Διαγώνισμα 4.16

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 157 (συζήτηση μετά από το θεώρημα).

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 23.

Α3. i) Σ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Θεωρούμε για παράδειγμα τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}.$$

Η f είναι «1-1» διότι καμία οριζόντια ευθεία δεν τέμνει τη γραφική της παράσταση πάνω από μία φορά. Δείτε την αντίστοιχη συζήτηση στις σελ. 34-35 του σχολικού βιβλίου.

ii. Από τις υποθέσεις προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$, ανεξαρτήτως προσήμου.

iii. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 116-117.

iv. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 212.

v. Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ με $x\in\mathbb{R}$ έχει άπειρες θέσεις ολικού μεγίστου, και συγκεκριμένα όλες τις θέσεις της μορφής $x=2\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\int_0^1 xg(x)dx=-\frac{14}{5}\Leftrightarrow \int_0^1 x(x^3-\alpha x)dx=-\frac{14}{5}\Leftrightarrow \int_0^1 (x^4-\alpha x^2)dx=-\frac{14}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^5}{5}-\frac{\alpha x^3}{3}\right]_0^1=-\frac{14}{5}\Leftrightarrow \frac{1}{5}-\frac{\alpha}{3}=-\frac{14}{5}\Leftrightarrow -\frac{\alpha}{3}=-\frac{15}{5}\;\boxed{\Leftrightarrow \alpha=9}$$

B2. Η συνάρτηση f ορίζεται όταν $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 2$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $A_f(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. Η f είναι συνεχής στο A_f ως ρητή. Η f είναι επίσης παραγωγίσιμη στο A_f και για κάθε $x\in A_f$ ισχύει

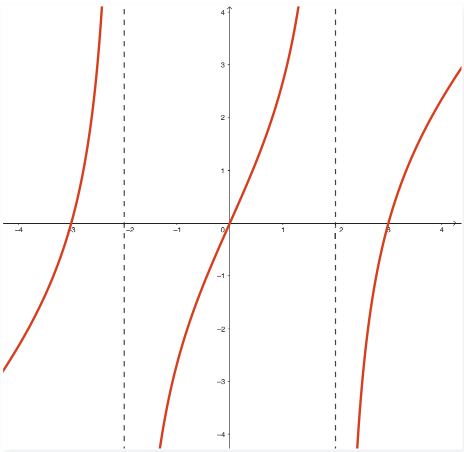
$$f'(x)=\frac{(3x^2-9)(x^2-4)-(x^3-9x)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$=\frac{3x^4-12x^2-9x^2+36-2x^4+18x^2}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-3x^2+36}{(x^2-4)^2}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x\neq\pm 2$, άρα δεν επηρεάζει το πρόσημο της παραγώγου. Βρίσκουμε το πρόσημο του αριθμητή. Θέτοντας $\omega=x^2\geq 0$, αυτός γράφεται ως $\omega^2-3\omega+36$. Αυτό είναι ένα τριώνυμο ως προς ω, με $\Delta=9-144=-135<0$. Προκύπτει έτσι ότι αυτό το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $\omega\geq 0$ (φυσικά και για κάθε $\omega<0$, αλλά από τον ορισμό της η μεταβλητή ω παίρνει μόνο θετικές τιμές). Προκύπτει λοιπόν έτσι ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	-2 $\qquad$ 2	$+\infty$
x^4-3x^2+36	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2),(-2,2)$ και $(2,+\infty)$. Όπως έχουμε επισημάνει ξανά, αυτό δεν είναι αρκετό ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στην ένωση αυτών των διαστημάτων. Εξάλλου κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, όπως φαίνεται καθαρά από τη γραφική παράσταση της f.



Β3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο A_f ως ρητή και για κάθε $x \in A_f$ ισχύει

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-4)^2-(x^4-3x^2+36)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{(x^2-4)((4x^3-6x)(x^2-4)-4x(x^4-3x^2+36)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{4x^5-16x^3-6x^3+24x-4x^5+12x^3-144x}{(x^2-4)^3} = \frac{-10x(x^2+12)}{(x^2-4)^3},$$

όπου στο δεύτερο βήμα παραλείψαμε κάποιους απλούς υπολογισμούς χάριν συντομίας. Το πρόσημο της f'' εξαρτάται από δύο παράγοντες, το x στον αριθμητή και το x^2-4 στον παρονομαστή. Για το πρόσημο του παρονομαστή ισχύει η ακόλουθη ισοδυναμία:

$$x^2-4<0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2}<\sqrt{4} \Leftrightarrow |x|<2$$

$$\Leftrightarrow x \in (-2,2).$$

Ομοίως, μπορούμε να δείξουμε ότι ο παρονομαστής είναι θετικός για $x \in (-\infty,2) \cup (2,+\infty)$. Η κυρτότητα της f φαίνεται λοιπόν στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-2	0		2	$+\infty$
$-10x$	$+$		$+$	0	$-$	$-$
x^2-4	$+$		$-$		$-$	$+$
$f''(x)$	$+$		$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$	$\cap$

- Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty,-2)$ και $(0,2)$ και κοίλη στα διαστήματα $(-2,0)$ και $(2,+\infty)$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=\frac{9}{4}$, άρα η C_f έχει σημείο καμπής στη θέση $x_1=0$.

B4. Αναζητούμε αρχικά κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αυτό έχει νόημα να γίνει στα σημεία $x=2$ και $x=-2$, καθώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. Υπολογίζουμε λοιπόν τα πλευρικά όρια της f σε αυτά τα σημεία. Ισχύει

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-9x}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\left(x^3-9x\right)\cdot\frac{1}{x^2-4}=+\infty,$$

όπου στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{x\to 2^-}\left(x^2-4\right)=0$ και $x^2-4<0$ κοντά στο 2 και αριστερά του 2. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Σύμφωνα με τον ορισμό της ασύμπτωτης στη σελ. 161 του σχολικού βιβλίου, αρκεί να είναι το ένα πλευρικό όριο ίσο με $\pm\infty$ ώστε να χαρακτηριστεί η αντίστοιχη κατακόρυφη ευθεία ως ασύμπτωτη. Επομένως, στα παραπάνω δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το δεξί όριο, αλλά μας αρκεί μόνο το αριστερό. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και η ευθεία $x=-2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Αναζητούμε στη συνέχεια πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-9x}{x^3-4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-1x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-9x}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-9x-x^3+4x}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x^2}=0,$$

επομένως η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η ίδια ευθεία είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$. Τέλος, εφόσον η C_f έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$, δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

B5. Ισχύει

$$\left|\eta\mu\left(x^4-13\right)\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot\left|\eta\mu\left(x^4-13\right)\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu\left(x^4-13\right)\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\Leftrightarrow-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\le\frac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu\left(x^4-13\right)\le\left|\frac{1}{f(x)}\right| \quad (1)$$

Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-9x}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty.$$

Επομένως,

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|f(x)|} = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{|f(x)|}\right) = 0$$

Άρα από τη σχέση (1) και το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\eta\mu(x^4-13)}{f(x)} = 0.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Όπως γνωρίζουμε από τα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου, δύο ευθείες είναι κάθετες αν και μόνο αν οι συντελεστές διεύθυνσης αυτών των ευθειών έχουν γινόμενο ίσο με -1. Σκοπός μας λοιπόν είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές διεύθυνσης των δύο εφαπτόμενων, δηλαδή την παράγωγο της f στα δύο σημεία επαφής. Αρχικά όμως πρέπει να προσδιορίσουμε τα σημεία επαφής A, B. Λύνουμε λοιπόν την εξίσωση $f(x)=\kappa$ για να βρούμε τις τετμημένες των A, B.

$$\begin{aligned} f(x)=\kappa \Leftrightarrow |\ln(x-3)|+1=\kappa &\Leftrightarrow |\ln(x-3)|=\kappa-1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x_A-3)=\kappa-1 \quad \text{και} \quad \ln(x_B-3)=1-\kappa \\ &\Leftrightarrow x_A-3=e^{\kappa-1} \quad \text{και} \quad x_B-3=e^{1-\kappa} \\ &\Leftrightarrow x_A=e^{\kappa-1}+3 \quad \text{και} \quad x_B=e^{1-\kappa}+3, \end{aligned}$$

Άρα τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\kappa$ έχουν τετμημένες τις δύο παραπάνω λύσεις (και φυσικά έχουν κοινή τεταγμένη $y=\kappa$). Για ευκολία, εκτελούμε ένα ενδιάμεσο βήμα, την έκφραση του τύπου της f χωρίς απόλυτες τιμές. Αυτό το κάνουμε διότι, για να δείξουμε ότι οι εφαπτόμενες είναι κάθετες, θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την παράγωγο f' και, για να το κάνουμε αυτό, θα πρέπει να απαλείψουμε τις απόλυτες τιμές. Ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\ln(x-3)<0 \Leftrightarrow \ln(x-3)<\ln 1 \Leftrightarrow x-3<1 \Leftrightarrow x<4,$$

και

$$\ln(x-3)>0 \Leftrightarrow \ln(x-3)>\ln 1 \Leftrightarrow x-3>1 \Leftrightarrow x>4$$

Έτσι, ο τύπος της f γράφεται ισοδύναμα ως

$$f(x)=\begin{cases}1-\ln(x-3), & 3<x<4\\ 1+\ln(x-3), & x\geq 4\end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(3,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(3,4)\cup(4,+\infty)$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ισχύει μάλιστα

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x-3}, & 3<x<4\\ \dfrac{1}{x-3}, & x>4\end{cases}.$$

Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $\kappa>1$, άρα

$$\kappa-1>0\Rightarrow e^{\kappa-1}>e^{0}\Rightarrow e^{\kappa-1}>1\Rightarrow e^{\kappa-1}+3>4\Leftrightarrow x_A>4.$$

Επομένως, βρίσκουμε την κλίση στο σημείο A μέσω του δεύτερου κλάδου της f':

$$f'(x_A)=f'\left(e^{\kappa-1}+3\right)=\frac{1}{e^{\kappa-1}+3-3}=\frac{1}{e^{\kappa-1}}.$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι $x_B<4$, οπότε προσδιορίζουμε την κλίση στο B μέσω του πρώτου κλάδου της f':

$$f'(x_B)=f'\left(e^{1-\kappa}+3\right)=-\frac{1}{e^{1-\kappa}+3-3}=-\frac{1}{e^{1-\kappa}}.$$

Το γινόμενο των κλίσεων είναι ίσο με

$$f'(x_A)\cdot f'(x_B)=\frac{1}{e^{\kappa-1}}\cdot\left(-\frac{1}{e^{1-\kappa}}\right)=-\frac{1}{e^{\kappa-1+1-\kappa}}=-\frac{1}{e^{0}}=-1,$$

οπότε οι εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία A και B είναι κάθετες μεταξύ τους.

Γ2. Για τη μονοτονία της f αρκεί να μελετήσουμε το πρόσημο της f'. Υπενθυμίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x-3}, & 3<x<4\\ \dfrac{1}{x-3}, & x>4\end{cases}.$$

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	3	4	$+\infty$
$x-3$		+	+
$f'(x)$		−	+
$f(x)$		↘	↗

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(3,4]$ και γνησίως αύξουσα στο $[4,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=4$ το $f(4)=1$. Πράγματι, αν $x\in(3,4]$, τότε $f(x)\geq f(4)$, καθώς f γνησίως φθίνουσα στο $(3,4]$, ενώ, αν $x\in[4,+\infty)$, τότε $f(x)\geq f(4)$, καθώς f γνησίως αύξουσα στο $[4,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x>3$ έχουμε $f(x)\geq f(4)$.

Μελετάμε στη συνέχεια την f ως προς την κυρτότητα. Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(3,4)\cup(4,+\infty)$, και εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-3)^2}, & 3<x<4\\ -\dfrac{1}{(x-3)^2}, & x>4\end{cases}.$$

Παρατηρούμε ότι $f''(x)>0$ για $x\in(3,4)$ και $f''(x)<0$ για $x\in(4,+\infty)$. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	3	4	$+\infty$
$f''(x)$		+	−
$f(x)$		∪	∩

Συγκεκριμένα, η f είναι κυρτή στο $(3,4]$ και κοίλη στο $[4,+\infty)$. Για να χαρακτηρίσουμε το $\Gamma(4,f(4))$ ως σημείο καμπής, θα πρέπει πρώτα να ελέγξουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο (δείτε τον ορισμό του σημείου καμπής στη σελ. 158 του σχολικού βιβλίου). Υπολογίζουμε λοιπόν τα αντίστοιχα πλευρικά όρια. Ισχύει

$$\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{1-\ln(x-3)-1}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{-\ln(x-3)}{x-4}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to4^-}\frac{-1/(x-3)}{1}=-1,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Το δεξί όριο ισούται με

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4^+}\frac{\ln(x-3)}{x-4}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 4^+}\frac{1}{x-3}=1.$$

Εφόσον τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα μεταξύ τους, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=4$. Επομένως, δεν ορίζεται εφαπτόμενη της C_f σε αυτό το σημείο και επομένως δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως σημείο καμπής.

Γ3. Κατακόρυφες ασύμπτωτες αναζητούμε:

- Στα άκρα του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν ορίζεται.
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού που δεν είναι συνεχής.

Άρα θα εξετάσουμε αν η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στη θέση $x=3$. Υπολογίζουμε ένα από τα πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(1-\ln(x-3)\right)=+\infty.$$

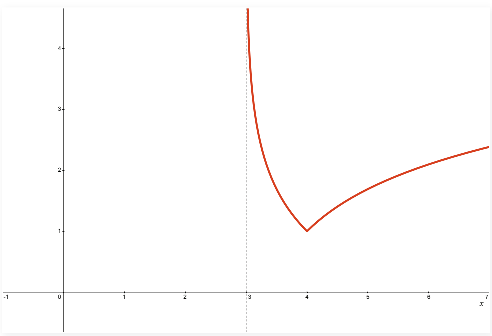
Άρα η ευθεία $x=3$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Για να προσδιορίσουμε τις οριζόντιες ασύμπτωτες, αναζητούμε το όριο στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(1-\ln(x-3)\right)=+\infty,$$

επομένως δεν υπάρχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Για να προσδιορίσουμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες, υπολογίζουμε αρχικά το όριο $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}$. Ισχύει

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\ln(x-3)}{x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{1/(x-3)}{1}=0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Εφόσον το όριο είναι μηδενικό, η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες. Με βάση τη μονοτονία, την κυρτότητα και τις ασύμπτωτες που προσδιορίσαμε παραπάνω, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f στο διπλανό σχήμα.



Γ4. Όπως συμβαίνει με τα περισσότερα ολοκληρώματα λογαριθμικών συναρτήσεων, θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με $E=\int_4^{2e}|f(x)|dx$. Για κάθε $x\in[4,2e]$ ισχύει $f(x)=1+\ln(x-3)>0$, άρα

$$E=\int_4^{2e}f(x)dx=\int_4^{2e}(1+\ln(x-3))dx=\int_4^{2e}1dx+\int_4^{2e}\ln(x-3)dx$$

$$=2e-4+\int_4^{2e}(x)'\ln(x-3)dx$$

$$=2e-4+\left[x\ln(x-3)\right]_4^{2e}-\int_4^{2e}\frac{x}{x-3}dx$$

$$=2e-4+2e\ln(2e-3)-\int_4^{2e}\frac{x-3+3}{x-3}dx$$

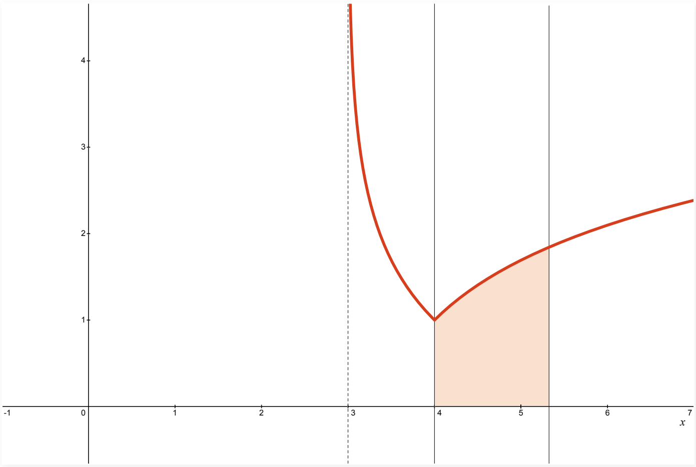
$$=2e-4+2e\ln(2e-3)-\int_4^{2e}\left(1+\frac{3}{x-3}\right)dx$$

$$=2e-4+2e\ln(2e-3)-\left[x+3\ln(x-3)\right]_4^{2e}$$

$$=2e-4+2e\ln(2e-3)-2e-3\ln(2e-3)+4$$

$$\boxed{=(2e-3)\ln(2e-3),\ \text{τετραγωνικές μονάδες}}$$

όπου η ολοκλήρωση κατά παράγοντες χρησιμοποιήθηκε στο τέταρτο βήμα. Παραθέτουμε παρακάτω ένα διάγραμμα που απεικονίζει το εν λόγω επίπεδο χωρίο.



ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Για κάθε $x \in [2,4]$ ισχύει

$$f(x) = \frac{6^{x-2} - 6}{2^{x-2}} = \frac{6^{x-2}}{2^{x-2}} - \frac{6}{2^{x-2}} = 3^{x-2} - 6 \cdot 2^{2-x} = \frac{3^x}{9} - 24 \cdot 2^{-x}.$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα εκθετικών συναρτήσεων και για κάθε $x \in [2,4]$ ισχύει

$$f'(x) = 3^x \cdot \frac{\ln 3}{9} + 24 \ln 2 \cdot 2^{-x} > 0,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\ln 2, \ln 3 > 0$. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Δ2. Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα «1-1», επομένως αντιστρέφεται. Ισχύει

$$f(4) = \frac{6^2 - 6}{2^2} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}.$$

Όπως γνωρίζουμε, για κάθε $x \in A_f$ και $y \in A_{f^{-1}}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Από αυτήν την ισοδυναμία και από τη σχέση $f(4) = \frac{15}{2}$ έπεται ότι $f^{-1}\left(\frac{15}{2}\right) = 4$, όπως θέλαμε.

Δ3. Παρατηρούμε αρχικά ότι $f(3) = 0$. Αυτή η παρατήρηση θα μας χρειαστεί αργότερα. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$2^{x-1} f^2(x) = 15 \cdot 6^{x-2} - 90 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{x-2} f^2(x) = 15\left(6^{x-2} - 6\right) \Leftrightarrow 2f^2(x) = \frac{15\left(6^{x-2} - 6\right)}{2^{x-1}}$$

$$\Leftrightarrow 2f^2(x) = 15f(x) \Leftrightarrow 2f^2(x) - 15f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)\left(2f(x) - 15\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0 \ \text{ή} \ 2f(x) - 15 = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(3) \ \text{ή} \ f(x) = 15/2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(3) \ \text{ή} \ f(x) = f(4) \ \boxed{\Leftrightarrow x = 3 \ \text{ή} \ x = 4}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f είναι «1-1».

Δ4. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\left(2\int_3^4 f(t)dt-15\right)(x-3)^3-2x+8=0.$$

Θέτουμε

Ο «τρομακτικός» 1ος παράγοντας είναι απλώς ένας σταθερός αριθμός.

$$g(x)=\left(2\int_3^4 f(t)dt-15\right)(x-3)^3-2x+8 \text{ για } x\in[3,4].$$

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο $[3,4]$ ως πολυωνυμική.

- $g(3)=-6+8=2>0$.
- $g(4)=2\left(\int_3^4 f(t)dt-\frac{15}{2}\right)-8+8=2\left(\int_3^4 f(t)dt-\frac{15}{2}\right)$.

Θα αποδείξουμε ότι $g(4)<0$. Καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα, για $t\le 4$ ισχύει ότι $f(t)\le f(4)=15/2$. Μάλιστα, λόγω της μονοτονίας, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=4$. Για $t<4$ ισχύει η γνήσια ανισότητα $f(t)<15/2$. Επομένως, για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ισχύει

$$\int_3^4 f(t)dt<\int_3^4\frac{15}{2}dt \Leftrightarrow \int_3^4 f(t)dt<\frac{15}{2} \Leftrightarrow \int_3^4 f(t)dt-\frac{15}{2}<0 \Rightarrow g(4)<0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $g(3)g(4)<0$, άρα, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(3,4)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$. Μένει να αποδείξουμε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της g. Θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα. Ισχύει

$$g'(x)=3\left(2\int_3^4 f(t)dt-15\right)(x-3)^2-2.$$

Αποδείξαμε προηγουμένως ότι $\int_3^4 f(t)dt-\frac{15}{2}<0$, οπότε προκύπτει άμεσα από την παραπάνω έκφραση ότι $g'(x)<0$ για κάθε $x\in[3,4]$. Επομένως, η $g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα το x_0 είναι η μοναδική της ρίζα.

Δ5. Ισχύει $\left(3^x\right)'=3^x\ln 3$, οπότε $3^x=\left(\frac{3^x}{\ln 3}\right)'$. Ομοίως, $2^{-x}=\left(-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right)'$. Επομένως,

$$\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4\left(\frac{3^x}{9}-24\cdot 2^{-x}\right)dx=\left[\frac{3^x}{9\ln 3}+\frac{24\cdot 2^{-x}}{\ln 2}\right]_3^4=\frac{3^4}{9\ln 3}+\frac{24\cdot 2^{-4}}{\ln 2}-\frac{3^3}{9\ln 3}-\frac{24\cdot 2^{-3}}{\ln 2}$$

$$=\frac{9}{\ln 3}+\frac{3}{2\ln 2}-\frac{3}{\ln 3}-\frac{6}{2\ln 2}=\frac{6}{\ln 3}-\frac{3}{2\ln 2}=\frac{6}{\ln 3}-\frac{3}{\ln 4}.$$

Στο Ερώτημα Δ4 αποδείξαμε όμως ότι $\int_3^4 f(x)dx < \frac{15}{2} < 10$, άρα από την παραπάνω σχέση έπεται ότι

$$\boxed{\frac{6}{\ln 3} - \frac{3}{\ln 4} < 10, \text{ όπως θέλαμε.}}$$

Δ6. Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$2f(\kappa) - 2f(\lambda) = 15 \Leftrightarrow f(\kappa) - f(\lambda) = \frac{15}{2}.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[3,4]$, επομένως η τιμή $f(3) = 0 := f_{min}$ είναι το ολικό της ελάχιστο και η τιμή $f(4) = \frac{15}{2} = f_{max}$ είναι το ολικό της μέγιστο. Επομένως, η σχέση $f(\kappa) - f(\lambda) = \frac{15}{2} = f_{max} - f_{min}$ ισχύει μόνο αν $\kappa = 4$ και $\lambda = 3$.

$$+\left[\frac{8}{6} - \frac{1}{6}\right] - \int_1^2 x\ln x dx \ = \frac{2}{3} - \int_1^2 x\ln x dx$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που απομένει, χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$\int_1^2 x\ln x dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}(\ln x)' dx$$

$$= 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \ = 2\ln 2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx \ = 2\ln 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 \ = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Σε συνδυασμό με την παραπάνω ισότητα, προκύπτει ότι $\boxed{E = \frac{17}{12} - 2\ln 2.}$