Διαγώνισμα 4.10

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 128.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 96.

Α4. Ο ισχυρισμός είναι σωστός. Πράγματι, ας θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0 \text{ όπου } \nu \text{ περιττός.}$$

- Αν $\alpha_\nu>0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_\nu x^\nu=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha_\nu x^\nu=-\infty$. Επομένως, υπάρχει $\alpha<0$ κοντά στο $-\infty$, για το οποίο ισχύει ότι $P(\alpha)<0$, και $\beta>0$ κοντά στο $+\infty$, για το οποίο ισχύει ότι $P(\beta)>0$. Ξέρουμε ότι η συνάρτηση P είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $P(\alpha)P(\beta)<0$, επομένως, από το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ για το οποίο $P(x_0)=0$, δηλαδή το πολυώνυμο P έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

- Αν $\alpha_\nu<0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha_\nu x^\nu=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}P(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha_\nu x^\nu=+\infty$. Επομένως, υπάρχει $\alpha<0$ κοντά στο $-\infty$, για το οποίο ισχύει ότι $P(\alpha)>0$, και $\beta>0$ κοντά στο $+\infty$, για το οποίο ισχύει ότι $P(\beta)<0$. Ξέρουμε ότι η συνάρτηση P είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $P(\alpha)P(\beta)<0$, επομένως, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ για το οποίο $P(x_0)=0$, δηλαδή το πολυώνυμο P έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, το πολυώνυμο P θα έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Α5. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Σ

Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι η σύνθεση της g με την h είναι η h∘g και όχι η g∘h. Παραπέμπουμε στον ορισμό στη σελ. 25 του σχολικού βιβλίου. Αν και λεπτομέρεια, καλό είναι να θυμόμαστε τη συγκεκριμένη ορολογία.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η σύνθεση της g με την h είναι η συνάρτηση $h\circ g$. Αυτή η συνάρτηση ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Ισχύει λοιπόν $D_{h \circ g} = (0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\boxed{(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \frac{e^{2\ln x} - 1}{e^{\ln x}} = \frac{e^{\ln x^2} - 1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}.}$$

B2. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων και για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right)' = \frac{(x^2 - 1)' x - (x^2 - 1)x'}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα. Επιπλέον, η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων και για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)' = \frac{({}^2 + 1)' x^2 - (x^2 + 1)(x^2)'}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 - 2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}.$$

Παρατηρούμε ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, επομένως η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$. Επομένως, η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

B3. **i.** Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, θα είναι και «1-1» σε αυτό, οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f, το οποίο και θα βρούμε. Από τη συνέχεια της f προκύπτει ότι

$$f((0, +\infty)) \overset{f \nearrow (0, +\infty)}{=} \left(\lim_{x \to 0^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = \mathbb{R},$$

όπου τα όρια για την τελευταία ισότητα υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το πρώτο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left[(x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x}\right] = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

- Το όριο στο $+\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty.$$

Συνεπώς θα ισχύει $\boxed{D_{f^{-1}}=f\left((0,+\infty)\right)=\mathbb{R}\,.}$

ii. Θα βρούμε αρχικά τις κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επειδή το πεδίο ορισμού είναι το $(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής σε όλα τα εσωτερικά σημεία του $(0,+\infty)$, θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη μόνο στο $x_0=0$.

Από προηγούμενο ερώτημα όμως ξέρουμε ότι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, άρα προκύπτει ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είδαμε επίσης στο προηγούμενο υποερώτημα ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Αναζητούμε λοιπόν πλάγια ασύμπτωτη. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1:=\lambda.$$

Επίσης,

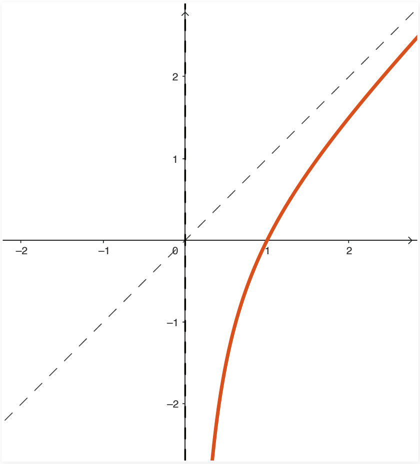
$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{x}\right)=0:=\beta.$$

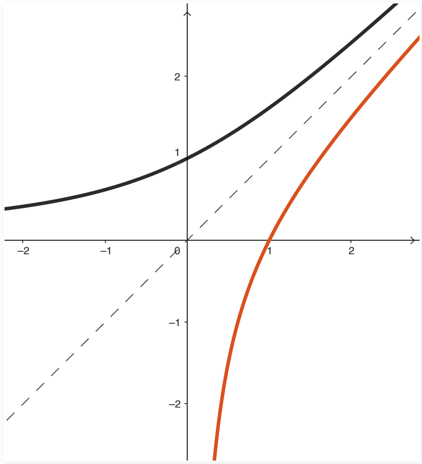
Έπεται λοιπόν ότι η ευθεία με εξίσωση

$$\boxed{y=\lambda x+\beta=x}$$

είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. Λαμβάνοντας υπόψη τη μονοτονία της f, καθώς και την κυρτότητα και τις ασύμπτωτες της C_f, σχεδιάζουμε τη γραφική της παράσταση στο ακόλουθο γράφημα (αριστερό σχήμα). Σε αυτό το γράφημα φαίνονται επίσης οι ασύμπτωτες της C_f που βρέθηκαν παραπάνω. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία $y=x$ και φαίνεται επίσης στο ακόλουθο γράφημα με μαύρο χρώμα (δεξιό σχήμα).





ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{x-f(x)}{1+e^x}=-\frac{1}{f(x)-x}\Leftrightarrow\frac{x-f(x)}{1+e^x}=\frac{1}{x-f(x)}\Leftrightarrow\left(x-f(x)\right)^2=1+e^x,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\left(x-f(x)\right)^2=1+e^x\Leftrightarrow\left|x-f(x)\right|=\sqrt{1+e^x}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=x-f(x)$ για $x\in\mathbb{R}$. Τότε, σύμφωνα με την παραπάνω ισότητα, ισχύει $\left|h(x)\right|=\sqrt{1+e^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή $\sqrt{1+e^x}\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι $\left|h(x)\right|\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επειδή η h είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f(0)=\sqrt{2}$, προκύπτει ότι

$$h(0)=-f(0)=-\sqrt{2}<0.$$

Είδαμε παραπάνω ότι η h διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα έπεται από την παραπάνω σχέση ότι $h(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\left|h(x)\right|=-h(x)$ και επομένως

$$-h(x)=\sqrt{1+e^x}\Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{1+e^x}\ \boxed{\Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{1+e^x}\text{, όπως θέλαμε.}}$$

Γ2. i. Ισχύει

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\le 0 \\ \sqrt{2}-x\ln(x+1), & x>0 \end{cases} = \begin{cases} x+\sqrt{1+e^x}, & x\le 0 \\ \sqrt{2}-x\ln(x+1), & x>0 \end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι συνεχής στο $x_0=0$, καθώς

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^+} g(x)=g(0)=\sqrt{2}.$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$. Πράγματι, η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x<0$ ισχύει

$$g'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\left(1+e^x\right)'=1+\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}>0.$$

Επειδή η g είναι επιπλέον και συνεχής στο $x_0=0$, θα είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $(-\infty,0]$.

Θα μελετήσουμε τώρα τη μονοτονία της g στο $(0,+\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$g'(x)=\left(\sqrt{2}-x\ln(x+1)\right)'=-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}. \quad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία ποσότητα είναι αρνητική. Ισχύει η συνεπαγωγή

$$x>0\Rightarrow x+1>1 \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln(x+1)>\ln 1 \Rightarrow \ln(x+1)>0. \quad (2)$$

Επιπλέον, για κάθε $x>0$ ισχύει ότι

$$\frac{x}{x+1}>0. \quad (3)$$

Από τις (1), (2), (3), προκύπτει ότι $g'(x)<0$ για κάθε $x>0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Υπολογίζουμε το σύνολο τιμών της g σε δύο βήματα:

- Ισχύει $g\nearrow(-\infty,0]$, άρα, λόγω της συνέχειας, προκύπτει ότι

$$g\left((-\infty,0]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty} g(x),g(0)\right]=\left(-\infty,\sqrt{2}\right],$$

όπου το όριο στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκε ως εξής:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{1+e^x}\right)=(-\infty)+\sqrt{1+0}=-\infty.$$

Καθώς $0 \in \left(-\infty, \sqrt{2}\right]$, υπάρχει $\rho_1 \in (-\infty, 0]$, ώστε $g(\rho_1) = 0$. Δεν μπορεί να ισχύει $\rho_1 = 0$, αφού $g(0) = \sqrt{2}$. Άρα $\rho_1 < 0$. Το ρ_1 είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(-\infty, 0]$, διότι η g είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα.

- Ισχύει $g \searrow (0, +\infty)$, άρα, λόγω της συνέχειας, προκύπτει ότι

$$g\left((0, +\infty)\right) = \left(\lim_{x \to +\infty} g(x), \lim_{x \to 0^+} g(x)\right) = \left(-\infty, \sqrt{2}\right),$$

όπου τα δύο όρια στο τελευταίο βήμα υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2} - x\ln(x+1)\right) = -\infty.$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{2} - x\ln(x+1)\right) = \sqrt{2}.$

Καθώς $0 \in \left(-\infty, \sqrt{2}\right]$, υπάρχει $\rho_2 \in (0, +\infty)$, ώστε $g(\rho_2) = 0$. Το ρ_2 είναι μοναδικό στο $(0, +\infty)$, γιατί g γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

Συγκεντρωτικά λοιπόν, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $\rho_1 < 0 < \rho_2$.

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = xg(g(x)) - x(x - \rho_1)g(x) + 2024(x - \rho_1)(x - \rho_2)$$

για $x \in [0, \rho_2]$.

- Η h είναι συνεχής στο $[0, \rho_2]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- $h(0) = \rho_1 \rho_2 2024$, η οποία είναι αρνητική διότι $\rho_1 < 0 < \rho_2$.
- $h(\rho_2) = \rho_2 g(g(\rho_2)) \overset{g(\rho_2)=0}{=} \rho_2 g(0) = \rho_2 \sqrt{2}$, η οποία είναι θετική, καθώς $\rho_2 > 0$.

Έχουμε λοιπόν $h(0)h(\rho_2) < 0$, οπότε από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (0, \rho_2)$ έτσι ώστε $h(\xi) = 0$. Θα αποδείξουμε ότι το ξ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης. Ισχύει η ισοδυναμία

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi g(g(\xi)) - \xi(\xi - \rho_1)g(\xi) + 2024(\xi - \rho_1)(\xi - \rho_2) = 0$$

$$\boxed{\overset{:\xi(\xi-\rho_1)(\xi-\rho_2)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{g(g(\xi))}{(\xi-\rho_1)(\xi-\rho_2)}-\frac{g(\xi)}{\xi-\rho_2}+\frac{2024}{\xi}=0,}$$

η οποία είναι πράγματι η δοσμένη εξίσωση.

Γ3. Θα αποδείξουμε ότι η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Για να το κάνουμε αυτό, υπολογίζουμε τα δύο πλευρικά όρια.

- Το αριστερό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+\sqrt{1+e^x}-\sqrt{2}}{x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\right)=1+\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

- Το δεξί όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}-x\ln(x+1)-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\ln(x+1)=0.$$

Συμπεραίνουμε ότι τα δύο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Στα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε υπολογίσει ότι

$$g'(x)=\begin{cases}1+\dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}, & x<0\\[2ex] -\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}, & x>0\end{cases}$$

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ και για κάθε $x<0$ ισχύει

$$g''(x)=\left(1+\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\right)'=\frac{2e^x\sqrt{1+e^x}-\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\cdot e^x}{4(1+e^x)}$$

$$=\frac{2e^x(1+e^x)-e^{2x}}{4(1+e^x)\sqrt{1+e^x}}=\frac{2e^x+e^{2x}}{4(1+e^x)\sqrt{1+e^x}}>0.$$

Έπεται ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0)$, άρα και «1-1» σε αυτό.

Έτσι, για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει ότι $g'(x_1)\neq g'(x_2)$. Άρα η g αποκλείεται να έχει παράλληλες εφαπτόμενες σε δύο σημεία με αρνητικές τετμημένες

Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$g''(x)=\left(-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\right)'=-\frac{1}{x+1}-\frac{x'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}<0.$$

Έπεται ότι η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$, άρα και «1-1» σε αυτό. Έτσι, για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει ότι $g'(x_1)\neq g'(x_2)$. Άρα η g αποκλείεται να έχει παράλληλες εφαπτόμενες σε δύο σημεία με θετικές τετμημένες.

Μένει να αποκλείσουμε την περίπτωση να υπάρχουν δύο παράλληλες εφαπτόμενες, μία σε σημείο με θετική τετμημένη και μία σε σημείο με αρνητική. Αυτό όμως αποκλείεται να ισχύει, διότι είδαμε στο Ερώτημα Γ2 ότι $g'(x)>0$ για $x\in(-\infty,0)$ και $g'(x)<0$ για $x\in(0,+\infty)$. Έτσι, αν $x_1<0<x_2$, τότε ισχύει $g'(x_1)>0>g'(x_2)$, άρα $g'(x_1)\neq g'(_2)$. Ομοίως, αν $x_2<0<x_1$, θα έχουμε $g'(x_1)<0<g'(x_2)$, οπότε $g'(x_1)\neq g'(x_2)$.

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι, αν $x_1\neq x_2$, τότε $g'(x_1)\neq g'(x_2)$. Συνεπώς δεν υπάρχουν εφαπτόμενες της C_g οι οποίες να είναι παράλληλες.

Γ4. Από το Ερώτημα Γ2 γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της g είναι το $\left(-\infty,\sqrt{2}\right]$, και μάλιστα η g παίρνει την τιμή $\sqrt{2}$ μόνο στη θέση $x=0$.Ισχύει λοιπόν $g(x)<\sqrt{2}$ για κάθε $x\neq 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\sqrt{2}$, επομένως προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{g(x)-\sqrt{2}}=-\infty. \quad (4)$$

Επιπλέον, για κάθε $x\neq 0$ ισχύει ότι

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)+\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-3\leq 1+1-3\ =-1.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με την (αρνητική) ποσότητα $g(x)-\sqrt{2}$, προκύπτει ότι για κάθε $x\neq 0$ ισχύει

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)+\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-3}{g(x)-\sqrt{2}} \geq -\frac{1}{g(x)-\sqrt{2}}.$$

Από τη σχέση (4) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{g(x)-\sqrt{2}}=+\infty$, οπότε από την προηγούμενη ανισότητα συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)+\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)-3}{g(x)-\sqrt{2}}=+\infty.$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Επιπλέον, αφού η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, θα πρέπει

$$f(0)=f(1)\Leftrightarrow 0=e^{1-\alpha}-\alpha$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $T(\alpha)=e^{1-\alpha}-\alpha$ για $\alpha\in\mathbb{R}$. Η παραπάνω εξίσωση τότε γράφεται ως $T(\alpha)=0$. Η T είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$T'(\alpha)=e^{1-\alpha}(1-\alpha)'-\alpha' = -e^{1-\alpha}-1<0.$$

Επομένως, η T είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και «1-1» σε αυτό. Παρατηρούμε ότι $T(1)=e^{1-1}-1=0$. Η αρχική εξίσωση που θέλαμε να λύσουμε είναι τότε ισοδύναμη με

$$T(\alpha)=0\Leftrightarrow T(\alpha)=T(1)\ \boxed{\overset{T:1-1}{\Leftrightarrow}\alpha=1.}$$

Δ2. Αφού $\alpha=1$, ισχύει για κάθε $x\geq 0$ ότι $f(x)=xe^{x-1}-x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\geq 0$ ισχύει

$$f'(x)=\left(xe^{x-1}-x\right)' = e^{x-1}+xe^{x-1}-1.$$

Επιπλέον, η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων στο $[0,+\infty)$ και για κάθε $x\geq 0$ ισχύει

$$f''(x)=\left(e^{x-1}+xe^{x-1}-1\right)'=e^{x-1}+e^{x-1}+xe^{x-1}$$
$$=2e^{x-1}+xe^{x-1}.$$

Για κάθε $x\geq 0$ ισχύει $2e^{x-1}>0$ και $xe^{x-1}\geq 0$. Επομένως, $f''(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$
- $f'(0)=e^{-1}-1=\frac{1}{e}-1<0$
- $f'(1)=1>0$

Επομένως, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$. Αυτό το ξ θα είναι μοναδικό γιατί η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Ισχύουν οι εξής συνεπαγωγές:

- $x<\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)<0.$
- $x>\xi\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)>0.$

Έτσι, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0		ξ		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\xi]$, γνησίως φθίνουσα στο $(\xi,+\infty)$ και έχει πράγματι μοναδικό κρίσιμο σημείο ξ. Σε αυτό το σημείο παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

$$f(\xi)=\xi e^{\xi-1}-\xi. \quad (1)$$

Πράγματι, αν $0\leq x\leq \xi$, τότε $f(x)\geq f(\xi)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\xi]$, ενώ, αν $x\geq\xi$, τότε $f(x)\geq f(\xi)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x\geq 0$ ισχύει ότι $f(x)\geq f(\xi)$.

Όμως, από τον ορισμό του ξ γνωρίζουμε ότι

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow e^{\xi-1}+\xi e^{\xi-1}-1=0$$

$$\Leftrightarrow e^{\xi-1}(1+\xi)=1 \Leftrightarrow e^{\xi-1}=\frac{1}{1+\xi}.$$

Άρα, με αντικατάσταση της τελευταίας ισότητας στη σχέση (1), παίρνουμε ότι

$$f(\xi)=\xi e^{\xi-1}-\xi=\xi\frac{1}{1+\xi}-\xi=\frac{\xi}{1+\xi}-\xi=\frac{\xi-\xi(1+\xi)}{1+\xi}$$

$$\boxed{=-\frac{\xi^2}{\xi+1}, \text{ όπως θέλαμε.}}$$

Δ3. Στο προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι $f''(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τουλάχιστον τρία σημεία, έστω

$$A(x_1,f(x_1)),\ B(x_2,f(x_2)),\ \Gamma(x_3,f(x_3)),$$

με $x_1<x_2<x_3$. Τότε η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-(\lambda x+\beta)=f(x)-\lambda x-\beta$$

έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες $x_1<x_2<x_3$, δηλαδή $g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=0$. Τότε όμως θα έχουμε:

- Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- $g(x_1)=g(x_2)=0$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi_1\in(x_1,x_2)$, έτσι ώστε $g'(\xi_1)=0$.

- Η g είναι συνεχής στο $[x_2,x_3]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_2,x_3) ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$g(x_2)=g(x_3)=0$$

Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi_2\in(x_2,x_3)$, έτσι ώστε $g'(\xi_2)=0$.

- Η $g'(x)=f'(x)-\lambda$ είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$$

Από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (x_2, x_3)$, έτσι ώστε $g''(\xi) = 0$.

Ισχύει $g'(x) = f'(x) - \lambda$ και $g''(x) = f''(x)$, επομένως η σχέση $g''(\xi) = 0$ δίνει ισοδύναμα ότι $f''(\xi) = 0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού έχουμε δει ότι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \lambda x + \beta$ έχει το πολύ δύο λύσεις.

Δ4. Η εξίσωση εφαπτομένης σε ένα τυχαίο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in [0, +\infty)$ έχει εξίσωση

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Το σημείο $A(0, -1)$ ανήκει στην ευθεία ε αν και μόνο αν επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή αν

$$-1 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 f'(x_0) = -1$$

$$\Leftrightarrow x_0 e^{x_0 - 1} - x_0 - x_0\left(e^{x_0 - 1} + x_0 e^{x_0 - 1} - 1\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow -x_0^2 e^{x_0 - 1} = -1 \Leftrightarrow x_0^2 e^{x_0 - 1} - 1 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $T(x) = x^2 e^{x-1} - 1$ για $x \geq 0$. Η παραπάνω εξίσωση τότε γράφεται ως $T(x) = 0$. Παρατηρούμε ότι $T(1) = 0$. Θα δείξουμε ότι η ρίζα $x = 1$ είναι μοναδική χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της T. Η T είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$T'(x) = \left(x^2 e^{x-1} - 1\right)' = 2x e^{x-1} + x^2 e^{x-1} = e^{x-1}\left(x^2 + 2x\right).$$

Για κάθε $x \geq 0$ ισχύει ότι $x^2 + 2x \geq 0$ ως άθροισμα μη αρνητικών αριθμών. Επιπλέον, η ισότητα ισχύει όταν

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \overset{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

Έτσι, θα έχουμε $T'(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x = 0$. Συνεπώς η T είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και άρα το $x_0 = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $x_0^2 e^{x_0 - 1} - 1 = 0$.

Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$\varepsilon: y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = 1 \cdot (x - 1) + 0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow y = x - 1.}$$

Δ5. Στο Ερώτημα Δ2 είδαμε ότι $f(\xi)=-\dfrac{\xi^2}{\xi+1}$. Έτσι, η αποδεικτέα ανισότητα γίνεται

$$\frac{f(x)}{1-x}+\frac{\xi^2}{(1-\xi)(1+\xi)}<0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{1-x}-\frac{-\dfrac{\xi^2}{1+\xi}}{1-\xi}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{1-x}-\frac{f(\xi)}{1-\xi}<0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{1-x}<\frac{f(\xi)}{1-\xi} \Leftrightarrow \frac{-f(x)}{1-x}>\frac{-f(\xi)}{1-\xi}$$

$$\overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} \frac{f(1)-f(x)}{1-x}>\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}.$$

Θεωρούμε τυχόν $x\in(\xi,1)$. Τότε η f ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[\xi,x]$ και $[x,1]$ και επομένως υπάρχουν $x_1\in(\xi,x)$ και $x_2\in(x,1)$, έτσι ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi},\quad f'(x_2)=\frac{f(1)-f(x)}{1-x}.$$

Στο Ερώτημα Δ2 είδαμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$, άρα και στο υποδιάστημα $[\xi,1]$. Επομένως, καθώς

$$\xi<x_1<x<x_2<1,$$

προκύπτει ότι

$$x_2>x_1 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x_2)>f'(x_1) \Leftrightarrow \frac{f(1)-f(x)}{1-x}>\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi},$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.