# Διαγώνισμα 4.11

## ΘΕΜΑ Α
### Λύση

**Α1.** Σχολικό βιβλίο, σελ. 76.

**Α2.** Σχολικό βιβλίο, σελ. 216.

**Α3.** **i)** Λ, **ii)** Λ , **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Λ

## ΘΕΜΑ Β
### Λύση

**Β1.** Αρχικά, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f, g$. Ισχύει $A_f = \mathbb{R}$, ενώ για την $g$ παίρνουμε τον περιορισμό

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1$$

Επομένως, $A_g = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Στη συνέχεια, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $h = f \circ g$ ως εξής:

$$\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ g(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Προκύπτει λοιπόν ότι $A_h = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Για κάθε $x \in A_h$ ισχύει

$$h(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\boxed{= x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2 - 1}.}$$

**Β2.** Για να δείξουμε ότι η γραφική παράσταση της $h$ δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες, θα αποδείξουμε ότι τα $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x), \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ δεν είναι πραγματικοί αριθμοί. Είναι

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - 1 - 2\sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1}^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1}\left(\sqrt{x^2 - 1} - 2\right) = +\infty,$$

όπου για το τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty$. Επίσης,

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 1}\left(\sqrt{x^2 - 1} - 2\right) = -\infty,$$

όπου και πάλι χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$. Εφόσον κανένα από τα δύο όρια δεν είναι πραγματικός αριθμός, συμπεραίνουμε ότι η $C_h$ δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

**B3.** **i.** Αυτό το όριο γράφεται ως

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{2}}=0.$$

**ii.** Αυτό το όριο ισούται με

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-1}-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-2}$$

$$\overset{|x|=-x}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{-x\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{-\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}-\frac{2}{x}}=\frac{1-0}{-\sqrt{1-0}}=-1,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $|x|=-x$, καθώς $x\to-\infty$.

**B4.** Η $h$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ και για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ ισχύει

$$h'(x)=\left(x^2-1-2\sqrt{x^2-1}\right)'=2x-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot\left(x^2-1\right)'=2x-\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Επομένως, η εξίσωση $h'(x)=\dfrac{10x}{\sqrt{x^2-1}}-10x$ ισοδύναμα γίνεται:

$$2x-\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{10x}{\sqrt{x^2-1}}-10x\Leftrightarrow 2x+10x=\frac{10x}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\Leftrightarrow 12x=\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow 12x-\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}=0\Leftrightarrow 12x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 12x=0 \quad \acute{\eta} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=1 \Leftrightarrow x=0 \quad \acute{\eta} \quad \sqrt{x^2-1}=1 \Leftrightarrow x=0 \quad \acute{\eta} \quad x^2=2$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad \acute{\eta} \quad x=\sqrt{2} \quad \acute{\eta} \quad x=-\sqrt{2}.$$

Όμως $0 \in A_h$, άρα απορρίπτεται, ενώ οι αριθμοί $\boxed{x=\pm\sqrt{2}}$ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $h$ και επομένως είναι οι μόνες δεκτές λύσεις της εξίσωσης.

## ΘΕΜΑ Γ

## Λύση

**Γ1.** Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x_0=0$, δηλαδή ότι

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x).$$

- Το αριστερό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=4+\ln(\lambda+4).$$

- Το δεξί όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x-\lambda x}{3x^2+x} \overset{:x>0}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}-\lambda}{3x+1}=\frac{1-\lambda}{1}=1-\lambda.$$

Θα πρέπει λοιπόν να ισχύει ότι

$$4+\ln(\lambda+4)=1-\lambda \Leftrightarrow 3+\lambda+\ln(\lambda+4)=0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $T(x)=3+x+\ln(x+4)$, $x>-4$. Η $T$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-4,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x>-4$ ισχύει $T'(x)=1+\frac{1}{x+4}>0$. Άρα η T είναι γνησίως αύξουσα στο $(-4,+\infty)$, οπότε και «1-1» σε αυτό. Παρατηρούμε ότι $T(-3)=0$, επομένως η μοναδική ρίζα της T είναι η $x=3$. Έτσι, η εξίσωση $3+\lambda+\ln(\lambda+4)=0$ ισοδύναμα γράφεται

$$T(\lambda)=0 \Leftrightarrow T(\lambda)=T(-3) \boxed{\overset{T:1-1}{\Leftrightarrow} \lambda=-3.}$$

Έτσι, τελικά ο τύπος της $f$ θα είναι:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{3\eta\mu x+1}+\ln(-3+4), & -\dfrac{1}{3}<x\le 0 \\ \dfrac{\eta\mu x-(-3)x}{3x^2+x}, & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{4}{3\eta\mu x+1}, & -\dfrac{1}{3}<x\le 0 \\ \dfrac{\eta\mu x+3x}{3x^2+x}, & 0<x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

**Γ2.** Για να δείξουμε ότι η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $A(0,4)$ ορίζεται, θα δείξουμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Θα υπολογίσουμε τα δύο πλευρικά όρια ξεχωριστά. Το αριστερό όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{4}{3\eta\mu x+1}-4}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4-4(3\eta\mu x+1)}{x(3\eta\mu x+1)}$$

$$\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{-12\sigma\upsilon\nu x}{(3\eta\mu x+1)+3x\sigma\upsilon\nu x}=\frac{-12}{1+0}=-12,$$

όπου στο τρίτο βήμα της ισότητας χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Το δεξί όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\eta\mu x+3x}{3x^2+x}-4}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+3x-4(3x^2+x)}{x(3x^2+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x-x-12x^2}{3x^3+x^2}\overset{:x^2}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\eta\mu x-x}{x^2}-12}{3x+1}=\frac{0-12}{0+1}=-12,$$

όπου στο πέμπτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital ως εξής:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x-x}{x^2}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

Εφόσον και τα δύο πλευρικά όρια είναι ίσα με $-12$, η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=-12$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0,4)$ θα είναι

$$\boxed{(\varepsilon): y-4=-12(x-0)\Leftrightarrow y=-12x+4.}$$

**Γ3.** Τα κρίσιμα σημεία της $f$ είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού $A_f=\left(-\frac{1}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ στα οποία η $f$ δεν παραγωγίζεται, καθώς και τα εσωτερικά σημεία στα οποία η $f'$ ισούται με $0$.

Για $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$ έχουμε

$$f(x)=\frac{4}{3\eta\mu x+1}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων, με

$$f'(x)=\frac{-12\sigma\upsilon\nu x}{(3\eta\mu x+1)^2}.$$

Για κάθε $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$ ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu x>0$ και $(3\eta\mu x+1)^2>0$. Επομένως, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{1}{3},0\right)$, άρα η $f$ δεν έχει κρίσιμα σημεία σε αυτό το διάστημα. Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. έχουμε

$$f(x)=\frac{\eta\mu x+3x}{3x^2+x}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{(\sigma\upsilon\nu x+3)(3x^2+x)-(\eta\mu x+3x)(6x+1)}{(3x^2+x)^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=(\sigma\upsilon\nu x+3)(3x^2+x)-(\eta\mu x+3x)(6x+1)$$

για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Τότε, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(3x^2+x)^2} \qquad (1)$$

Η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξη παραγωγίσιμων και ισχύει

$$\begin{aligned} g'(x)&=-\eta\mu x(3x^2+x)+(\sigma\upsilon\nu x+3)(6x+1)-(\sigma\upsilon\nu x+3)(6x+1)-6(\eta\mu x+3x)\\ &=-\eta\mu x(3x^2+x)-6(\eta\mu x+3x).\end{aligned}$$

Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύουν τα εξής:

- $\eta\mu x\geq 0$ με ισότητα μόνο για $x=0$,
- $3x^2+x\geq 0$ με ισότητα μόνο για $x=0$,
- $\eta\mu x+3x\geq 0$ με ισότητα μόνο για $x=0$.

Επομένως, για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ θα ισχύει ότι

$$-\eta\mu x(3x^2+x)-6(\eta\mu x+3x)\leq 0$$

με ισότητα μόνο για $x=0$. Ισοδύναμα, ισχύει $g'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $g'(0)=0$. Άρα η $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $g(x)<g(0)$, δηλαδή

$$g(x)<(\sigma\upsilon\nu 0+1)\cdot 0-0\cdot 1=0.$$

Άρα από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα η $f$ δεν έχει κρίσιμα σημεία στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Τέλος, από το Γ2 έχουμε $f'(0)=-12$, άρα ούτε το $x_0=0$ είναι κρίσιμο σημείο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η $f$ δεν έχει καθόλου κρίσιμα σημεία.

**Γ4.** Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$, $-\frac{1}{3}<\alpha\leq 0$ έχει εξίσωση

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha).$$

Για να βρούμε το σημείο τομής της $C_f$ με τον $y'y$, θέτουμε $x=0$. Τότε

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(0-\alpha)\Leftrightarrow y=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha).$$

Αφού το $\alpha$ μεταβάλλεται σύμφωνα με τον χρόνο $t$, ομοίως θα μεταβάλλεται και το $y$. Ισχύει μάλιστα $y(t)=f(\alpha(t))-\alpha(t)f'(\alpha(t))$. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη αυτής της ισότητας, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} y'(t) &= \left(f(\alpha(t))-\alpha(t)f'(\alpha(t))\right)' \\ &= \alpha'(t)f'(\alpha(t))-\alpha'(t)f'(\alpha(t))-\alpha(t)\alpha'(t)f''(\alpha(t)) \\ &= -\alpha(t)\alpha'(t)f''(\alpha(t)) \end{aligned}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\alpha'(t)=-1$ μονάδες/δευτερόλεπτο. Τη χρονική στιγμή $t_0$ κατά την οποία $\alpha(t_0)=0$, θα ισχύει λοιπόν ότι

$$\boxed{y'(t_0)=-\alpha(t_0)\alpha'(t_0)f''(\alpha(t_0))=0 \text{ μονάδες/δευτερόλεπτο.}}$$

## ΘΕΜΑ Δ
## Λύση

**Δ1.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων και ισχύει

$$f'(x)=\left(x^2-\sigma\upsilon\nu x\right)'=2x+\eta\mu x.$$

Επιπλέον, η $f'$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=2+\sigma\upsilon\nu x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η $f$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f'(0)=0$. Επειδή η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αυτή η ρίζα θα είναι και μοναδική. Επομένως, για κάθε $x>0$, ισχύει η ισοδυναμία:

$$x>0\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0.$$

Το πρόσημο της $f'$ και η μονοτονία της $f$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Επομένως, η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ την τιμή $f(0)=0^2-\sigma\upsilon\nu 0=-1$. Πράγματι, αν $x\le 0$, τότε $f(x)\ge f(0)$, καθώς η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, ενώ, αν $x\ge 0$, τότε $f(x)\ge f(0)$, καθώς η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\ge f(0)$.

**Δ2.** Παρατηρούμε ότι

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2-\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}>0.$$

Η $f$ είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ ως διαφορά συνεχών και επιπλέον ισχύει

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)f(0)=(-1)\cdot\frac{\pi^2}{4}<0.$$

Έτσι, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$. Το $x_1$ είναι το μοναδικό σημείο στο $(-\infty,0)$ με αυτήν την ιδιότητα, διότι η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η $f$ είναι άρτια στο $\mathbb{R}$, καθώς:

- Το πεδίο ορισμού της είναι το $A_f=\mathbb{R}$ και προφανώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-x\in\mathbb{R}$.
- Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(-x)=(-x)^2-\sigma\upsilon\nu(-x)=x^2-\sigma\upsilon\nu x=f(x).$$

Ισχύει ότι $-x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $f(-x_1)=f(x_1)=0$, οπότε η $f$ έχει ρίζα και στο διάστημα $(0,+\infty)$ την $x_2=-x_1$. Αυτή η ρίζα είναι μοναδική στο $(0,+\infty)$, καθώς η $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το διάστημα. Έτσι, συνολικά, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες οι οποίες είναι μεταξύ τους αντίθετες.

**Δ3. i.** Αφού η $f$ είναι άρτια, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)=f(-x)$. Επομένως, παραγωγίζοντας ως προς $x$, έχουμε $f'(x)=-f'(-x)$. Για $x=x_1$ παίρνουμε ότι

$$f'(x_1)=-f'(-x_1)\overset{x_2=-x_1}{\Leftrightarrow}f'(x_1)=-f'(x_2).$$

Έστω τώρα $\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $A(x_1,f(x_1))$ με τον άξονα $x'x$ και $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $B(x_2,f(x_2))$ με τον άξονα $x'x$. Επειδή $\varepsilon\varphi\omega=f'(x_1)$ και $\varepsilon\varphi\theta=f'(x_2)$, θα έχουμε ότι

$$\varepsilon\varphi\omega=-\varepsilon\varphi\theta=\varepsilon\varphi(\pi-\theta).\quad(1)$$

Αν ισχύει ότι $\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $\pi-\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, τότε $\varepsilon\varphi\omega>0$ και $\varepsilon\varphi(\pi-\theta)<0$ που είναι άτοπο λόγω της σχέσης (1). Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο στην περίπτωση που $\omega\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ και $\pi-\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς, είτε θα ισχύει ότι $\omega,\ \pi-\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είτε θα ισχύει ότι $\omega,\ \pi-\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Όμως η συνάρτηση $g(x)=\varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, αλλά και στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, οπότε σε κάθε περίπτωση προκύπτει από τη σχέση (1) ότι

$$\boxed{\omega=\pi-\theta\Leftrightarrow\omega+\theta=\pi.}$$

Με άλλα λόγια, οι δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές.

**ii.** Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$f(x)=\frac{f'(x_2)(x-x_2)-1}{2}\Leftrightarrow 2f(x)-f'(x_2)(x-x_2)+1=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)+1+\left[f(x)-f'(x_2)(x-x_2)\right]=0$$

Αφού η $f$ είναι κυρτή, η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενή της στο σημείο $A(x_2, f(x_2))$, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Ισχύει δηλαδή

$$f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)+f(x_2)\overset{f(x_2)=0}{\Leftrightarrow} f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=x_2$. Από το Δ1 γνωρίζουμε επιπλέον ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq -1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Συνοψίζοντας λοιπόν έχουμε ότι:

- $f(x)+1\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.
- $f(x)-f'(x_2)(x-x_2)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=x_2>0$.

Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\left[f(x)+1\right]+\left[f(x)-f'(x_2)(x-x_2)\right]\geq 0$$

και, για να ισχύει η ισότητα, θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι επιμέρους ισότητες $f(x)=-1$ και $f(x)=f'(x_2)(x-x_2)$. Αυτές όμως δεν έχουν κοινή λύση, αφού η μία ισχύει για $x=0$ και η άλλη για $x=x_2>0$. Άρα η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

**Δ4.** Έστω $F$ η αρχική της $f$ για την οποία ισχύει ότι $F(x_1)=0$. Τότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$F'(x)=f(x)=x^2-\text{συν}x=\left(\frac{x^3}{3}-\text{ημ}x\right)'.$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. παίρνουμε ότι

$$F(x)=x^3-\text{ημ}x+c,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αντικαθιστώντας $x=x_1$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $F(x_1)=0$, παίρνουμε ότι

$$0=x_1^3-\text{ημ}x_1+c\Leftrightarrow c=\text{ημ}x_1-x_1^3$$

Προκύπτει λοιπόν ότι $F(x)=x^3-\text{ημ}x-x_1^3+\text{ημ}x_1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αφού η $f$ έχει μοναδικές ρίζες τις $x_1<x_2$ και είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(x_1,x_2)$. Ισχύει $0\in(x_1,x_2)$ και $f(0)=-1$, επομένως $f(x)<0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$.

Εφόσον $f = F'$, η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι η $F$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$. Επομένως, για κάθε $x \in (x_1, x_2]$ ισχύει ότι

$$F(x) < F(x_1) \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} - \eta\mu(x) + \eta\mu(x_1) - \frac{x_1^3}{3} < 0$$

$$\boxed{\Leftrightarrow x - x_1^3 < 3(\eta\mu x - \eta\mu x_1)\text{, το οποίο είναι το ζητούμενο.}}$$