Διαγώνισμα 4.15

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 217.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 155.

Α3. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Αφού η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0,\pi/2]$, έπεται ότι

$$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow \kappa+1=-\kappa^2+1\Leftrightarrow \kappa^2+\kappa=0$$
$$\Leftrightarrow \kappa(\kappa+1)=0 \Leftrightarrow \kappa=0 \ \text{ή} \ \kappa=-1$$

Δίνεται όμως στην εκφώνηση ότι $\kappa\neq 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $\boxed{\kappa=-1.}$ Γι' αυτήν την τιμή του κ, η f πράγματι ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η συνέχεια και η παραγωγισιμότητα έπονται από το γεγονός ότι η f είναι πράξη συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, ενώ η ισότητα των τιμών στα άκρα του διαστήματος έπεται από την παραπάνω ισοδυναμία.

Β2. Το θεώρημα Rolle εξασφαλίζει την ύπαρξη τουλάχιστον ενός $\xi\in(0,\pi/2)$ τέτοιου, ώστε $f'(\xi)=0$. Αυτό το ερώτημα ουσιαστικά μας ζητάει να προσδιορίσουμε αυτό το σημείο ξ. Θα λύσουμε λοιπόν την εξίσωση $f'(x)=0$. Αφού $\kappa=-1$, προκύπτει ότι

$$f(x)=-\text{συν}x-\text{ημ}x+1$$

για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\text{ημ}x-\text{συν}x$. Ειδικότερα, στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι η ισοδυναμία

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \text{ημ}x=\text{συν}x.$$

Αφού $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, το $\text{συν}x$ είναι θετικός αριθμός, οπότε μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $\text{συν}x$. Τότε, αυτή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}=1\Leftrightarrow \text{εφ}x=1\Leftrightarrow \text{εφ}x=\text{εφ}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Επειδή η $\varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, η μοναδική λύση της εξίσωσης θα είναι η $x=\frac{\pi}{4}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\xi=\dfrac{\pi}{4}$.

2ος τρόπος για την τελευταία εξίσωση:

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi x=1$ γράφεται στη μορφή $\varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Σύμφωνα με τη θεωρία για την επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων (Άλγεβρα Β΄ Λυκείου), αυτή η εξίσωση έχει ρίζες όλους τους αριθμούς της μορφής $x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$, όπου $\kappa\in\mathbb{Z}$. Επειδή $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, μπορούμε να βρούμε τις αποδεκτές τιμές του κ ως εξής:

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0<\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<\kappa\pi<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<\kappa\pi<\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\kappa<\frac{1}{4}$$

Επειδή όμως $\kappa\in\mathbb{Z}$, θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $\kappa=0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν έτσι ότι $x=\frac{\pi}{4}$ και καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με προηγουμένως.

B3. **i.** Ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-\frac{\eta\mu x}{x}\right)=0-1=-1,$$

όπου στο τρίτο βήμα εφαρμόστηκαν οι ισότητες που υπάρχουν στο τέλος της σελ. 53 του σχολικού βιβλίου.

ii. Ισχύει

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f'(x)}{4x-\pi}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{4x-\pi}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{4}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

όπου στη δεύτερη ισότητα εφαρμόστηκε ο κανόνας De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$.

B4. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και ισχύει

$$f''(x)=\left(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x\right)'=\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x.$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα υπολογιστεί με παραγοντική ολοκλήρωση. Ισχύει λοιπόν

$$
\begin{aligned}
I=\int_0^{\pi/2} e^x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)dx &= \int_0^{\pi/2}(e^x)'(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)dx\\
&=\left[e^x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}e^x(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)'dx\\
&=e^{\pi/2}-1-\int_0^{\pi/2}e^x(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx\\
&=e^{\pi/2}-1-\int_0^{\pi/2}(e^x)'(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx\\
&=e^{\pi/2}-1-\left[e^x(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}e^x(-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)'dx\\
&=e^{\pi/2}-1-\left(e^{\pi/2}(-1+0)-1\right)-I\\
&=e^{\pi/2}-1+e^{\pi/2}+1-I=2e^{\pi/2}-I
\end{aligned}
$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\boxed{I=2e^{\pi/2}-I \Leftrightarrow 2I=2e^{\pi/2}\Leftrightarrow I=e^{\pi/2}.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Για τον άξονα $y'y$ αρκεί να θέσουμε $x=0$ στον τύπο της f. Ισχύει

$$f(0)=(1-0)e^0=1$$

επομένως το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0,1)$. Για τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$. Αυτή η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x)=0\Leftrightarrow(1-x)e^2=0\overset{e^2\neq0}{\Leftrightarrow}1-x=0\Leftrightarrow x=1.$$

Επομένως, το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $\boxed{B(1,0).}$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$
\begin{aligned}
f'(x)=\left((1-x)e^{2x}\right)'&=(1-x)'e^{2x}+(1-x)(e^{2x})'\\
&=-e^{2x}+2(1-x)e^{2x}=e^{2x}(-1+2-2x)=e^{2x}(1-2x).
\end{aligned}
$$

Ο πρώτος παράγοντας είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η $f'(x)$ είναι θετική όταν

$$1-2x>0 \Leftrightarrow 2x<1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}.$$

Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να δείξουμε ότι $f'(x)<0$ για $x>\frac{1}{2}$ και $f'(x)=0$ για $x=\frac{1}{2}$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=\frac{1}{2}$ την τιμή $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot e^1=\frac{e}{2}$.
  Πράγματι, αν $x\le\frac{1}{2}$, τότε $f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$, ενώ, αν $x\ge\frac{1}{2}$, τότε $f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\ge f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Για να μελετήσουμε την f ως προς την κυρτότητα, υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγό της. Αυτό είναι επιτρεπτό, διότι η $f'(x)=e^{2x}(1-2x)$ είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ισχύει

$$f''(x)=\left(e^{2x}(1-2x)\right)'=2e^{2x}(1-2x)-2e^{2x}=2e^{2x}(1-2x-1)=-4xe^{2x}.$$

Ο παράγοντας e^{2x} είναι θετικός για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$, οπότε το πρόσημο της f'' εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο του παράγοντα x. Θα είναι μάλιστα αντίθετο από αυτό του παράγοντα x, λόγω του "$-$" που εμφανίζεται μπροστά. Με άλλα λόγια, ισχύει $f''(x)>0$ για $x<0$ και $f''(x)<0$ για $x>0$. Επίσης, η f' μηδενίζεται για $x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\smile$		$\frown$

- Η f' είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.
- Το μοναδικό σημείο καμπής της C_f είναι το $A(0,1)$.

Γ3. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Ακολούθως, θα αναζητήσουμε τις πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$ και το $+\infty$.
Αρχικά, για το $+\infty$, ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{2x} = -\infty.$$

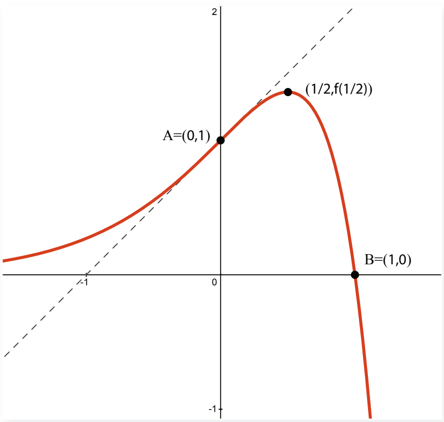
Επομένως, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Επιπλέον,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)e^{2x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{2x}\right] = -\infty,$$

οπότε η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Στη συνέχεια, για το $-\infty$ έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(1-x)}{e^{-2x}} \overset{u=-x}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{1+u}{e^{2u}} \overset{+\infty/+\infty}{=} \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{2e^{2u}}\right) = 0,$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας De L'Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Με βάση τις πληροφορίες για τα σημεία τομής με τους άξονες, τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f στο διπλανό σχήμα. Εκτός των άλλων, έχουμε σχεδιάσει στο σχήμα και την εφαπτομένη στο σημείο καμπής $A(0,1)$, έτσι ώστε να καταδείξουμε ότι «διαπερνά» τη C_f (χαρακτηριστική ιδιότητα του σημείου καμπής).



Γ4. Για κάθε $x \le 0$ ισχύει προφανώς και ότι $x<1$, επομένως $1-x>0$. Επίσης, ισχύει $e^{2x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $f(x)=(1-x)e^{2x}>0$ για κάθε $x\le 0$. Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται λοιπόν από τον τύπο

$$E(\lambda) = \int_\lambda^0 |f(x)|dx = \int_\lambda^0 f(x)dx = \int_\lambda^0 (1-x)e^{2x}dx$$

$$= \int_\lambda^0 (1-x)\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = \left[\frac{(1-x)e^{2x}}{2}\right]_\lambda^0 - \int_\lambda^0 (1-x)'\frac{e^{2x}}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(1-\lambda)e^{2\lambda}}{2} + \int_\lambda^0 \frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{1}{2} - \frac{(1-\lambda)e^{2\lambda}}{2} + \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_\lambda^0$$

$$=\frac{1-(1-\lambda)e^{2\lambda}}{2}+\frac{1-e^{2\lambda}}{4}=\frac{3-2(1-\lambda)e^{2\lambda}+e^{2\lambda}}{4}\boxed{=\frac{3+(2\lambda-3)e^{2\lambda}}{4}.}$$

Συνεπώς,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\mathrm{E}(\lambda)=\lim_{\lambda\to-\infty}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}(2\lambda-3)e^{2\lambda}\right)\quad(1)$$

Ισχύει όμως

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\left[(2\lambda-3)e^{2\lambda}\right]=\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{(2\lambda-3)}{e^{-2\lambda}}\overset{u=-x}{=}\lim_{u\to+\infty}\frac{-2u-3}{e^{2u}}$$

$$\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{u\to+\infty}-\frac{2}{2e^{2u}}=\lim_{u\to+\infty}-\frac{1}{e^{2u}}=0.$$

Επομένως, από τη σχέση (1), έπεται ότι $\boxed{\lim_{\lambda\to-\infty}\mathrm{E}(\lambda)=\frac{3}{4}.}$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}\right)'=\left(x^{\kappa}\right)'(1-x)^{\lambda}+x^{\kappa}\left((1-x)^{\lambda}\right)'$$

$$=\kappa x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda}+\lambda x^{\kappa}(1-x)^{\lambda-1}(1-x)'=\kappa x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda}-\lambda x^{\kappa}(1-x)^{\lambda-1}$$

$$=x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda-1}\left(\kappa(1-x)-\lambda x\right)=x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda-1}(\kappa-\kappa x-\lambda x)$$

$$=x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda-1}\left(\kappa-x(\kappa+\lambda)\right).$$

Ο πρώτος και ο δεύτερος παράγοντας είναι θετικοί στο $(0,1)$. Επομένως, το πρόσημο της f' στο $(0,1)$ εξαρτάται μόνο από τον τρίτο παράγοντα. Για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει λοιπόν η ισοδυναμία

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\kappa-x(\kappa+\lambda)>0\Leftrightarrow x(\kappa+\lambda)<\kappa$$

$$\overset{\kappa+\lambda>0}{\Leftrightarrow}x<\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}.$$

Σημειώνουμε ότι ο $\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}$ ανήκει στο $(0,1)$, καθώς οι κ,λ έχουν υποτεθεί θετικοί (και έτσι ο παρονομαστής είναι μεγαλύτερος από τον αριθμητή –και προφανώς είναι και οι δύο θετικοί). Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f'(x)<0$ για $1>x>\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}$.
Θα βρούμε, τέλος, τα σημεία μηδενισμού της παραγώγου, στο κλειστό διάστημα $[0,1]$
Ισχύει η ισοδυναμία

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^{\kappa-1}(1-x)^{\lambda-1}\left(\kappa-x(\kappa+\lambda)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \ \text{ή} \ x=1 \ \text{ή} \ x=\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}$$

Ο μηδενισμός της f' στα άκρα του διαστήματος δεν είναι στην πραγματικότητα τόσο σημαντικός όσον αφορά τη μονοτονία. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0	$\kappa/(\kappa+\lambda)$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right]$.

- Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x_0=\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}$ με τιμή

$$f\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)=\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)^{\kappa}\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)^{\lambda}.$$

Πράγματι, αν $x\in\left[0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]$, τότε $f(x)\le f\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]$, ενώ, αν $x\in\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right]$, τότε $f(x)\le f\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right]$. Επομένως, για κάθε $x[0,1]$ ισχύει ότι $f(x)\le f\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)$.

- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στα σημεία $x_1=0$ και $x_2=1$ με τιμή $f(0)=f(1)=0$.

Σημείωση:

Το γεγονός ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στα άκρα του διαστήματος δεν οφείλεται στον μηδενισμό της f' στα άκρα. Στην πραγματικότητα, για οποιαδήποτε συνάρτηση ορίζεται σε κλειστό (ή ημι-ανοιχτό) διάστημα, πρέπει να ελέγχουμε τις τιμές στα άκρα όταν κάνουμε εντοπισμό των ακροτάτων. Αυτό αναφέρεται ξεκάθαρα στα σχόλια της σελ. 146 του σχολικού βιβλίου. Δείτε και τη συζήτηση εκεί για περισσότερες λεπτομέρειες.

Δ2. Όπως είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα, ισχύει $f(0)=f(1)=0$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Για την ακρίβεια, αυτά τα συμπεράσματα είναι άμεσα κατευθείαν από τον τύπο της f, χωρίς τη χρήση του προηγούμενου ερωτήματος. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πεδίο ορισμού της g είναι το $A_g=(0,1)$. Η g είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει

$$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Παραπάνω, σχολιάσαμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in A_g$. Άρα το πρόσημο της g' είναι ίδιο με το πρόσημο της f', το οποίο έχουμε προσδιορίσει στο Δ1. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0		$\kappa/(\kappa+\lambda)$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Λόγω συνέχειας της g, προκύπτει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right)$. Για το σύνολο τιμών της, ισχύουν λοιπόν τα εξής:

- Εφόσον η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\left(0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]$, έπεται ότι

$$g\left(\left(0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]\right)=\left(\lim_{x\to 0^+} g(x),g\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)\right]. \qquad (1)$$

Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f(0)=0$, άρα, λόγω συνέχειας, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$. Ισχύει επίσης $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)\overset{u=f(x)}{=}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty.$$

Είδαμε επίσης ότι

$$f\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)=\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)^{\kappa}\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)^{\lambda},$$

άρα

$$g\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)=\ln\left[\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)^{\kappa}\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)^{\lambda}\right]=\kappa\ln\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)+\lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη σχέση (1) ότι

$$g\left(\left(0,\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right]\right)=\left(-\infty,\kappa\ln\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)+\lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)\right] \qquad (2)$$

- Εφόσον η g είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[\kappa/(\kappa+\lambda),1)$, έπεται ότι

$$g\left(\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right)\right)=\left(\lim_{x\to 1^-} g(x),g\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)\right]. \qquad (3)$$

Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f(1)=0$, άρα, λόγω συνέχειας, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)=0$. Ισχύει επίσης $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\ln f(x)\overset{u=f(x)}{=}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty.$$

Είδαμε επίσης προηγουμένως ότι

$$g\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)=\kappa\ln\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)+\lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη σχέση (3) ότι

$$g\left(\left[\frac{\kappa}{\kappa+\lambda},1\right)\right)=\left(-\infty,\kappa\ln\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)+\lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)\right]. \qquad (4)$$

Προκύπτει τελικά από τις (3), (4) ότι το σύνολο τιμών της g είναι το

$$\boxed{g((0,1))=\left(-\infty,\kappa\ln\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)+\lambda\ln\left(\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)\right].}$$

Μένει να δείξουμε ότι η g είναι κοίλη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A_g$ ισχύει $x > 0$ και $1 - x > 0$, οπότε μπορούμε να γράψουμε την g ισοδύναμα στη μορφή

$$g(x) = \ln f(x) = \ln\left(x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}\right) = \ln x^{\kappa} + \ln(1-x)^{\lambda} = \kappa \ln x + \lambda \ln(1-x).$$

Όπως έχουμε αναφέρει, η g είναι παραγωγίσιμη και, με βάση την τελευταία έκφραση, η παράγωγός της είναι ίση με

$$g'(x) = \frac{\kappa}{x} + \frac{\lambda}{1-x}(1-x)' = \frac{\kappa}{x} - \frac{\lambda}{1-x}.$$

Και αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων) και ισχύει

$$g''(x) = -\frac{\kappa}{x^2} + \frac{\lambda}{(1-x)^2} \cdot (1-x)' = -\frac{\kappa}{x^2} - \frac{\lambda}{(1-x)^2}.$$

Εφόσον $\kappa, \lambda > 0$, έπεται ότι $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η g είναι κοίλη.

Δ3. Θέτουμε $u = 1 - x$, όπως ακριβώς υποδεικνύεται και στην εκφώνηση. Τότε, ισχύει $du = -dx$. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x = 0$ έχουμε $u = 1 - 0 = 1$.
- Για $x = 1$ έχουμε $u = 1 - 1 = 0$.

Τέλος, εφόσον $u = 1 - x$, θα ισχύει $x = 1 - u$. Επομένως, το πρώτο μέλος της δοσμένης ισότητας γράφεται στη μορφή

$$\int_0^1 x^{\kappa}(1-x)^{\lambda}\,dx = \int_1^0 (1-u)^{\kappa} u^{\lambda}(-du)$$

$$= \int_0^1 (1-u)^{\kappa} u^{\lambda}\,du = \int_0^1 u^{\lambda}(1-u)^{\kappa}\,du.$$

Όπως έχουμε δει ξανά, η μεταβλητή ολοκλήρωσης δεν είναι παρά ένα σύμβολο. Για παράδειγμα, τα ολοκληρώματα $\int_0^1 f(x)dx, \int_0^1 f(u)du$ και $\int_0^1 f(t)dt$ έχουν όλα ακριβώς το ίδιο νόημα.

Αλλάζοντας ξανά τη μεταβλητή ολοκλήρωσης από u σε x, παίρνουμε απευθείας το ζητούμενο.

Δ4. Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Δ3, με $\kappa = 1$ και $\lambda = 10$. Σύμφωνα λοιπόν με το Δ3, ισχύει

$$\int_0^1 x(1-x)^{10}\,dx = \int_0^1 x^1(1-x)^{10}\,dx = \int_0^1 x^{10}(1-x)^1\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^{10} - x^{11}\right)dx = \left[\frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{12}}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \boxed{= \frac{1}{132}}.$$