επειδή όμως η f είναι συνεχής και στη θέση $x=1$ (λόγω του Ερωτήματος Δ1i), αλλά και στη θέση $x=0$ (λόγω του Ερωτήματος Δ2ii), έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η f είναι γνησίως αύξουσα στα υποδιαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty)$, άρα είναι τελικά γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $x^2+1>0$, οπότε η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{e-1}{e}\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)<x^2$$

Η ανίσωση δεν έχει ως λύση της το $x=0$, αφού για $x=0$ έχουμε

$$\frac{e-1}{e}\cdot 1\cdot 0>0^2,$$

δηλαδή την αντίστροφη φορά. Μπορούμε λοιπόν στο εξής να θεωρήσουμε ότι $x \neq 0$. Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{e-1}{e}\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)<\left(x^2+1\right)-1 \overset{e-1,x^2>0}{\Leftrightarrow} \frac{\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)-1}<\frac{e}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow f\left(x^2+1\right)<f(e) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x^2+1<e \Leftrightarrow x^2<e-1 \Leftrightarrow |x|<\sqrt{e-1}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{e-1}<x<\sqrt{e-1}.$$

Ωστόσο πρέπει να απαιτήσουμε και $x \neq 0$, αφού, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, το μηδέν δεν αποτελεί λύση της ανίσωσης. Άρα τελικά οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι

$$\boxed{x \in \left(-\sqrt{e-1},0\right) \cup \left(0,\sqrt{e-1}\right).}$$