Διαγώνισμα 4.14

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 116-117.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 157.

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 225.

Α4. **i)** Σ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η σχέση $\frac{f(x)\left[f(x)-4x\right]}{e^{-x}-2x}=e^{-x}+2x$ γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{f(x)\left[f(x)-4x\right]}{e^{-x}-2x}=e^{-x}+2x \Leftrightarrow f^2(x)-4xf(x)=e^{-2x}-4x^2$$
$$\Leftrightarrow f(x)-4xf(x)+4x^2=e^{-2x}$$
$$\Leftrightarrow \left(f(x)-2x\right)^2=\left(e^{-x}\right)^2 \Leftrightarrow \left|f(x)-2x\right|=e^{-x}.$$

Επειδή όμως από την υπόθεση έχουμε $f(x)>2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι $f(x)=2x+e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αφού όμως $g(x)=\ln\left(\frac{e^{-2x}}{x+2}\right)+f(x)$, θα ισχύει για κάθε ότι

$$g(x)=\ln\left(\frac{e^{-2x}}{x+2}\right)+2x+e^{-x}$$
$$=\ln e^{-2x}-\ln(x+2)+2x+e^{-x}\boxed{=e^{-x}-\ln(x+2).}$$

Β2. Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. Έστω $x_1,x_2\in(-2,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1<x_2 \Rightarrow -x_1<-x_2 \overset{e^x\nearrow}{\Rightarrow} e^{-x_1}>e^{-x_2} \quad (1)$$

Επιπλέον,

$$x_1<x_2 \Rightarrow x_1+2<x_2+2 \overset{\ln\nearrow}{\Rightarrow} \ln(x_1+2)<\ln(x_2+2) \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη, λαμβάνουμε ότι $g(x_1)>g(x_2)$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2,+\infty)$, επομένως και «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το σύνολο τιμών της g.

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-2,+\infty)$, για το σύνολο τιμών της θα ισχύει ότι

$$g((-2,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to-2^+} g(x)\right)=\mathbb{R},$$

όπου στην τελευταία ισότητα τα όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to-2^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-2^+}\left(e^{-x}-\ln(x+2)\right)=e^2-(-\infty)=+\infty$,

  όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to-2^+}\ln(x+2)\overset{y=x+2}{=}\lim\limits_{y\to0^+}\ln y=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-\ln(x+2)\right)=0-(+\infty)=-\infty$,

  όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+2)\overset{y=x+2}{=}\lim\limits_{y\to+\infty}\ln y=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\overset{y=-x}{=}\lim\limits_{y\to-\infty} e^{y}=0$.

Συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το $\boxed{D_{g^{-1}}=g((-2,+\infty))=\mathbb{R}.}$

B3. Καθώς η g είναι «1-1», ισχύει η ισοδυναμία

$$\begin{aligned} g^{-1}(x)=x &\Leftrightarrow g\left(g^{-1}(x)\right)=g(x)\\ &\Leftrightarrow g(x)=x\\ &\Leftrightarrow g(x)-x=0, \end{aligned}$$

όπου στο πρώτο βήμα συνθέσαμε με την g και στα δύο μέλη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-x$ για $x\in(-2,+\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(-2,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε θα ισχύει ότι

$$-x_1>-x_2 \qquad (3)$$

Επιπλέον, αφού $x_1<x_2$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει

$$g(x_1)>g(x_2) \qquad (4)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3), (4) παίρνουμε ότι $h(x_1)>h(x_2)$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-2,+\infty)$. Επιπλέον, ισχύει

$$h\left(-\frac{3}{2}\right)=e^{3/2}-\ln\left(2-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}=e^{3/2}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}=e^{3/2}+\ln 2+\frac{3}{2}>0,$$

και $h(2)=e^{-2}-\ln 4-2<0$. Η h είναι συνεχής στο $\left[-\frac{3}{2},2\right]$ ως διαφορά συνεχών και, σύμφωνα με τα παραπάνω, ισχύει $h\left(-\frac{3}{2}\right)h(2)<0$. Άρα, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(-\frac{3}{2},2\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h(x_0)=0\Leftrightarrow g(x_0)=x_0\Leftrightarrow g^{-1}(x_0)=x_0.$$

Το x_0 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα, καθώς η h είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και «1-1» στο πεδίο ορισμού της.

B4. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=\ln(x-2)\frac{g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2}{x-2}+\frac{g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)}{3-x}-2024$$

για $x\in(2,3)$. Για να δείξουμε ότι αυτή η συνάρτηση έχει ρίζα στο $(2,3)$, θα υπολογίσουμε τα πλευρικά της όρια στα άκρα του διαστήματος $(2,3)$. Ξεκινάμε με το πλευρικό όριο, καθώς $x\to 2^+$. Καθώς

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(x-2)}{x-2}\overset{y=x-2}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln y}{y}=\lim_{y\to 0^+}\left(\ln y\cdot\frac{1}{y}\right)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty,$$

έπεται ότι

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\ln(x-2)\frac{g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2}{x-2}\right)=(-\infty)\cdot\left[g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2\right]. \quad (5)$$

Θα αποδείξουμε ότι ο παράγοντας στο εσωτερικό της αγκύλης είναι αρνητικός. Πράγματι, ισχύει

$$-1<\lambda<0\Leftrightarrow 0<-\lambda<1\overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow}\ln(-\lambda)<\ln 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(-\lambda)<0\Leftrightarrow -\ln(-\lambda)>0$$

$$\Leftrightarrow 1-\ln(-\lambda)>1.$$

Αφού όμως η g είναι γνησίως φθίνουσα, έπεται από την τελευταία σχέση ότι

$$g(1-\ln(-\lambda))<g(0)\Leftrightarrow g(1-\ln(-\lambda))-g(0)<0,$$

άρα ο παράγοντας στην αγκύλη είναι όντως αρνητικός. Συνεπώς, το όριο στη σχέση (5) ισούται τελικά με $+\infty$. Ισχύει επίσης

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)}{3-x}=g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda). \qquad (6)$$

Από τις (5), (6) και από τον ορισμό της φ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 2^+}\varphi(x)=+\infty$. Συνεπώς, ισχύει $\varphi(x)>0$ για $x>2$ και για x κοντά στο 2. Άρα υπάρχει $x_1>2$, κοντά στο 2, τέτοιο, ώστε $\varphi(x_1)>0$. Συνεχίζουμε τώρα με το πλευρικό όριο, καθώς $x\to 3^-$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)}{3-x}=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{3-x}\big(g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)\big)=(-\infty)\cdot\big(g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)\big), \qquad (1)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{3-x}=+\infty$. Αφού $\lambda\in(-1,0)$, ισχύει $\eta\mu\lambda<0$. Γνωρίζουμε επίσης από τη σελ. 52 του σχολικού βιβλίου ότι $|\eta\mu\lambda|<|\lambda|$. Σημειώνουμε ότι η ανισότητα είναι γνήσια, καθώς η ισότητα θα ίσχυε μόνο αν $\lambda=0$, κάτι που εδώ δεν ισχύει. Συνεπώς, προκύπτει η εξής συνεπαγωγή:

$$\begin{aligned}|\eta\mu\lambda|<|\lambda| &\overset{\lambda,\eta\mu\lambda<0}{\Leftrightarrow} -\eta\mu\lambda<-\lambda \Leftrightarrow \eta\mu\lambda>\lambda\\ &\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow} g(\eta\mu\lambda)<g(\lambda)\Leftrightarrow g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)<0.\end{aligned}$$

Επομένως, εφόσον ο παραπάνω παράγοντας είναι αρνητικός, το όριο στη σχέση (7) είναι ίσο με $+\infty$. Ισχύει επίσης

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\ln(x-2)\frac{g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2}{x-2}\right)=\ln 1\cdot\frac{g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2}{1}=0.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 3^-}\varphi(x)=-\infty$. Συνεπώς, ισχύει $\varphi(x)<0$ για $x<3$ και για x κοντά στο 3. Άρα υπάρχει $x_2<3$, κοντά στο 3, ώστε $\varphi(x_2)<0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]\subset(2,3)$ ως πράξη συνεχών. Επιπλέον, είδαμε ότι $\varphi(x_1)\varphi(x_2)<0$. Άρα, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)\subset(2,3)$ τέτοιο, ώστε

$$\boxed{\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow \ln(x_0-2)\frac{g(1-\ln(-\lambda))-1+\ln 2}{x_0-2}+\frac{g(\eta\mu\lambda)-g(\lambda)}{3-x_0}=2024,}$$

όπως θέλαμε.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (0,+\infty)$ και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1/2$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$. Από το θεώρημα Fermat έπεται ότι $f'(1/2) = 0$. Ισχύει όμως

$$f'(x) = 2 + \frac{\kappa}{2x} - \frac{1}{x^2},$$

άρα προκύπτει η ισοδυναμία

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{\kappa}{2\cdot\frac{1}{2}} - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow 2 + \kappa - 4 = 0 \quad \boxed{\Leftrightarrow \kappa = 2.}$$

Επομένως, για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f'(x) = 2 + \frac{2}{2x} - \frac{1}{x^2} = \left(2x + \ln 2x + \frac{1}{x}\right)'$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. παίρνουμε ότι $f(x) = 2x + \ln 2x + \frac{1}{x} + c$ για κάθε $x > 0$. Γνωρίζουμε όμως από την υπόθεση ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) = 5$, άρα, αντικαθιστώντας $x = \frac{1}{2}$ στην παραπάνω σχέση, παίρνουμε ότι

$$1 + \ln 1 + 2 + c = 5 \Leftrightarrow c = 2.$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\boxed{f(x) = 2x + \ln 2x + \frac{1}{x} + 2 \text{ για κάθε } x > 0.}$$

Γ2. Από το Ερώτημα Γ1 έχουμε

$$f'(x) = 2 + \frac{2}{2x} - \frac{1}{x^2} = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}.$$

για κάθε $x > 0$. Το πρόσημο της f' θα είναι λοιπόν το ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $2x^2 + x - 1$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 9 > 0,$$

άρα οι ρίζες του είναι

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1-3}{4} = -1 .$$

Άρα, με βάση την κλασική θεωρία για το πρόσημο του τριωνύμου, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$2x^2+x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Όμως η f ορίζεται μόνο για $x>0$, άρα θα κρατήσουμε μόνο ένα μέρος του παραπάνω πίνακα. Η μονοτονία της f φαίνεται λοιπόν παρακάτω:

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$2x^2+x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \equiv \left(\frac{1}{2}, 5\right)$. Πράγματι, αν $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ τότε $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{2}\right]$. Αντίστοιχα, αν $x \geq \frac{1}{2}$ τότε $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Άρα, για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x) \geq f(0)$.

Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο Δ_1, τότε θα ισχύει για το σύνολο τιμών της ότι

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x), \lim_{x \to 0^+} f(x) \right) = (5, +\infty),$$

όπου στην τελευταία ισότητα τα όρια υπολογίστηκαν ως εξής:

- Το όριο, καθώς $x \to \frac{1}{2}^-$, υπολογίζεται άμεσα λόγω της συνέχειας της f σε αυτό το σημείο:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=5.$$

- Το όριο, καθώς $x\to 0^+$, γράφεται ως

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left[2x+\ln 2x+\frac{1}{x}+2\right]. \quad (1)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ορίου, παρατηρούμε αρχικά ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+2)=2.$ Οι ενδιαφέροντες όροι είναι οι $\ln 2x$ και $\frac{1}{x}$, καθώς ο πρώτος τείνει στο $-\infty$ και ο δεύτερος στο $+\infty$ και έτσι δημιουργείται απροσδιόριστη μορφή. Γράφουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln 2x+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(x\ln 2x+1), \quad (2)$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε το όριο του πρώτου όρου στην παρένθεση. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln 2x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln 2x}{\frac{1}{x}}\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln 2x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{2x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $-\infty/+\infty$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το όριο στη σχέση (2) ισούται με $(+\infty)\cdot(0+1)=+\infty,$ άρα και το όριο στη σχέση (1) ισούται με $+\infty$.

Με βάση τα παραπάνω, προκύπτει ότι πράγματι $f(\Delta_1)=(5,+\infty)$. Στο διάστημα Δ_2 η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε θα ισχύει για το σύνολο τιμών της ότι

$$f(\Delta_2)=\left[f(1/2),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=[5,+\infty),$$

όπου στην τελευταία ισότητα το όριο υπολογίστηκε ως εξής:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x+\ln 2x+\frac{1}{x}+2\right]=(+\infty)+(+\infty)+0+2=+\infty.$$

Η δοσμένη εξίσωση μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί ως

$$2\xi^2+\xi\ln 2\xi+1=2022\xi\overset{:\xi}{\Leftrightarrow}2\xi+\ln 2\xi+\frac{1}{\xi}=2022$$

$$\Leftrightarrow 2\xi + \ln 2\xi + \frac{1}{\xi} + 2 = 2024 \;\Leftrightarrow f(\xi) = 2024,$$

όπου στο πρώτο βήμα η διαίρεση με ξ είναι επιτρεπτή, καθώς γνωρίζουμε από την εκφώνηση ότι $\xi > \frac{1}{2}$. Ισχύει ότι $2024 \in f(\Delta_2)$, επομένως υπάρχει $\xi \in \Delta_2 = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ για το οποίο $f(\xi) = 2024$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2, το ξ θα είναι το μοναδικό στο Δ_2 με αυτήν την ιδιότητα. Τέλος, ισχύει ότι $\xi > \frac{1}{2}$ αφού $f\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \neq 2024$.

Γ3. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της g. Ισχύει $g(x) = f(h(x)) = (f \circ h)(x)$, όπου $h(x) = \dfrac{1}{2e^{x-3}}$. Έτσι, το πεδίο ορισμού της g δίνεται ως εξής:

$$\begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ \dfrac{1}{2e^{x-3}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},$$

άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το $D_g = \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε από προηγούμενα ερωτήματα ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \geq 5$ και ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{1}{2}$. Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(h(x)) \geq 5$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$h(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2e^{x-3}} = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow e^{x-3} = 1 \;\Leftrightarrow x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow x = 3.$$

Επομένως, η g παρουσιάζει ολικό ακρότατο, συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο στο σημείο $B(3,5)$.

Γ4. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $A(1/2, 5)$ και η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο $B(3,5)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B είναι ίσος με

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-5}{3 - \dfrac{1}{2}} = 0,$$

άρα η εξίσωση αυτής της ευθείας είναι

$$y - y_A = 0 \cdot (x - x_A) \Leftrightarrow y = 5.$$

Όμως οι ευθείες $y = -2$, $y = 5$ είναι και οι δύο παράλληλες στον άξονα $x'x$ ως οριζόντιες, άρα είναι και μεταξύ τους παράλληλες.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον $5f^4(x)+10\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης, η συνάρτηση $5f^4(x)+10$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων. Συνεπώς, από την ισότητα

$$f'(x)=\frac{22}{5f^4(x)+10}$$

προκύπτει ότι η f' είναι ίση με μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f' είναι και η ίδια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Για τη δεύτερη παράγωγό της ισχύει μάλιστα

$$\boxed{f''(x)=\left(\frac{22}{5f^4(x)+10}\right)'=\frac{-110f^3(x)f'(x)}{\left(5f^4(x)+10\right)^2} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\,.} \quad (1)$$

Δ2. Επειδή $f'(x)=\dfrac{22}{5f^4(x)+10}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και «1-1». Για να προσδιορίσουμε τα σημεία καμπής, θα βρούμε το πρόσημο της f'' και τα σημεία μηδενισμού της. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{-110f^3(x)f'(x)}{\left(f^4(x)+2\right)^2}>0$$

$$\overset{f'>0}{\Leftrightarrow} -110f^3(x)>0 \Leftrightarrow f^3(x)<0$$

$$\Leftrightarrow f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x<0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο παρονομαστής, όπως και η f', παίρνει μόνο θετικές τιμές. Με εντελώς όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $f''(x)<0$ για $x>0$ και ότι η μοναδική ρίζα της f'' είναι η $x=0$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$		$\frown$

Συμπεραίνουμε έτσι ότι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f είναι το $\boxed{O(0,f(0))\equiv(0,0).}$

Δ3. i. Η ισότητα $f'(x)=\dfrac{22}{5f^4(x)+10}$ ισοδύναμα γράφεται

$$5f^4(x)f'(x)+10f'(x)=22\Leftrightarrow\left(f^5(x)+10f(x)\right)'=(22x)'$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι

$$f^5(x)+10f(x)=22x+c,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου c είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Αντικαθιστώντας $x=0$ στην παραπάνω ισότητα, παίρνουμε ότι

$$0+10\cdot0=22\cdot0+c,$$

οπότε $c=0$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{f^5(x)+10f(x)=22x.}\quad(2)$$

ii. Για $x=1$, η σχέση (2) δίνει ότι $f^5(1)+10f(1)=22$. Θα συνεχίσουμε με απαγωγή σε άτοπο. Αν ίσχυε $f(1)\le1$, τότε θα ίσχυε επίσης ότι $f^5(1)\le1$ και $10f(1)\le10$. Με πρόσθεση κατά μέλη, αυτές οι δύο σχέσεις δίνουν

$$f^5(1)+10f(1)\le11\Leftrightarrow22\le11,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα πρέπει να ισχύει αναγκαστικά $f(1)>1$. Όπως είδαμε στα προηγούμενα ερωτήματα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα για κάθε $x>1$ έχουμε $f(x)>1$, οπότε $f^5(x)>f(x)$. Έπεται ότι $f^5(x)+10f(x)<f^5(x)+10f^5(x)$, άρα η (2) δίνει

$$22x<11f^5(x)\Rightarrow2x<f^5(x)\Rightarrow\sqrt[5]{2x}<\sqrt[5]{f^5(x)}\Rightarrow f(x)>\sqrt[5]{2x},$$

όπως θέλαμε. Σημειώνουμε ότι για $x>1$ επιτρέπεται να βάλουμε το $f^5(x)$ μέσα στη ρίζα, καθώς ισχύει $f(x)>1$ για κάθε $x>1$. Καθώς $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{2x}=+\infty$ και καθώς η $f(x)$ είναι μεγαλύτερη από $\sqrt[5]{2x}$ για $x>1$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.\quad(3)$$

Για $x=-1$, η σχέση (2) δίνει ότι $f^5(-1)+10f(-1)=-22$. Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι απαγωγή σε άτοπο. Αν ίσχυε $f(1) \geq -1$, τότε θα ίσχυε και ότι $f^5(-1) \geq -1$ και επίσης $10f(-1) \geq -10$. Με πρόσθεση κατά μέλη, αυτές οι δύο σχέσεις δίνουν

$$f^5(-1) + 10f(-1) - 11 \Leftrightarrow -22 \geq -11,$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως, πρέπει να ισχύει αναγκαστικά ότι $f(-1) < -1$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα για $x < -1$ έχουμε $f(x) < f(-1) < -1$. Η σχέση $f(x) < -1$ συνεπάγεται ότι $f^5(x) < f(x)$ για κάθε $x < -1$. Πράγματι, η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$f^5(x) < f(x) \Leftrightarrow f(x)\left(f^4(x) - 1\right) < 0,$$

το οποίο ισχύει διότι ο πρώτος παράγοντας είναι αρνητικός και ο δεύτερος θετικός. Το γεγονός ότι ο δεύτερος παράγοντας είναι θετικός προκύπτει από τη συνεπαγωγή

$$f(x) \langle -1 \Rightarrow |f(x)| \rangle 1 \Rightarrow |f(x)|^4 > 1 \overset{|\theta|^4 = \theta^4}{\Rightarrow} f^4(x) > 1.$$

Από τη σχέση $f^5(x) < f(x)$ προκύπτει ότι

$$f^5(x) + 10f(x) > f^5(x) + 10f^5(x) \overset{(2)}{\Rightarrow} 22x > 11f^5(x)$$

$$\Rightarrow f^5(x) < 2x \Rightarrow -f^5(x) > -2x$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{-f^5(x)} > \sqrt[5]{-2x} \Leftrightarrow f(x) < -\sqrt[5]{-2x}.$$

Στο τρίτο βήμα πολλαπλασιάσαμε με -1 για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη ρίζα στη συνέχεια, καθώς οι όροι $f^5(x)$ και $2x$ είναι αρνητικοί για $x < -1$, ενώ οι όροι $-f^5(x)$ και $-2x$ είναι θετικοί.

Ισχύει όμως $\lim\limits_{x \to -\infty} -\sqrt[5]{-2x} = -\infty$, άρα, αφού η $f(x)$ είναι ακόμη μικρότερη από $-\sqrt[5]{-2x}$ για $x < -1$, έπεται ότι

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty. \quad (4)$$

iii. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, για το σύνολο τιμών της θα ισχύει

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) \overset{(3),\,(4)}{=} (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Επειδή η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$, έπεται ότι η f είναι αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο τιμών της f, δηλαδή $D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Για τον τύπο της αντίστροφης, χρησιμοποιούμε τη σχέση (2) και την ισοδυναμία

$$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y),$$

η οποία ισχύει για κάθε συνάρτηση και την αντίστροφή της. Με χρήση αυτής της ισοδυναμίας, η σχέση (2) δίνει ότι για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$y^5+10y=22f^{-1}(y)\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{22}\left(y^5+10y\right).$$

Αλλάζοντας απλώς τη μεταβλητή από y σε x, προκύπτει ότι

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{22}\left(x^5+10x\right)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$, λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases},$$

για $x\in D_f\cap D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$. Έπεται από τη δεύτερη σχέση ότι $f(y)=x$. Προσθέτοντας κατά μέλη αυτήν την ισότητα με την πρώτη σχέση του συστήματος, παίρνουμε ότι $y+f(y)=x+f(x)$. Επομένως, το σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ y+f(y)=x+f(x) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ h(y)=h(x) \end{cases}.$$

όπου έχουμε ορίσει $h(x)=x+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, αν $x_1<x_2$, τότε ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_2)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως, με πρόσθεση κατά μέλη, είναι άμεσο ότι

$$x_1+f(x_1)<x_2+f(x_2)\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2).$$

Έτσι, τελικά το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ h(y)=h(x) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ y=x \end{cases},$$

απ' όπου προκύπτει ότι $f^{-1}(x)=x$. Η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ λύνεται ως εξής:

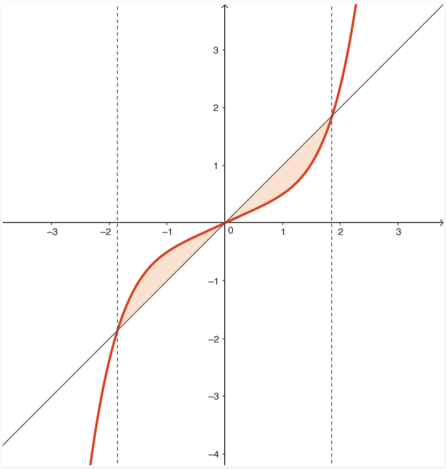
$$f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{22}\left(x^5+10x\right)=x \Leftrightarrow x^5+10x=22x$$
$$\Leftrightarrow x^5-12x=0 \Leftrightarrow x\left(x^4-12\right)=0$$
$$\boxed{\Leftrightarrow x=0 \ \text{ή} \ x=\pm\sqrt[4]{12}.}$$

Επομένως, τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι τα σημεία

$$\mathrm{A}\left(-\sqrt[4]{12},-\sqrt[4]{12}\right),\ \mathrm{O}(0,0),\ \mathrm{B}\left(\sqrt[4]{12},\sqrt[4]{12}\right).$$

Δ4. Τα σημεία τομής των $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $y=x$ είναι τα σημεία $\mathrm{A},\mathrm{O},\mathrm{B}$ του προηγούμενου ερωτήματος, αφού αυτά προέκυψαν ακριβώς από τη λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x)=x$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{E}=\int_{-\sqrt[4]{12}}^{\sqrt[4]{12}}\left|f^{-1}(x)-x\right|dx=\int_{-\sqrt[4]{12}}^{\sqrt[4]{12}}\left|\varphi(x)\right|dx,$$



όπου

$$\varphi(x)=^{-1}(x)-x=\frac{1}{22}\left(x^5+10x\right)-x$$
$$=\frac{1}{22}\left(x^5+10x-22x\right)$$
$$=\frac{1}{22}\left(x^5-12x\right).$$

Σύμφωνα με το Ερώτημα Δ3iii, η φ έχει μοναδικές ρίζες τους αριθμούς $x=0$ και $x=\pm\sqrt[4]{12}$. Επομένως, λόγω συνέχειας, διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\sqrt[4]{12},0\right)$ και $\left(0,\sqrt[4]{12}\right)$, καθώς δεν έχει ρίζες σε αυτά. Ο αριθμός -1 ανήκει στο πρώτο διάστημα και ισχύει

$$\varphi(-1)=\frac{1}{22}\left[(-1)^5-12\cdot(-1)\right]=\frac{1}{22}(-1-12)=\frac{1}{2},$$

άρα, λόγω της διατήρησης προσήμου, έπεται ότι $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\sqrt[4]{12},0\right)$. Ομοίως, ο αριθμός 1 ανήκει στο διάστημα $\left(0,\sqrt[4]{12}\right)$ και ισχύει

$$\varphi(1)=\frac{1}{22}\left(1^5-12\cdot 1\right)=\frac{1}{22}\cdot(-11)=-\frac{1}{2},$$

άρα, λόγω της διατήρησης προσήμου, έπεται ότι $\varphi(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\sqrt[4]{12}\right)$.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$E=\int_{-\sqrt[4]{12}}^{\sqrt[4]{12}}|\varphi(x)|dx=\int_{-\sqrt[4]{12}}^{0}|\varphi(x)|dx+\int_{0}^{\sqrt[4]{12}}|\varphi(x)|dx=\int_{-\sqrt[4]{12}}^{0}\varphi(x)dx+\int_{0}^{\sqrt[4]{12}}-\varphi(x)dx.$$

Από τον ορισμό της φ, η τελευταία ποσότητα ισούται με

$$\frac{1}{22}\left(\int_{-\sqrt[4]{12}}^{0}\left(x^5-12x\right)dx-\int_{0}^{\sqrt[4]{12}}\left(x^5-12x\right)dx\right)=\frac{1}{22}\left(\left[\frac{x^6}{6}-6x^2\right]_{-\sqrt[4]{12}}^{0}-\left[\frac{x^6}{6}-6x^2\right]_{0}^{\sqrt[4]{12}}\right)$$

$$=\frac{1}{22}\left(-\frac{\sqrt[4]{12}^6}{6}+6\cdot\sqrt[4]{12}^2-\frac{\sqrt[4]{12}^6}{6}+6\cdot\sqrt[4]{12}^2\right)$$

$$=\frac{1}{11}\left(6\sqrt{12}-\frac{\sqrt{12}^3}{6}\right)=\frac{1}{11}\left(6\sqrt{12}-\frac{12\sqrt{12}}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{11}\cdot 4\sqrt{12}$$

$$\boxed{=\frac{8\sqrt{3}}{11}\text{ τετραγωνικές μονάδες.}}$$