Διαγώνισμα 4.9

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 117.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 95.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 141.

Α4. Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2$. Παρόλο που ισχύει ότι $f'(0)=0$, αυτή η συνάρτηση δεν έχει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

Α5. **i)** Σ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Λ,

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $h\circ g$ είναι το $D_{h\circ g}=\{x\in D_f \;\text{και}\; g(x)\in D_h\}$. Αυτές οι συνθήκες γράφονται ισοδύναμα ως

$$\begin{cases} x<2 \\ -\dfrac{1}{3}<g(x)<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ -\dfrac{1}{3}<\dfrac{x}{2-x}<1 \end{cases} \overset{x<2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x<2 \\ -(2-x)<3x<3(2-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ (x-2<3x) \;\text{ και }\; (3x<6-3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ (-2x<2) \;\text{ και }\; (6x<6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-1 \;\text{ και }\; x<1 \end{cases}$$

Οι παραπάνω συνθήκες αληθεύουν αν και μόνο αν $x\in(-1,1)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $D_{h\circ g}=(-1,1)$. Επιπλέον, για κάθε $x\in(-1,1)$ ισχύει

$$(h\circ g)(x)=h(g(x))=\ln\left(\frac{1+\dfrac{3x}{2-x}}{1-\dfrac{x}{2-x}}\right)=\ln\left(\frac{\dfrac{2-x+3x}{2-x}}{\dfrac{2-x-x}{2-x}}\right)=\ln\left(\frac{2+2x}{2-2x}\right)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Β2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in(-1,1)$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1+x)(1-x)}>0,$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο D_f, επομένως δεν έχει ακρότατα.

B3. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $D_f=(-1,1)$, επομένως για το σύνολο τιμών της ισχύει ότι

$$f(D_f)=\left(\lim_{x\to-1^+}f(x),\lim_{x\to1^-}f(x)\right).$$

Τα δύο όρια υπολογίζονται ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right).$

  Εκτελούμε την αντικατάσταση $u=\dfrac{1+x}{1-x}$. Καθώς $x\to-1^+$, ισχύει $u\to0^+$. Επομένως, το τελευταίο όριο γράφεται ως

$$\lim_{u\to0^+}\ln u=-\infty.$$

- $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right).$

  Εκτελούμε και πάλι την αντικατάσταση $u=\dfrac{1+x}{1-x}$. Καθώς $x\to1^-$, ισχύει $u\to+\infty$. Επομένως, το τελευταίο όριο γράφεται ως

$$\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f(D_f)=\mathbb{R}.$

> Επειδή ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$, η C_f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

B4. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο D_f, άρα θα είναι «1-1» και συνεπώς θα αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} θα είναι το σύνολο $D_{f^{-1}}=f(D_f)=\mathbb{R}.$ Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της αντίστροφης, πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=y$ ως προς x. Για κάθε $x\in D_f$ και κάθε $y\in\mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y\Leftrightarrow\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=y\Leftrightarrow\frac{1+x}{1-x}=e^y\Leftrightarrow1+x=e^y(1-x)$$

$$\Leftrightarrow1+x=e^y-xe^y\Leftrightarrow x+xe^y=e^y-1$$

$$\Leftrightarrow x\left(1+e^y\right)=e^y-1 \overset{e^y+1>0}{\Leftrightarrow} x=\frac{e^y-1}{e^y+1}.$$

Συνεπώς, ο τύπος της f^{-1} θα είναι

$$\boxed{f^{-1}(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1},\ x\in\mathbb{R}.}$$

B5. Για κάθε $x\in(-1,1)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{2}{(1+x)(1-x)}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, ως ρητή, και για κάθε $x\in(-1,1)$ ισχύει

$$f''(x)=\left(\frac{2}{(1+x)(1-x)}\right)'=\left(\frac{2}{1-x^2}\right)'=\frac{-2\left(1-x^2\right)'}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}$$

Το μοναδικό σημείο μηδενισμού της δεύτερης παραγώγου είναι το $x=0$, όπως φαίνεται από την ισοδυναμία

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 4x=0\Leftrightarrow x=0.$$

Επίσης, είναι εύκολο να δούμε από τον τύπο της ότι, εφόσον ο παρονομαστής είναι θετικός, η f είναι κοίλη στο $(-1,0]$ και κυρτή στο $[0,1)$. Επιπλέον, η C_f έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$. Αυτά τα συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	-1	0	$+1$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

B6. Ισχύει $f(0)=0$ και $f'(0)=2$, όπως μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα από τους τύπους της f και της f'. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$ είναι

$$\boxed{\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=2x.}$$

Με βάση τις παρατηρήσεις για τη μονοτονία και την κυρτότητα της f, τις οποίες κάναμε στα προηγούμενα ερωτήματα, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f στο διπλανό σχήμα. Όπως σημειώσαμε παραπάνω, το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της C_f, άρα η ευθεία (ε), ως εφαπτομένη της C_f στο O, «διαπερνά» την καμπύλη.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\left(f(x)+x\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left|f(x)+x\right| = 2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)+x,\ x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής με $|h(x)|=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $2\neq 0$, θα είναι και $|h(x)|\neq 0$ και άρα $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αφού η h είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Ισχύει ότι $h(1)=f(1)+1=2>0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{f(x)+x=2 \Leftrightarrow f(x)=2-x.}$$

ii. Για το σημείο Λ ισχύει ότι $y_\Lambda=\alpha$ και $\Lambda\in C_f$, άρα

$$f(x)=\alpha \Leftrightarrow -x_\Lambda+2=\alpha,$$

δηλαδή $x_\Lambda=2-\alpha$ και άρα $\Lambda(2-\alpha,\alpha)$. Επομένως, το εμβαδόν του $\mathrm{OK\Lambda M}$ είναι ίσο με $E_{\mathrm{OK\Lambda M}}=(2-\alpha)\alpha$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για κάθε $\alpha\in(0,2)$ ισχύει

$$\boxed{E(\alpha)=(2-\alpha)\alpha=2\alpha-\alpha^2.}$$

Γ2. Αφού $E(\alpha)=2\alpha-\alpha^2$ με $\alpha\in(0,2)$, η E είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ και για κάθε $\alpha\in(0,2)$ ισχύει $E'(\alpha)=2-2\alpha$. Βρίσκουμε τώρα τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$E'(\alpha)=0 \Leftrightarrow 2-2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=1,$$

άρα η μοναδική ρίζα της παραγώγου είναι η $\alpha=1$. Για το πρόσημο της παραγώγου, παρατηρούμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$E'(\alpha)>0 \Leftrightarrow 0<\alpha<1.$$

Αντίστοιχα, η παράγωγος είναι αρνητική για $1<\alpha<2$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

α	0		1		2
$E'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$E(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Από αυτόν τον πίνακα προκύπτει ότι πράγματι η συνάρτηση $E(\alpha)$ μεγιστοποιείται για $\alpha=1$. Πράγματι, αν $0<\alpha\le 1$, τότε $E(x)\le E(1)$, αφού η E είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$, ενώ, αν $1\le\alpha\le 2$, τότε $E(\alpha)\le E(1)$, καθώς η E είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$. Επομένως, για κάθε $\alpha\in(0,2)$ ισχύει ότι $E(\alpha)\le E(1)$.

Με άλλα λόγια, το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $\alpha=1$. Γι' αυτήν την τιμή του α ισχύει

$$\boxed{(OM)=(OK)=1}$$

δηλαδή το ορθογώνιο $OK\Lambda M$ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες. Έπεται λοιπόν ότι είναι τετράγωνο, όπως θέλαμε.

Γ3. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι

$$d=(O\Lambda)=\sqrt{(2-\alpha)^2+\alpha^2}=\sqrt{4-4\alpha+\alpha^2+\alpha^2}=\sqrt{2\alpha^2-4\alpha+4}.$$

Επειδή έχουμε $\alpha=\alpha(t)$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση συναρτήσει του t ως

$$d(t)=\sqrt{2\alpha^2(t)-4\alpha(t)+4}.$$

Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και για κάθε $t\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$d'(t)=\frac{1}{2\sqrt{2\alpha^2(t)-4\alpha(t)+4}}\left(2\alpha^2(t)-4\alpha(t)+4\right)'$$

$$=\frac{4\alpha(t)\alpha'(t)-4\alpha'(t)}{2\sqrt{2\alpha^2(t)-4\alpha(t)+4}}=\frac{2\alpha'(t)(\alpha(t)-1)}{\sqrt{2\alpha^2(t)-4\alpha(t)+4}}.$$

Η συνάρτηση $\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, άρα η $d(t)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία για τα οποία η υπόρριζη ποσότητα είναι ίση με 0. Αυτό όμως δεν συμβαίνει για καμία τιμή του t, καθώς η υπόρριζη ποσότητα είναι ένα τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα.

Επομένως, τη χρονική στιγμή t_0 θα ισχύει ότι

$$\boxed{d'(t_0)=\frac{2024\cdot(1-1)}{\sqrt{2\cdot 1^2-4\cdot 1+4}}=0.}$$

Γ4. i. Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=[0,2]$, επομένως

$$g(\Delta)=[g(0),g(2)].$$

Επειδή όμως $g(\Delta)=[0,2]$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$g(0)=0 \text{ και } g(2)=2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-f(x), x\in[0,2]$.

- Η φ είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων f,g.
- $\varphi(0)=g(0)-f(0)=0-2=-2.$
- $\varphi(2)=g(2)-f(2)=2-0=2$

Προκύπτει επομένως ότι $\varphi(0)\varphi(2)<0$, άρα από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$.

Επιπλέον, η φ είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ ως πράξη των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f,g. Για κάθε $x\in(0,2)$ ισχύει

$$\varphi'(x)=g'(x)-f'(x)=g'(x)+1>0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f'(x)=-1$ και ότι $g'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$, επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$. Συμπεραίνουμε από την τελευταία ανισότητα ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$. Επομένως, η εξίσωση $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,2)$. Άρα η C_g τέμνει τη C_f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,2)$.

ii. Παρατηρούμε ότι, για τη ρίζα x_0 της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ που βρήκαμε στο προηγούμενο Ερώτημα, ισχύει ότι

$$g(x_0)=f(x_0)=-x_0+2.$$

Για τη συνάρτηση g έχουμε ότι:

- Η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[0,x_0]$ και $[x_0,2]$, όπου $x_0\in(0,2)$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=g(x)$ που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0,x_0)$ και $(x_0,2)$.

Επομένως, από το Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι υπάρχουν ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (0,x_0)$ και ένα $\xi_2 \in (x_0,2)$ τέτοια, ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g(x_0)-g(0)}{x_0-0} = \frac{-x_0+2}{x_0},$$

και

$$g'(\xi_2) = \frac{g(2)-g(x_0)}{2-x_0} = \frac{2+x_0-2}{2-x_0} = \frac{x_0}{2-x_0}.$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $g(0)=0$, $g(2)=2$ και $g(x_0)=-x_0+2$. Προφανώς ισχύει $\xi_1 \neq \xi_2$, αφού $0<\xi_1<x_0<\xi_2$.

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$g'(\xi_1)g'(\xi_2) = \frac{-x_0+2}{x_0}\cdot\frac{x_0}{2-x_0} = \frac{2-x_0}{x_0}\cdot\frac{x_0}{2-x_0} = 1.$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. i. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $D_g=\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2x-2}\right)' = -e^{2x-2}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της g στο $x=1$ είναι ίσος με $g'(1)=-e^0=-1$. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha\ln x}{x-\beta}$ ορίζεται για $x\in(0,\beta)\cup(\beta,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, με

$$f'(x) = \frac{\frac{\alpha}{x}(x-\beta)-\alpha\ln x}{(x-\beta)^2}$$

για κάθε $x\in(0,\beta)\cup(\beta,+\infty)$. Η κλίση της C_f στο $x=1$ είναι ίση με

$$f'(1) = \frac{\alpha(1-\beta)}{(1-\beta)^2} = \frac{\alpha}{1-\beta}.$$

Αφού όμως $f'(1)=g'(1)$, τότε θα είναι

$$\frac{\alpha}{1-\beta} = -1 \Leftrightarrow \alpha=\beta-1 \Leftrightarrow \beta=\alpha+1, \quad (1)$$

Επιπλέον, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x+\beta^x\ge 2 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2}\right)^x+\beta^x-2\ge 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x+\beta^x-2,\ x\in\mathbb{R}$. Η παραπάνω ανισότητα είναι τότε ισοδύναμη με την

$$\varphi(x)\ge 0 \ \text{ για κάθε } \ x\in\mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\varphi(0)=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^0+\beta^0-2=1+1-2=0,$$

συνεπώς η παραπάνω ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\varphi(x)\ge\varphi(0) \ \text{ για κάθε } \ x\in\mathbb{R}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η φ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στη θέση $x=0$. Επιπλέον, η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\varphi'(x)=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^x\cdot\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\beta^x\cdot\ln\beta.$$

Επομένως, συγκεντρωτικά, ισχύει ότι

- η φ είναι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$,
- η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$.

Από το θεώρημα του Fermat προκύπτει λοιπόν ότι

$$\varphi'(x)=0\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\ln\beta=0 \ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-\ln\beta$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\ln\left(\frac{1}{\beta}\right) \overset{\ln:1-1}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \alpha\beta=2. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι τα α,β ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases}\alpha=\beta-1\\ \alpha\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta-1\\ \beta(\beta-1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta-1\\ \beta^2-\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\beta-1\\ \beta^2-\beta-2=0\end{cases}$$

Για την εξίσωση $\beta^2-\beta-2=0$, χρησιμοποιούμε τη διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=9.$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $\beta_{1,2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$, δηλαδή $\beta=2$ ή $\beta=-1$.

Επειδή μας έχει δοθεί στην εκφώνηση ότι $\beta>0$, συμπεραίνουμε ότι $\boxed{\beta=2}$. Προκύπτει έτσι και ότι

$$\boxed{\alpha=\beta-1=2-1=1,\ \text{όπως θέλαμε.}}$$

ii. Αφού $\beta=2$ και $\alpha=1$, προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το

$$D_f=(0,2)\cup(2,+\infty)$$

Επίσης, από τον τύπο της f, προκύπτει ότι για κάθε $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ ισχύει

$$f(x)=\frac{\ln x}{x-2}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x\in D_f$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x-2)-\ln x}{(x-2)^2}=\frac{1-\frac{2}{x}-\ln x}{(x-2)^2}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός, οπότε το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του αριθμητή. Εξετάζουμε λοιπόν τον αριθμητή ξεχωριστά. Για να το κάνουμε αυτό, θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=1-\frac{2}{x}-\ln x$ για $x>0$. Για κάθε $x\in D_f$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{K(x)}{(x-2)^2}. \qquad (3)$$

Αυτός είναι άλλωστε και ο λόγος που θεωρήσαμε τη συνάρτηση K. Θα επιχειρήσουμε τώρα να προσδιορίσουμε το πρόσημο αυτής της συνάρτησης. Η K είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$K'(x)=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2-x}{x^2}.$$

Καθώς ο παρονομαστής x^2 είναι θετικός, το πρόσημο της K' προσδιορίζεται ως εξής:

- $K'(x)>0\Leftrightarrow 2-x>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\in(0,2)$.
- $K'(x)<0\Leftrightarrow 2-x<0\Leftrightarrow x>2$.
- $K'(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0	2	$+\infty$
$K'(x)$	$+$	0	$-$
$K(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Προκύπτει έτσι ότι η K είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$. Παρουσιάζει μάλιστα ολικό μέγιστο στη θέση $x=2$ την τιμή $K(2)=1-\frac{2}{2}-\ln 2=-\ln 2<0$. Πράγματι, αν $0<x\leq 2$, τότε $K(x)\leq K(2)$, αφού η K είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$, ενώ, αν $x\geq 2$, τότε $K(x)\leq K(2)$, καθώς η K είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $K(x)\leq K(2)$.

Εφόσον η μέγιστη τιμή της K είναι αρνητική, προκύπτει ότι $K(x)<0$ για κάθε $x>0$. Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in D_f$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,2)$ και $(2,+\infty)$. Από το παραπάνω προκύπτει φυσικά ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Όπως έχουμε σημειώσει ξανά, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της. Το θεώρημα της σελ. 135 του σχολικού βιβλίου αφορά μόνο διαστήματα.

Δ2. i. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(0,2)$, επομένως για το σύνολο τιμών της ισχύει ότι

$$f(\Delta_1)=\left(\lim_{x\to 2^-} f(x),\lim_{x\to 0^+} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R},$$

όπου τα δύο όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το πρώτο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2}\cdot\ln x\right)=(-\infty)\cdot\ln 2=-\infty,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$.

- Το δεύτερο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x-2}\cdot\ln x\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-\infty)=+\infty,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=(2,+\infty)$, επομένως για το σύνολο τιμών της θα ισχύει ότι

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 2^+} f(x)\right)=(0,+\infty),$$

όπου τα όρια στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το πρώτο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-2}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$.

- Το δεύτερο όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln x}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}\cdot\ln x\right)=(+\infty)\cdot\ln 2=+\infty,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σύνολο τιμών της f είναι το

$$\boxed{f(D_f)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\mathbb{R}.}$$

ii. Το $x=2$ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης $e^x x^2=e^2 x^e$. Πράγματι, αν ήταν, τότε θα ίσχυε

$$4e^2=e^2 2^e \Leftrightarrow 4=2^e \Leftrightarrow 2^2=2^e \overset{2^x:1-1}{\Leftrightarrow} 2=e,$$

άτοπο. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0<x\neq 2$. Η εξίσωση τότε ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
e^x x^2=e^2 x^e &\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2}=\frac{x^e}{x^2}\Leftrightarrow e^{x-2}=x^{e-2}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln e^{x-2}=\ln x^{e-2}\\
&\Leftrightarrow x-2=(e-2)\ln x \overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} 1=(e-2)\cdot\frac{\ln x}{x-2}\\
&\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x-2}=\frac{1}{e-2}\Leftrightarrow f(x)=f(e),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f(e)=\frac{1}{e-2}$. Άρα για $0<x\neq 2$, η εξίσωση $e^x x^2=e^2 x^e$ είναι ισοδύναμη της $f(x)=f(e)$, όπως θέλαμε.

- Αν $x \in \Delta_1 = (0,2)$, τότε $f(e) \in f(\Delta_1) = \mathbb{R}$, επομένως υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ ώστε $f(x_1) = f(e)$. Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1, το x_1 είναι η μοναδική ρίζα στο Δ_1.
- Στο διάστημα $(2,+\infty)$, η εξίσωση έχει την προφανή ρίζα $x = e$, αφού $e \in (2,+\infty)$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα, επομένως η μοναδική ρίζα στο Δ_2 είναι η $x_2 = e$.

Δ3. i. Ισχύει

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & x \le 1 \\ f(x), & 1 < x < 2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{e^{2x-2}}{2}, & x \le 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-2}, & 1 < x < 2 \end{cases}.$$

Τα κρίσιμα σημεία της h είναι τα εσωτερικά σημεία του $D_h = (-\infty,2)$ στα οποία η h' μηδενίζεται και τα εσωτερικά σημεία του D_h στα οποία η h' δεν ορίζεται. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x < 1$ ισχύει

$$h'(x) = g'(x) = -e^{2x-2} < 0.$$

Επιπλέον, η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,2)$ και για κάθε $x \in (1,2)$ ισχύει $h'(x) = f'(x)$. Στο Ερώτημα Δ1ii είδαμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in D_f$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1,2)$. Άρα η h' δεν έχει σημεία μηδενισμού στο $(0,1) \cup (1,+\infty)$. Συνεπώς, το μοναδικό πιθανό κρίσιμο σημείο της h είναι το $x = 1$. Εξετάζουμε αν η h είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ υπολογίζοντας ξεχωριστά τα δύο αντίστοιχα πλευρικά όρια. Το αριστερό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1) \qquad (4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \le 1$, καθώς και τον ορισμό της παραγώγου της g στο σημείο $x = 1$. Για να υπολογίσουμε το δεξί όριο, σημειώνουμε αρχικά ότι

$$h(1) = g(1) = \frac{1}{2} - \frac{e^{2\cdot 1-2}}{2} = 0 = f(1).$$

Επομένως, αυτό το όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \qquad (5)$$

Από τις (4) και (5) έπεται ότι

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=-1,$$

οπότε η h είναι παραγωγίσιμη και στη θέση $x=1$ με $h'(1)=-1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η h είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της και ισχύει $h'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in D_h$. Συνεπώς, η h δεν έχει κρίσιμα σημεία.

ii. Η αποδεικτέα ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$(x+1)h(x)>h(x^2)\Leftrightarrow xh(x)+h(x)>h(x^2)\Leftrightarrow xh(x)>h(x^2)-h(x)$$

$$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} h(x)>\frac{h(x^2)-h(x)}{x}\overset{x-1<0}{\Leftrightarrow}\frac{h(x)}{x-1}<\frac{h(x^2)-h(x)}{x(x-1)}$$

$$\overset{h(1)=0}{\Leftrightarrow}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}<\frac{h(x^2)-h(x)}{x^2-x},$$

όπου στο προτελευταίο βήμα αλλάξαμε τη φορά διότι διαιρέσαμε και τα δύο μέλη με $x-1<0$. Τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας μας παραπέμπουν στο Θ.Μ.Τ. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να την αποδείξουμε με τη χρήση αυτού του θεωρήματος. Αρχικά παρατηρούμε ότι για $0<x<1$ ισχύει ότι $x^2<x<1$. Θεωρούμε λοιπόν τυχόν $x\in(0,1)$.

Η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[x^2,x]$ και $[x,1]$, καθώς είναι συνεχής σε αυτά και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό τους. Επομένως, υπάρχουν $\xi_1\in(x^2,x)$ και $\xi_2\in(x,1)$ τέτοια, ώστε

$$h'(\xi_1)=\frac{h(x)-h(x^2)}{x-x^2}=\frac{h(x^2)-h(x)}{x^2-x}$$

και

$$h'(\xi_2)=\frac{h(1)-h(x)}{1-x}=\frac{h(x)-h(1)}{x-1}.$$

Μας έχει δοθεί όμως ότι η h είναι κοίλη στο $[0,1]$, συνεπώς η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Εφόσον

$$0<x^2<\xi_1<x<\xi_2<1,$$

έπεται από τη μονοτονία της h' ότι

$$h'(\xi_2) < h'(\xi_1) \Leftrightarrow \frac{h(x)-h(1)}{x-1} < \frac{h(x^2)-h(x)}{x^2-x},$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο. Αφού το $x \in (0,1)$ ήταν τυχαίο, η ανισότητα θα ισχύει για κάθε $x \in (0,1)$.