# Διαγώνισμα 4.12

## ΘΕΜΑ Α
### Λύση

**Α1.** Σχολικό βιβλίο, σελ. 99.

**Α2.** Σχολικό βιβλίο, σελ. 25.

**Α3.** Σχολικό βιβλίο, σελ. 128.

Καλό είναι να συμπεριλαμβάνουμε και το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης, που αναφέρεται κάτω από τον ορισμό.

**Α4.** **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Λ

**Σχόλια για τα Σ/Λ:**

**i.** Λάθος: **Χρειάζεται πολλή προσοχή** στα σημεία στα οποία πρέπει να ισχύει η συνέχεια/παραγωγισιμότητα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η πρόταση είναι λάθος επειδή η συνάρτηση $g\circ f$ μπορεί να μην ορίζεται καν στο σημείο $g(x_0)$, πόσο μάλλον να είναι παραγωγίσιμη σε αυτό. Η πρόταση θα ήταν σωστή αν το τελευταίο μέρος ήταν «...τότε η σύνθεση $g\circ f$ είναι υποχρεωτικά παραγωγίσιμη στο $x_0$».

**ii.** Σωστό.

**iii.** Σωστό: Η πρόταση είναι αληθής λόγω του θεωρήματος Rolle. Οι υποθέσεις του θεωρήματος ικανοποιούνται διότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

**Σημείωση**: Το θεώρημα Rolle απαιτεί να είναι η $f$ συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$. Εδώ αυτές οι υποθέσεις δεν δίνονται αυτούσιες στην εκφώνηση, όμως μας έχει δοθεί ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$, το οποίο είναι μια ισχυρότερη υπόθεση. Εφόσον δηλαδή ισχύει αυτή, θα ισχύουν και οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

**iv.** Σωστό: Δες το θεώρημα 3 στη σελ. 214 του σχολικού βιβλίου. Εδώ η πρόταση έχει την αντίστροφη φορά της ανισότητας, αλλά, ακόμη και έτσι, εκείνο το θεώρημα συνεχίζει να ισχύει (φυσικά με την αντίστροφη φορά σε όλες τις ανισότητες). Η υπόθεση ότι η $f$ δεν είναι παντού μηδέν ικανοποιείται λόγω της συνθήκης $f(2)<0$.

## ΘΕΜΑ Β
### Λύση

**Β1.** Η δοθείσα ανισότητα γράφεται και ως $xe^x+1>0$. Επομένως, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=xe^x+1,\ x\in\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$g'(x)=(x)'e^x+x(e^x)'+(1)'=e^x+xe^x=(x+1)e^x.$$

Θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της $g'$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow e^x(x+1)>0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x+1>0 \Leftrightarrow x>-1.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η $f'$ είναι αρνητική για $x<-1$ και μηδενίζεται μόνο για $x=-1$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Συμπεραίνουμε ότι η $g$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x_0=-1$. Αυτό το ολικό ελάχιστο είναι

$$g(-1)=(-1)e^{-1}+1=1-e^{-1}.$$

Πράγματι, αν $x\le -1$, τότε $g(x)\ge g(-1)$, καθώς η $g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$, ενώ, αν $x\ge -1$, τότε $g(x)\ge g(-1)$, καθώς η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(x)\ge g(-1)$.

Επειδή ισχύει ότι $e^{-1}<1$, θα έχουμε ότι $g(-1)>0$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x)\ge g(-1)>0,$$

δηλαδή $\boxed{g(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.}$

**B2.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'+(x+1)'$$

$$=e^x+(x-1)e^x+1=xe^x+1=g(x).$$

Από το προηγούμενο ερώτημα, ξέρουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε από την προηγούμενη ισότητα έπεται ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από την παραπάνω σχέση έπεται ότι $f''(x)=g'(x)$.

Το πρόσημο της $f'$ δίνεται στον πίνακα του Ερωτήματος Β1. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας για την $f$.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\frown$ | | $\smile$ |

- Η $f$ είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,-1)$ και κυρτή στο $(-1,+\infty)$.
- Η γραφική παράσταση της $f$ παρουσιάζει σημείο καμπής το $(-1,f(-1))$. Καθώς $f(-1)=-2e^{-1}$, αυτό το σημείο είναι το $(-1,-2e^{-1})$.

**Β3.** Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f\nearrow\mathbb{R}$. Επειδή $f$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R},$$

όπου τα δύο όρια στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το όριο στο $+\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left((x-1)e^x+x+1\right)=(+\infty-1)\cdot(+\infty)+(+\infty)+1=+\infty.$$

- Το όριο στο $-\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^x+x+1\right). \qquad (1)$$

Για τον πρώτο όρο χρησιμοποιούμε τον κανόνα De L' Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x\overset{-\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\frac{1}{e^x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}}\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0.$$

Ο κανόνας De L' Hospital χρησιμοποιήθηκε στο τρίτο βήμα για την απροσδιόριστη μορφή $-\infty/+\infty$. Ισχύει επιπλέον ότι $\lim_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$, άρα από τη σχέση (1) και την παραπάνω ισότητα προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left((x-1)e^x+x+1\right)=0+(-\infty)=-\infty.$$

Σχετικά με το πρόσημο της $f$ για τις διάφορες τιμές του $x$, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $f(0)=0$. Καθώς όμως η $f$ είναι γνησίως αυξουσα, έπεται ότι:

- $x>0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0) \Leftrightarrow f(x)>0$.
- $x<0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(0) \Leftrightarrow f(x)<0$.

Το πεδίο ορισμού της $h$ είναι το $D_h=\mathbb{R}$ και η $h$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$h'(x)=\frac{(e^x-x)'(x^2+1)-(e^x-x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{(e^x-1)(x^2+1)-2x(e^x-x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{x^2e^x+e^x-x^2-1-2xe^x+2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+1)+x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{e^x(x-1)^2+(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{(x-1)(e^x(x-1)+x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{(x-1)f(x)}{(x^2+1)^2}.$$

Επειδή ισχύει ότι $(x^2+1)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πρόσημο της $h'$ εξαρτάται μόνο από τον αριθμητή $(x-1)f(x)$. Το πρόσημο της $f$ είναι γνωστό από το προηγούμενο ερώτημα. Επομένως, μπορούμε να σχηματίσουμε τον πίνακα προσήμων για την $h'$ απ' όπου θα προκύψουν και τα διαστήματα μονοτονίας της $h$.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $h'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $h(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Λόγω της συνέχειας της $h$ στα σημεία $x_0=0$ και $x_1=1$, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Η $h$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[1,+\infty)$.
- Η $h$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,1]$.

## ΘΕΜΑ Γ
## Λύση

**Γ1.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=x\ln x+x$$

για κάθε $x>0$. Η $h$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\geq 0$ ισχύει

$$h'(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'+(x)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1=\ln x+2.$$

Θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της $h'$. Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$h'(x)>0\Leftrightarrow \ln x+2>0\Leftrightarrow \ln x>-2\Leftrightarrow x>e^{-2}.$$

Ομοίως, μπορούμε να δούμε ότι η $h'$ είναι αρνητική για $x\in\left(0,e^{-2}\right)$ και μηδενίζεται για $x=e^{-2}$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας για την $h$:

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Ο αριθμός $e^{-1}$ ανήκει στο διάστημα $\left[e^{-2},+\infty\right)$, στο οποίο η $h$ είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, για κάθε $x>e^{-1}$ ισχύει

$$h(x)>h\left(e^{-1}\right)=e^{-1}\ln e^{-1}+e^{-1}=e^{-1}\cdot(-1)+e^{-1}=0,$$

δηλαδή $\boxed{x\ln x+x>0}$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

**Γ2.** Η $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(e^{-1},+\infty\right)$ και ισχύει

$$g'(x)=\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}f'(x),$$

οπότε η ζητούμενη σχέση $g'(x)=1+\dfrac{g(x)}{x}$ γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$g'(x)=1+\frac{g(x)}{x}\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=1+\frac{e^{f(x)}}{x}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $e^{-f(x)}\neq 0$, η τελευταία ισότητα γράφεται ως

$$e^{f(x)}f'(x)=1+\frac{e^{f(x)}}{x}\Leftrightarrow f'(x)=e^{-f(x)}+\frac{1}{x},$$

το οποίο ισχύει για κάθε $x \geq 1$ από την υπόθεση του προβλήματος.

**Γ3.** Η ισότητα $g'(x) = 1 + \frac{g(x)}{x}$ ισοδύναμα γράφεται ως εξής:

$$g'(x) = 1 + \frac{g(x)}{x} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} xg'(x) = x + g(x) \Leftrightarrow xg'(x) - g(x) = x$$

$$\overset{:x^2>0}{\Leftrightarrow} \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2} = \frac{x}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{x}\right)' = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{x}\right)' = (\ln x)'$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει έτσι ότι $\frac{g(x)}{x} = \ln x + c$ για κάθε $x > e^{-1}$, όπου $c$ είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός.

Μας έχει δοθεί ότι $f(1) = 0$, οπότε $g(1) = e^{f(1)} = e^0 = 1$. Αντικαθιστώντας λοιπόν $x = 1$ στην παραπάνω ισότητα, παίρνουμε ότι

$$\frac{g(1)}{1} = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 1.$$

Επομένως, για κάθε $x > e^{-1}$ ισχύει

$$\frac{g(x)}{x} = \ln x + 1 \Leftrightarrow g(x) = x\ln x + x$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} = x\ln x + x$$

$$\boxed{\Leftrightarrow f(x) = \ln(x\ln x + x).}$$

Σημειώνουμε ότι στο τελευταίο βήμα μπορούμε να θεωρήσουμε τους λογάριθμους, καθώς έχουμε δείξει στο Ερώτημα Γ1 ότι $x\ln x + x > 0$ για κάθε $x > e^{-1}$.

**Γ4.** Η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $(1, f(1))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1). \quad (1)$$

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(e^{-1}, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln x + x}(x\ln x + x)' = \frac{x \cdot (\ln x)' + (x)'\ln x + (x)'}{x\ln x + x}$$

$$= \frac{x \cdot \frac{1}{x} + \ln x + 1}{x\ln x + x} = \frac{2 + \ln x}{x\ln x + x}.$$

Ισχύει λοιπόν $f'(1)=2$. Γνωρίζουμε επίσης από πριν ότι $f(1)=0$. Άρα, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1), παίρνουμε ότι η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $(1,f(1))$ είναι η

$$\boxed{(\varepsilon): y=2x-2}$$

**Γ5.** Γνωρίζουμε ότι $\ln x \le x-1$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$. Προκύπτει έτσι ότι

Αυτή η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη.

$$f(x)=\ln(x\ln x+x)\le x\ln x+x-1$$

για κάθε $x>e^{-1}$, όπου χρησιμοποιήσαμε την παραπάνω ανισότητα για την ποσότητα $y=x\ln x+x$. Μάλιστα, στην τελευταία ανισότητα, η ισότητα ισχύει μόνο όταν $y=1$, δηλαδή όταν $x\ln x+x=1$. Αυτή η ισότητα προφανώς και δεν ισχύει για κάθε $x\in[1,2]$. Για παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι δεν ισχύει για $x=\sqrt{e}\in(1,2)$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα 3 στη σελ. 214 του σχολικού βιβλίου, για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα θα ισχύει η γνήσια ανισότητα

$$\int_1^2 f(x)dx<\int_1^2 (x\ln x+x-1)dx. \quad (2)$$

Χωρίζουμε το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους σε δύο μέρη και τα υπολογίζουμε ξεχωριστά. Το πρώτο μέρος θα είναι το

$$I=\int_1^2 x\ln x dx,$$

το οποίο υπολογίζουμε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_1^2 x\ln x\, dx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\, dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot(\ln x)'\,dx$$

$$=\frac{4}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 1-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=2\ln 2-\int_1^2\frac{x}{2}dx$$

$$=2\ln 2-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}.$$

Το δεύτερο μέρος είναι ίσο με

$$\int_1^2 (x-1)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=\left(\frac{4}{2}-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, παίρνουμε τελικά από τη σχέση (2) ότι

$$\int_1^2 f(x)dx < \int_1^2 x\ln x dx + \int_1^2 (x-1)dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{= 2\ln 2 - \frac{1}{4}, \text{ που είναι και το ζητούμενο.}}$$

## ΘΕΜΑ Δ

### Λύση

**Δ1.** Θα λύσουμε αυτό το ερώτημα με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, συνεπώς υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Στην ισότητα που μας έχει δοθεί, αν αντικαταστήσουμε με $x = x_0$, παίρνουμε

$$f^2(x_0) + f(x_0) = 2x_0^2 + x_0 + 3 \overset{f(x_0)=0}{\Leftrightarrow} 2x_0^2 + x_0 + 3 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση όμως είναι δευτεροβάθμια και έχει διακρίνουσα ίση με $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 2\cdot 3 = 1 - 24 = -23 < 0$. Αυτό σημαίνει ότι αυτή η εξίσωση είναι αδύνατη. Καταλήγουμε έτσι σε άτοπο, καθώς είναι αδύνατο το $x_0$ να είναι λύση της εξίσωσης $2x^2 + x + 3 = 0$. Επομένως, θα ισχύει ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Σημείωση:**

Βλέπουμε ότι για τη λύση χρειάστηκαν μόνο γνώσεις εξισώσεων β΄ βαθμού. Ίσως κάποιες φορές να αξίζει να δοκιμάσουμε απλές μεθόδους πριν προχωρήσουμε σε πιο σύνθετες (μονοτονία, ακρότατα, όπως πιθανά να προσπαθούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει σε αυτό το ερώτημα).

**Δ2.** Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της δοσμένης ισότητας παίρνουμε

$$\left(f^2(x)\right)' + f'(x) = \left(2x^2\right)' + (x)' + (3)' \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) + f'(x) = 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\left(2f(x) + 1\right) = 4x + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Καθώς η $f$ είναι συνεχής και δεν έχει ρίζες (όπως δείξαμε στο Γ1), συμπεραίνουμε ότι διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον, επειδή $f(1) = 2 > 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως $2f(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε όμως προκύπτει από την παραπάνω ισότητα ότι

$$f'(x)(2f(x)+1)=4x+1 \overset{:(2f(x)+1)\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x)=\frac{4x+1}{2f(x)+1}$$

Συνεπώς, για να προσδιορίσουμε το πρόσημο της παραγώγου $f'$, δουλεύουμε ως εξής:

$$f'(x)>0 \overset{2f(x)+1>0}{\Leftrightarrow} 4x+1>0 \Leftrightarrow 4x>-1 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{4}.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x<-\frac{1}{4}$ και $f'(x)=0$ μόνο για $x=-\frac{1}{4}$. Προκύπτει λοιπόν για την $f$ ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

| $x$ | $-\infty$ | $-1/4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

Εφόσον η $f$ είναι συνεχής στο σημείο $x=-\frac{1}{4}$, παίρνουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$.

- Η $f$ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στη θέση $x=-\frac{1}{4}$. Πράγματι, αν $x\leq -\frac{1}{4}$, τότε $f(x)\geq f\left(-\frac{1}{4}\right)$, καθώς η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$, ενώ, αν $x\geq -\frac{1}{4}$, τότε $f(x)\geq f\left(-\frac{1}{4}\right)$, καθώς η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\geq f\left(-\frac{1}{4}\right)$.

### Δ3. Α΄ τρόπος:

Θέτουμε $y=f(x)$ στην αρχική σχέση που μας έχει δοθεί. Τότε ισοδύναμα θα έχουμε ότι:

$$y^2+y=2x^2+x+3 \Leftrightarrow y^2+y-(2x^2+x+3)=0.$$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι μπορούμε να θεωρήσουμε την τελευταία ως εξίσωση με άγνωστο το $y$ (και απλώς αντιμετωπίζουμε το $x$ σαν μία «σταθερά»).

Ως προς $y$, αυτή η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια και μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι η διακρίνουσα ισούται με

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot 1\cdot\left[-\left(2x^2+x+3\right)\right]=1+8x^2+4x+12=8x^2+4x+13.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν έτσι ότι οι λύσεις δίνονται από τη σχέση

$$y_{1,2}=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{8x^2+4x+13}}{2}.$$

Η λύση $y_2=\dfrac{-1-\sqrt{8x^2+4x+13}}{2}$ απορρίπτεται: Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε ότι αυτή η λύση είναι αρνητική για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θυμόμαστε όμως ότι $y=f(x)$ και, όπως είπαμε στη λύση του Ερωτήματος Γ2, η $f$ είναι θετική σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Επομένως, αποκλείεται να είναι ίση με την (αρνητική) λύση $y_2$ για καμία τιμή του $x\in\mathbb{R}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν έτσι πως

$$\boxed{f(x)=\frac{-1+\sqrt{8x^2+4x+13}}{2}}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Μένει να εξηγήσουμε ότι η παράσταση που βρίσκεται κάτω από τη ρίζα είναι θετική για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$. Πράγματι, αυτή η παράσταση είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4^2-4\cdot 8\cdot 13<0$. Άρα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πρόσημό της είναι ίδιο με το πρόσημο του συντελεστή $\alpha$ του όρου $x^2$. Καθώς $\alpha=8>0$, έπεται ότι η παράσταση είναι θετική για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**Δ3. Β΄ τρόπος:**

Κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνου στην αρχική ισότητα. Ο όρος που λείπει από την παράσταση $f^2(x)+f(x)$ για να συμπληρωθεί το τετράγωνο είναι το $\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Προσθέτουμε αυτόν τον όρο και στα δύο μέλη και παίρνουμε

$$f^2(x)+f(x)+\frac{1}{4}=2x^2+x+3+\frac{1}{4}=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)^2=2x^2+x+\frac{13}{4}$$

$$=\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{8x^2+4x+13}{4}\Leftrightarrow\left|f(x)+\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}}{2}.$$

Από τα προηγούμενα ερωτήματα ξέρουμε ότι $2f(x)+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η τελευταία ισότητα δίνει ότι

$$\boxed{f(x)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}}{2} \Leftrightarrow f(x)=\frac{-1+\sqrt{8x^2+4x+13}}{2}}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Δ4.** Κοντά στο $+\infty$ ισχύει $x>0$ και επομένως μπορούμε να γράψουμε $x=|x|=\sqrt{x^2}$. Έτσι, θα έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}-1}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{8x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{13}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{8}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\sqrt{2},$$

όπου στο πέμπτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}\right)=8$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Επομένως, έχουμε $\lambda:=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\sqrt{2}$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{2}x\right)$. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}-1}{2}-\sqrt{2}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}-2\sqrt{2}x}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{8x^2+4x+13}-2\sqrt{2}x\right)\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}{2\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}^{\,2}-\left(2\sqrt{2}x\right)^2}{2\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+13}{2\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}\right).$$

Για το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+13}{2\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}$ βγάζουμε κοινό παράγοντα από τον αριθμητή το $x$ και από την υπόρριζη ποσότητα το $x^2$. Τότε θα έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+13}{2\left(\sqrt{8x^2+4x+13}+2\sqrt{2}x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{13}{x}\right)}{2\left(\sqrt{x^2\left(8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}\right)}+2\sqrt{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{13}{x}\right)}{2\left(|x|\sqrt{\left(8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}\right)}+2\sqrt{2}x\right)}\overset{|x|=x}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{13}{x}\right)}{2x\left(\sqrt{\left(8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}\right)}+2\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4+\frac{13}{x}\right)}{2\left(\sqrt{\left(8+\frac{4}{x}+\frac{13}{x^2}\right)}+2\sqrt{2}\right)}=\frac{4}{2\left(\sqrt{8}+2\sqrt{2}\right)}=\frac{4}{2\left(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{4}{8\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Έτσι, το αρχικό όριο θα είναι ίσο με

$$-\frac{1}{2}+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{8x^2+4x+13}-2\sqrt{2}x}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}-2}{4}.$$

Συνεπώς, η πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$ είναι η ευθεία

$$\boxed{(\varepsilon):y=\sqrt{2}x+\frac{\left(\sqrt{2}-2\right)}{4}.}$$