Διαγώνισμα 4.13

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 73.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 74.

Α4. i) Λ, **ii)** Λ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Σ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων και ισχύει

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x + 1 = xe^x + 1.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι και η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων και ισχύει

$$f''(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x.$$

Θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f''(x) > 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} x+1>0 \Leftrightarrow x>-1.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $f''(x)<0$ για $x<-1$ και ότι η f'' μηδενίζεται μόνο για $x=-1$. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας για την f:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

- Η f είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty,1]$.
- Η C_f παρουσιάζει σημείο καμπής το $A(-1,f(-1))$ με $f(-1) = -\dfrac{2}{e}$.

B2. Με βάση το Ερώτημα Β1, η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=-1$ με $f'(-1)=-\frac{1}{e}+1>0$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)\geq f'(-1)=-e^{-1}+1>0,$$

απ' όπου προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, η f δεν έχει ακρότατα.

B3. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)}{e^x-1}$ είναι το σύνολο

$$A_g=\mathbb{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

Αρχικά αναζητούμε κατακόρυφες ασύμπτωτες. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g είναι η ευθεία $x=0$, οπότε υπολογίζουμε το αντίστοιχο όριο:

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+x+1}{e^x-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+1}{e^x}=1,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Καθώς όμως το $\lim_{x\to 0}g(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, η ευθεία $x=0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g.

Στη συνέχεια αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες της C_g στο $+\infty$.
Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^x+x+1\right]=(+\infty)\cdot(+\infty)+(+\infty)+1=+\infty,$$

άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x+x+1}{x\left(e^x-1\right)}$$

$$\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x+1}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x\left(1+\frac{1}{xe^x}\right)}{xe^x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^x}\right)}=1=\lambda,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Ισχύει επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-1)e^x+x+1}{e^x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-1)e^x+x+1-xe^x+x}{e^x-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1-e^x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}-1\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}-1}{1-\frac{1}{e^x}}=\frac{2\cdot 0+0-1}{1-0}=-1=\beta,$$

όπου στο πέμπτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι η ευθεία

$$y=\lambda x+\beta=x-1$$

είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. Εφόσον έχει πλάγια ασύμπτωτη, η C_g δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Στη συνέχεια αναζητούμε πλάγιες ασύμπτωτες της C_g στο $-\infty$. Θα υπολογίσουμε λοιπόν για αρχή το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}}\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Από το παραπάνω όριο προκύπτει άμεσα ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^x+x+1\right]=0+(-\infty)+1=-\infty.$$

Παρατηρούμε επιπλέον ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(e^x-1\right)=(-\infty)\cdot(-1)=+\infty$. Άρα,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)e^x+x+1}{x\left(e^x-1\right)}$$

$$\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x+1}{xe^x+e^x-1}=\frac{0+1}{0+0-1}=-1=\lambda,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $-\infty/+\infty$, καθώς και το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0.$$

Ισχύει λοιπόν

$$\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)e^x+x+1}{e^x-1}+x\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)e^x+x+1+xe^x-x}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x-1)e^x+1+xe^x}{e^x-1}\right)$$

$$=\frac{0+1+0}{0-1}=-1=\beta,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα όρια

$$\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty}e^x=0,$$

τα οποία είχαμε ήδη υπολογίσει σε προηγούμενα βήματα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ευθεία

$$y=\lambda x+\beta=-x-1$$

είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$. Εφόσον έχει πλάγια ασύμπτωτη, η C_g δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Β4. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Έχουμε

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[(x-1)e^x+x+1\right]dx=\int_0^1(x-1)e^xdx+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1$$

$$=\int_0^1(x-1)\left(e^x\right)'dx+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=\left[(x-1)e^x\right]_0^1-\int_0^1(x-1)'e^xdx+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1$$

$$=\left[(x-1)e\right]_0^1-\int_0^1e^xdx+\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=1-\left[e^x\right]_0^1+\frac{1}{2}+1=3-e+\frac{1}{2}\ \boxed{=\frac{7}{2}-e.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}.$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει προφανή ρίζα την $x=1$. Θα δείξουμε ότι είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης. Πράγματι, η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο και διαφορά παραγωγίσιμων και για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0.$$

Επομένως, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική. Λόγω της μονοτονίας της f' προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Για κάθε $0<x<1$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε

  $$f'(x)<f'(1)=0,$$

  άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(0,1]$.

- Για κάθε $x>1$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε

  $$f'(x)>f'(1)=0,$$

  άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$.

Αυτά τα συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Για να βρούμε το σύνολο τιμών, βρίσκουμε την εικόνα της f στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_1, επομένως

  $$f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=[-3,+\infty),$$

  όπου το όριο στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκε ως εξής:

  $$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x-3\right]=(-1)\cdot(-\infty)-3=+\infty.$$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο Δ_2, επομένως

  $$f(\Delta_2)=\left[f(1),\lim_{x\to +\infty}f(x)\right)=[-3,+\infty),$$

όπου το όριο στο τελευταίο βήμα υπολογίστηκε ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[(x-1)\ln x - 3\right] = (+\infty)(+\infty) - 3 = +\infty.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν τελικά ότι το σύνολο τιμών της f είναι το

$$\boxed{f\big((0,+\infty)\big) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2) = [-3,+\infty).}$$

Γ2. Σημειώνουμε ότι, από τα συμπεράσματα του προηγούμενου ερωτήματος, προκύπτει ότι $f(x)\geq -3$ για κάθε $x>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$T(x) = (e^x-1)\big(f(\alpha)+5\big) + \big(4+f(\beta)\big)(x-2)$$

για $x\in[0,2]$. Το σκεπτικό πίσω από την επιλογή αυτής της συνάρτησης είναι ότι προκύπτει μετά από απαλοιφή παρονομαστών στην εξίσωση που μας έχει δοθεί. Θα δείξουμε αρχικά ότι αυτή η συνάρτηση έχει ρίζα στο $(0,2)$ και στη συνέχεια ότι εκείνη η ρίζα ικανοποιεί και τη δοσμένη εξίσωση.

Η T είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πράξη συνεχών και επιπλέον:

- $T(0) = -\big(4+f(\beta)\big)$. Αυτή η ποσότητα είναι αρνητική, καθώς, όπως σχολιάσαμε παραπάνω, ισχύει για κάθε $\beta>0$ ότι $f(\beta)\geq -3 > -4$, οπότε $4+f(\beta)>0$.
- $T(2) = (e^2-1)\big(f(\alpha)+5\big)$. Αυτή η ποσότητα είναι θετική, καθώς, όπως σχολιάσαμε παραπάνω, ισχύει για κάθε $\alpha>0$ ότι $f(\alpha)\geq -3 > -5$, οπότε $f(\alpha)+5>0$.

Έτσι, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $T(x_0)=0$. Ισοδύναμα, το x_0 ικανοποιεί τη σχέση

$$(e^{x_0}-1)\big(f(\alpha)+5\big) + \big(4+f(\beta)\big)(x_0-2) = 0.$$

Καθώς όμως $x_0\in(0,2)$, οι όροι $e^{x_0}-1$ και x_0-2 είναι μη μηδενικοί, οπότε μπορούμε να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $(e^{x_0}-1)(x_0-2)$. Αυτή η εξίσωση τότε γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{f(\alpha)+5}{x_0-2} + \frac{4+f(\beta)}{e^{x_0}-1} = 0,$$

η οποία είναι η εξίσωση που μας είχε δοθεί στην εκφώνηση. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το x_0 είναι ρίζα και της αρχικής εξίσωσης.

Γ3. Παίρνοντας λογάριθμους και στα δύο μέλη, η εξίσωση $x^{x-1}=e^{24}, x>0$ ισοδύναμα γράφεται

$$\ln x^{x-1}=24 \Leftrightarrow (x-1)\ln x=24 \Leftrightarrow f(x)=21.$$

Είδαμε στο Ερώτημα Γ1 ότι $f(\Delta_1)=[-3,+\infty)$ και $f(\Delta_2)=[-3,+\infty)$. Ισχύει λοιπόν ότι $21\in f(\Delta_1)$ και $21\in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχουν αντίστοιχα $x_1\in\Delta_1=(0,1]$ και $x_2\in\Delta_2=[1,+\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=21$, $f(x_2)=21$. Μάλιστα, τα x_1,x_2 είναι τα μοναδικά στα διαστήματα Δ_1, Δ_2 με αυτήν την ιδιότητα, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 και f γνησίως αύξουσα στο Δ_2. Ισχύει ακόμη ότι $x_1,x_2\neq 1$, διότι $f(1)=3\neq f(x_1),f(x_2)$. Τέλος, επειδή $x_1\in\Delta_1=(0,1]$ και $x_2\in\Delta_2=[1,+\infty)$ και επειδή $x_1,x_2\neq 1$, είναι άμεσο ότι $x_1<x_2$.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=xf(x)-21x=x(f(x)-21)$, $x\in[x_1,x_2]$. Αυτήν τη συνάρτηση δε τη θεωρήσαμε τυχαία. Πράγματι, αν γράψουμε τη δοσμένη ισότητα με μεταβλητή το x αντί του ξ, τότε αυτή γράφεται ως

$$xf'(x)=21-f(x)\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)-21=0$$
$$\Leftrightarrow (xf(x)-21x)'=0 \Leftrightarrow g'(x)=0.$$

Αυτός είναι και ο λόγος που ορίσαμε τη συνάρτηση g με αυτόν τον τρόπο. Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) ως πράξη παραγωγίσιμων. Επιπλέον, γνωρίζουμε από το Γ3 ότι $f(x_1)=f(x_2)=21$, οπότε:

- $g(x_1)=x_1(f(x_1)-21)=0$.
- $g(x_2)=x_2(f(x_2)-21)=0$.

Επομένως, από το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$, έτσι ώστε $g'(\xi)=0$. Όμως, όπως είδαμε και προηγουμένως, ισχύει $g'(x)=xf'(x)+f(x)-21$. Επομένως,

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow \xi f'(\xi)+f(\xi)-21=0$$
$$\boxed{\Leftrightarrow \xi f'(\xi)=21-f(\xi)}$$

και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η δοσμένη ισότητα ισοδύναμα γράφεται:

$$xf'(x)-f(x)=x^2\left(e^{2x}-1\right)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\neq 0$, η παραπάνω ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=e^{2x}-1\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(e^{2x}-x\right)'.$$

Επομένως, από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι

$$\frac{f(x)}{x}=e^{2x}-x+c_1 \text{ για κάθε } x<0$$

και

$$\frac{f(x)}{x}=e^{2x}-x+c_2 \text{ για κάθε } x>0,$$

όπου c_1, c_2 είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη των παραπάνω εξισώσεων με το x, παίρνουμε ότι

$$f(x)=xe^{2x}-x^2+c_1x,\ \text{ για κάθε } x<0$$

και

$$f(x)=xe^{2x}-x^2+c_2x,\ \text{ για κάθε } x>0.$$

Οι συνέπειες του Θ.Μ.Τ. ισχύουν μόνο σε διαστήματα. Αυτός είναι και ο λόγος που θεωρούμε ξεχωριστή σταθερά για καθένα από τα διαστήματα (-∞,0) και (0,+∞).

Αφού $f(-1)=-\frac{1}{e^2}$, έπεται από τον πρώτο από τους παραπάνω τύπους ότι

$$-\frac{1}{e^2}=-\frac{1}{e^2}-1-c_1\Leftrightarrow c_1=-1.$$

Συνεπώς, για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)=xe^{2x}-x^2-x$. Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο $x_0=0$. Ισχύει λοιπόν

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(xe^{2x}-x^2-x\right)=0,$$

συνεπώς ο τύπος $f(x)=xe^{2x}-x^2-x$ ισχύει και για $x=0$. Συνοψίζοντας, έχουμε ότι

$$f(x)=\begin{cases} xe^{2x}-x^2-x, & x\leq 0\\ xe^{2x}-x^2+c_2x, & x>0\end{cases}.$$

Για να υπολογίσουμε το c_2, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Υπολογίζουμε λοιπόν τα δύο πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{xe^{2x}-x^2-x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(e^{2x}-x-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(e^{2x}-x-1\right)=1-1=0$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^{2x}-x^2+c_2x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\left(e^{2x}-x+c_2\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(e^{2x}-x+c_2\right)=1+c_2.$$

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, θα πρέπει τα δύο πλευρικά όρια να είναι ίσα, δηλαδή να ισχύει

$$1+c_2=0\Leftrightarrow c_2=-1.$$

Από αυτήν την τελευταία ισότητα, προκύπτει τελικά ότι

$$\boxed{f(x)=xe^{2x}-x^2-x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.}$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}-2x-1$$
$$=e^{2x}(1+2x)-(1+2x)=\left(e^{2x}-1\right)(1+2x).\qquad(1)$$

Το πρόσημο της παραγώγου f', το οποίο εξαρτάται από το πρόσημο των παραγόντων $e^{2x}-1$ και $1+2x$, φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	$-1/2$		0	$+\infty$
$1+2x$	$-$	0	$+$		$+$
$e^{2x}-1$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ και $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0=-\dfrac{1}{2}$ το

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2e}+\frac{1}{4}$$

και τοπικό ελάχιστο στο $x_1=0$ το $f(0)=0$.

Δ3. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $h'(x)=2+2e^{-2x}>0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned} f''(x)&=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}-2\\ &=2e^{2x}\left(2x+2-e^{-2x}\right)=2e^{2x}h(x). \quad (2)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $h(-1)=-e^2<0$ και $h(0)=2-1=1>0$, επομένως, από το θεώρημα Bolzano για τη συνεχή συνάρτηση h, προκύπτει ότι υπάρχει $\rho\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho)=0$. Το ρ είναι μοναδικό, καθώς η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Μάλιστα, από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $f''(\rho)=2e^{2\rho}h(\rho)=0$.

- Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα, για κάθε $x<\rho$, ισχύει ότι

$$h(x)<h(\rho)=0.$$

Από αυτήν την παρατήρηση και από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $f''(\rho)<0$ για κάθε $x<\rho$.

- Με εντελώς όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $f''(\rho)>0$ για $x>\rho$.

x	$-\infty$ ρ	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,\rho]$, κυρτή στο $[\rho,+\infty)$ και ότι η C_f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής το $M(\rho,f(\rho))$.

Δ4. Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν, χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$E(\Omega)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx=\int_0^1|xe^{2x}-x^2-x+x^2+3x|dx$$

$$=\int_0^1|xe^{2x}+2x|dx=\int_0^1|x(1+e^{2x})|dx$$

$$\overset{x>0}{=}\int_0^1 x(1+e^{2x})dx=\int_0^1 xdx+\int_0^1 xe^{2x}dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\int_0^1 x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx$$

$$=\frac{1}{2}+\left[\frac{xe^{2x}}{2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}dx=\frac{1}{2}+\frac{e^2}{2}-\left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}+\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{e^2}{4}\ \text{τετραγωνικές μονάδες.}}$$