Διαγώνισμα 4.17

ΘΕΜΑ Α

Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 116.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 140.

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 155.

Α4. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)** Σ, **v)** Λ

Σχόλια για Σ/Λ:

i. Το εμβαδόν του χωρίου είναι ίσο με $\int_{-2}^{2}\left|3x^3-2x\right|dx$. Για να ήταν ίσο με $\int_{-2}^{2}\left(3x^3-2x\right)dx$, όπως ισχυρίζεται η πρόταση, θα έπρεπε να ισχύει $3x^3-2x\geq 0$ για κάθε $x\in[-2,2]$, το οποίο δεν είναι αληθές. Για παράδειγμα, αυτή η παράσταση είναι αρνητική για $x=\frac{1}{2}$.

ii. Μπορεί το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ να μην υπάρχει. Δείτε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση $f(x)=|2x|/x$.

iii. Έπεται από την ιδιότητα 5 του θεωρήματος στη σελ. 48 του σχολικού βιβλίου.

iv. Δείτε το θεώρημα στη σελ. 156 του σχολικού βιβλίου.

v. Δείτε τις ιδιότητες στη σελ. 60 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ Β

Λύση

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x>3$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{1}{x-3}-1=\frac{1}{x-3}-\frac{x-3}{x-3}$$

$$=\frac{1-(x-3)}{x-3}=\frac{4-x}{x-3}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός διότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $(3,+\infty)$. Ο αριθμητής είναι θετικός όταν $4-x>0$, δηλαδή όταν $x\in(3,4)$. Αντίστοιχα, είναι αρνητικός όταν $x>4$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Συμπερασματικά, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα όταν $x\in(3,4]$ και γνησίως φθίνουσα όταν $x\in[4,+\infty)$.

B2. Θεωρούμε τα υποσύνολα $A_1=(3,4]$ και $A_2=[4,+\infty)$ του πεδίου ορισμού της f. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $f\nearrow A_1$. Επίσης, είναι σαφές ότι η f είναι συνεχής. Άρα για την εικόνα αυτού του διαστήματος μέσω της f ισχύει

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to 3^+}f(x),f(4)\right]=(-\infty,1],$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f(4)=1$, καθώς και το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}\left(\ln(x-3)-x+5\right)=(-\infty)-3+5=-\infty.$$

Παρατηρούμε ότι $0\in f(A_1)$, επομένως υπάρχει $x_1\in(3,4]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό το υποδιάστημα, το x_1 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα. Ισχύει μάλιστα $x_1\neq 4$, καθώς $f(4)=1\neq 0=f(x_1)$. Περνάμε τώρα στο διάστημα A_2. Σε αυτό, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε ισχύει

$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to +\infty}f(x),f(4)\right]=(-\infty,1],\qquad (1)$$

όπου το όριο στην τελευταία ισότητα υπολογίστηκε ως εξής: Αρχικά γράφουμε

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\ln(x-3)-x+5\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\ln(x-3)-\ln e^x+5\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\ln\frac{x-3}{e^x}+5\right)=\ell.\qquad (2)$$

Όλα εξαρτώνται λοιπόν από την ποσότητα $u=\dfrac{x-3}{e^x}>0$ με $x\geq 4$. Έτσι, υπολογίζουμε το όριο αυτής της ποσότητας. Ισχύει

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-3}{e^x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{e^x}\overset{1/+\infty}{=}0,$$

άρα το όριο στην ισότητα (2) ισούται με

$$\ell=\lim_{u\to 0}(\ln u+5)=(-\infty)+5=-\infty.$$

Έτσι λοιπόν αποδεικνύεται το τελευταίο βήμα της ισότητας (1). Παρατηρούμε τώρα ότι $0 \in f(A_2)$, επομένως υπάρχει $x_2 \in [4,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$. Καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2, αυτή η ρίζα είναι μοναδική σε αυτό το διάστημα.

Αποδείξαμε λοιπόν μέχρι στιγμής ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 \in (3,4)$ και $x_2 \in [4,+\infty)$. Μένει να δείξουμε ότι $x_2 \in (5,7)$. Για να το κάνουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τη μονοτονία της f. Παρατηρούμε ότι

$$f(7)=\ln(7-3)-7+5=\ln 4-2=2\ln 2-2=2(\ln 2-1)<0,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\ln 2<\ln e=1$. Καθώς $f(x_2)=0$ και $f(7)<0$ και καθώς $7,x_2 \in A_2$, μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε

$$f(7)<f(x_2) \overset{f \searrow A_2}{\Rightarrow} 7<x_2. \quad (3)$$

Δουλεύουμε στη συνέχεια με όμοιο τρόπο: Ισχύει

$$f(5)=\ln(5-3)-5+5=\ln 2>0,$$

και $5,x_2 \in A_2$, άρα

$$f(5)>f(x_2) \overset{f \searrow A_2}{\Rightarrow} 5<x_2. \quad (4)$$

Από τις (3), (4) έπεται τώρα ότι $x_2 \in (5,7)$, όπως θέλαμε.

Β3. Η $x=4$ είναι η μοναδική ρίζα της g και η g είναι συνεχής, άρα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $[3,4)$ και $(4,+\infty)$. Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $f(g(\kappa))=f(g(\lambda))=0$. Είδαμε προηγουμένως ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες $x_1 \in (3,4)$ και $x_2 \in (5,7)$, οπότε οι αριθμοί $g(\kappa)$ και $g(\lambda)$ είναι οι ίδιοι με τους x_1,x_2, ίσως με διαφορετική σειρά.

Ανεξάρτητα όμως από τη σειρά, οι x_1,x_2 είναι θετικοί, άρα και οι $g(\kappa),g(\lambda)$ θα είναι θετικοί. Δεδομένου ότι η g διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα $[3,4)$ και $(4,+\infty)$ και δεδομένου ότι $\kappa \in (3,4)$ και $\lambda \in (4,+\infty)$, συμπεραίνουμε τελικά ότι $g(x)>0$ για κάθε $x \in [3,4) \cup (4,+\infty)$.

Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $g(x)>0$ για κάθε $x \in [3,4) \cup (4,+\infty)$. Ισχύει επίσης από την υπόθεση ότι $g(4)=0$. Με άλλα λόγια λοιπόν, ισχύει $g(x) \geq g(4)$ για κάθε $x \in [3,+\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=4$. Συνοψίζοντας, ισχύει ότι:

- Η g είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=4$ (από υπόθεση).
- Το $x=4$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού $A_g=[3,+\infty)$.
- Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=4$.

Άρα, από το θεώρημα του Fermat, συμπεραίνουμε ότι $g'(4)=0$. Αυτό σημαίνει ότι η κλίση της εφαπτόμενης της g στη θέση $x=4$ είναι μηδέν. Επομένως, αυτή η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Για κάθε $x\neq 2$ ισχύει

$$\begin{aligned} xf'(x)-4x-2f'(x)+f(x)+6=0 &\Leftrightarrow (x-2)f'(x)+f(x)=4x-6 \\ &\Leftrightarrow (x-2)f'(x)+(x-2)'f(x)=4x-6 \\ &\Leftrightarrow \left[(x-2)f(x)\right]'=\left(2x^2-6x\right)'. \end{aligned}$$

Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι:

- Υπάρχει σταθερά c_1 τέτοια, ώστε $(x-2)f(x)=2x^2-6x+c_1$ για κάθε $x<2$. Για $x=1$ παίρνουμε

  $$\begin{aligned} (1-2)f(1)=2\cdot 1^2-6\cdot 1+c_1 &\Leftrightarrow -1=2-6+c_1 \\ &\Leftrightarrow c_1=3. \end{aligned}$$

  Επομένως, για $x<2$ ισχύει

  $$(x-2)f(x)=2x^2-6x+3 \overset{x<2}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{2x^2-6x+3}{x-2}.$$

> Όπως έχουμε επισημάνει ξανά, διακρίνουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις, διότι οι συνέπειες του Θ.Μ.Τ. (σελ. 133 του σχολικού βιβλίου) ισχύουν μόνο για διαστήματα.

- Υπάρχει σταθερά c_2 τέτοια, ώστε $(x-2)f(x)=2x^2-6x+c_2$ για κάθε $x>2$. Για $x=3$ παίρνουμε

  $$\begin{aligned} (3-2)f(3)=2\cdot 3^2-6\cdot 3+c_2 &\Leftrightarrow 3=18-18+c_3 \\ &\Leftrightarrow c_3=3. \end{aligned}$$

  Επομένως, ακριβώς όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε $x>2$ ισχύει

$$f(x)=\frac{2x^2-6x+3}{x-2}.$$

Τελικά, λοιπόν, ισχύει $\boxed{f(x)=\dfrac{2x^2-6x+3}{x-2}\text{ για κάθε } x\neq 2.}$

Γ2. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό μίας πλάγιας ασύμπτωτης, σύμφωνα με τον οποίο, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]=0$$

και το ίδιο για το όριο στο $-\infty$. Για κάθε $x\neq 2$ ισχύει

Ένα συχνό λάθος σε ερωτήσεις θεωρίας είναι να συγχέεται ο ορισμός με το θεώρημα στη σελ. 162 του σχολικού βιβλίου. Βεβαιωθείτε ότι μπορείτε να τα διακρίνετε. Όταν μας δίνεται η ασύμπτωτη, όπως εδώ, βολεύει να χρησιμοποιούμε τον ορισμό.

$$f(x)-(2x-2)=\frac{2x^2-6x+3}{x-2}-\frac{(2x-2)(x-2)}{x-2}$$

$$=\frac{2x^2-6x+3-(2x-2)(x-2)}{x-2}$$

$$=\frac{2x^2-6x+3-2x^2+4x+2x-4}{x-2}=-\frac{1}{x-2}.$$

Πολύ εύκολα λοιπόν μπορούμε από την παραπάνω ισότητα να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-2)\right]=0,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $\boxed{y=2x-2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ρητή. Για κάθε $x\neq 2$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{(2x^2-6x+3)'(x-2)-(2x^2-6x+3)(x-2)'}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(4x-6)(x-2)-(2x^2-6x+3)}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{4x^2-6x-8x+12-2x^2+6x-3}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-8x+9}{(x-2)^2}.$$

Έτσι, οι λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=0$ είναι οι ίδιες με τις λύσεις της εξίσωσης $2x^2-8x+9=0$ στο σύνολο $\mathbb{R}-\{2\}$. Το τελευταίο τριώνυμο όμως έχει διακρίνουσα ίση με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=8^2-4\cdot 2\cdot 9=64-72=-8<0$, οπότε δεν έχει ρίζες. Έτσι, η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη. Μάλιστα, εφόσον έχει αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή στο x^2, το παραπάνω τριώνυμο είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς, η παράγωγος f' είναι επίσης θετική για κάθε $x\neq 2$.

Γ4. Θα κάνουμε αρχικά μια μικρή απλοποίηση στον τύπο της f' ώστε να συναντήσουμε πιο απλούς υπολογισμούς αργότερα. Η λύση μπορεί να γίνει και χωρίς αυτήν την απλοποίηση, απλώς θέλει μεγαλύτερη προσοχή στους υπολογισμούς. Ισχύει

$$f'(x)=\frac{2x^2-8x+9}{(x-2)^2}=\frac{(2x^2-8x+8)+1}{(x-2)^2}=\frac{2(x^2-4x+4)+1}{(x-2)^2}$$

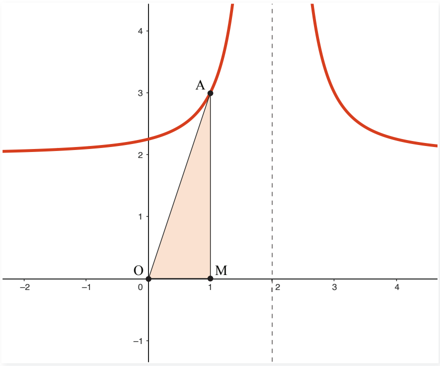
$$=\frac{2(x-2)^2+1}{(x-2)^2}=\frac{1}{(x-2)^2}+2. \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει $x(t_0)=1$, $y(t_0)=3$ και $x'(t_0)=4$ μονάδες/sec. Όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα, ισχύει

$$(\mathrm{MOK})=\frac{1}{2}(\mathrm{MA})\cdot(\mathrm{MO})=\frac{1}{2}\cdot|f'(x)|\cdot|x|$$

$$\overset{f'(x)>0}{=}\frac{1}{2}|x|\cdot f'(x)\overset{x>0}{=}\frac{1}{2}\cdot x\cdot f'(x)$$

$$=\frac{x}{2(x-2)^2}+x,$$



όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε μέσω της σχέσης (1). Συναρτήσει του t, το εμβαδόν του τριγώνου μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathrm{E}(t)=\frac{x(t)}{2(x(t)-2)^2}+x(t).$$

Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως προς t και ισχύει

$$E'(t)=\frac{2x'(t)\left(x(t)-2\right)^2-2x(t)\left[\left(x(t)-2\right)^2\right]'}{4\left(x(t)-2\right)^4}+x'(t)$$

$$=\frac{2x'(t)\left(x(t)-2\right)^2-4x(t)\left(x(t)-2\right)x'(t)}{4\left(x(t)-2\right)^4}+x'(t)$$

Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$E'(t_0)=\frac{2x'(t_0)\left(x(t_0)-2\right)^2-4x(t_0)\left(x(t_0)-2\right)x'(t_0)}{4\left(x(t_0)-2\right)^4}+x'(t_0)$$

$$=\frac{2\cdot 4\cdot(1-2)^2-4\cdot 1\cdot(1-2)\cdot 4}{4(1-2)^4}+4$$

$$\boxed{=\frac{8+16}{4}+4=10 \text{ τετραγωνικές μονάδες ανά δευτερόλεπτο.}}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $[-4,\pi]$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-4,0)$ και στο $(0,\pi]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων. Μένει λοιπόν να αποδείξουμε ότι είναι και συνεχής στο $x=0$. Για να το κάνουμε αυτό, θα υπολογίσουμε τα αντίστοιχα πλευρικά όρια. Ισχύει $f(0)=2$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x+4}=\sqrt{4}=2$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2e^x\text{συν}x=2.$$

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι το $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=2,$ άρα η f είναι συνεχής και στη θέση $x=0$, οπότε είναι συνεχής σε ολόκληρο το διάστημα $\left[-4,\frac{\pi}{2}\right]$.

Κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος $\left[-4,\frac{\pi}{2}\right]$ στα οποία η f' μηδενίζεται, καθώς και τα εσωτερικά σημεία αυτού του διαστήματος στα οποία η f δεν παραγωγίζεται. Υπολογίζουμε την f' ξεχωριστά για καθέναν από τους δύο κλάδους της f.

- Για $-4 \le x < 0$ ισχύει $f(x) = \sqrt{x+4}$. Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-4,0)$, με $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} > 0$. Επομένως, η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο διάστημα $(-4,0)$.

- Για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ισχύει $f(x) = 2e^x \sigma\upsilon\nu x$. Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, με
$$f'(x) = \left(2e^x \sigma\upsilon\nu x\right)' = 2e^x \sigma\upsilon\nu x - 2e^x \eta\mu x = 2e^x\left(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\right).$$

  Για να βρούμε τα σημεία μηδενισμού της f', αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0$ στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu x$ δεν μηδενίζεται σε αυτό το διάστημα, οπότε μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση ως εξής:
$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1,$$
  η οποία έχει λύσεις όλους τους αριθμούς της μορφής $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, για $\kappa \in \mathbb{Z}$. Η μόνη όμως από αυτές τις λύσεις που ανήκει στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι η $x = \frac{\pi}{4}$. Επομένως, αυτό είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f σε αυτό το διάστημα.

Μένει να ελέγξουμε αν το $x = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της f. Θα ελέγξουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$. Υπολογίζουμε τα δύο αντίστοιχα πλευρικά όρια. Το αριστερό όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x+4}^{\,2}-2^2}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$
$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Το δεξί όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2e^x\sigma\upsilon\nu x - 2}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2(e^x\sigma\upsilon\nu x - 1)}{x} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{2e^x\left(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\right)}{1} = 2,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $0/0$ (και παραλείψαμε κάποιους υπολογισμούς χάριν συντομίας). Εφόσον τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=0$. Άρα το $x=0$ είναι κρίσιμο σημείο της f. Συνοψίζοντας, τα κρίσιμα σημεία της f είναι το $x=0$ και το $x=\pi/4$.

Δ2. Θα μελετήσουμε τη μονοτονία της f μέσω του προσήμου της f'.

- Στο προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι για $x\in(4,0)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}>0.$ Επίσης, η f είναι συνεχής στα σημεία $x=0$ και $x=-4$, καθώς στο Ερώτημα Δ1 αποδείξαμε ότι είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-4,0]$.

- Για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ είδαμε ότι $f'(x)=2e^x(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$, οπότε το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο του παράγοντα $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$. Θέτουμε λοιπόν $h(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η h είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $h'(x)=-\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$. Γνωρίζουμε ότι οι $\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x$ είναι θετικοί στο πρώτο τεταρτημόριο, δηλαδή για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Επομένως, ισχύει $h'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Λόγω συνέχειας, η h είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Καθώς

$$h(\pi/4)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right)-\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0,$$

προκύπτει ότι:

  - για $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $x>\dfrac{\pi}{4}\overset{h\searrow}{\Rightarrow}h(x)<h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.
  - για $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ ισχύει $x<\dfrac{\pi}{4}\overset{h\searrow}{\Rightarrow}h(x)>h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας για την f στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$:

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$h(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Εάν θέλουμε να συμπεριλάβουμε και το διάστημα $[-4,0)$, τότε αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x=0$ λόγω του Ερωτήματος Δ1. Καθώς είναι γνησίως αύξουσα στα υποδιαστήματα $[-4,0)$ και $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$, προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $\left[-4,\frac{\pi}{4}\right]$. Προκύπτει έτσι ο παρακάτω εκτεταμένος πίνακας μονοτονίας:

x	-4	$\pi/4$	$\pi/2$
$h(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Συνεπώς, για το σύνολο τιμών μπορούμε να πούμε τα εξής:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_1=\left[-4,\frac{\pi}{4}\right]$, άρα

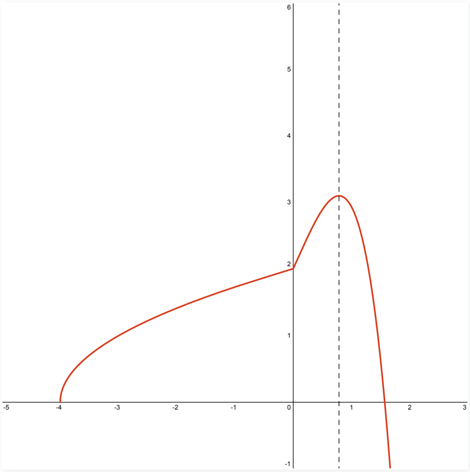
$$f(A_1)=\left[f(-4),f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\sqrt{2}e^{\pi/4}\right].$$

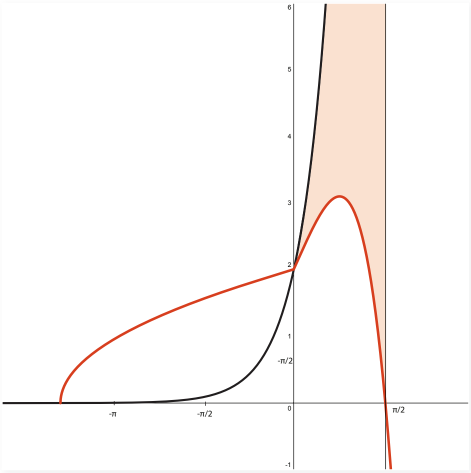
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$, άρα

$$f(A_2)=\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\sqrt{2}e^{\pi/4}\right].$$

Για τους ενδιαφερόμενους, παραθέτουμε και τη γραφική παράσταση της f:

Εκτός από τη γραφική παράσταση, έχουμε σχεδιάσει και την ευθεία $x=\frac{\pi}{4}$, για να τονίσουμε τη θέση στην οποία η f παρουσιάζει μέγιστο. Τέλος, από το σχήμα επιβεβαιώνεται το συμπέρασμά μας ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$, καθώς η καμπύλη της γραφικής παράστασης παρουσιάζει «γωνία» σε αυτήν τη θέση.





Δ3. Το εν λόγω χωρίο απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα, όπου με πορτοκαλί χρώμα έχουμε χρωματίσει τη γραφική παράσταση της g.
Μάλιστα, το χωρίο δεν φαίνεται στο σχήμα εξ ολοκλήρου, καθώς το σημείο τομής της C_g με την ευθεία $x=\dfrac{\pi}{2}$ έχει τεταγμένη ίση με $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=2e^{\pi}\approx 46{,}28$.
Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E=\int_0^{\pi/2}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^{\pi/2}2e^x\left|\text{συν}x-e^x\right|dx. \quad (1)$$

Για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ισχύει

$$\begin{cases}\text{συν}x\le 1\\ e^x\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{συν}x\le 1\\ -e^x\le -1\end{cases}\Rightarrow \text{συν}x-e^x\le 0.$$

Άρα από τη σχέση (1) έπεται ότι

$$E=\int_0^{\pi/2}2e^x\left(e^x-\text{συν}x\right)dx=2\int_0^{\pi/2}e^{2x}dx-2\int_0^{\pi/2}e^x\text{συν}x\,dx. \quad (2)$$

Ο πρώτος όρος είναι εύκολο να υπολογιστεί:

$$2\int_0^{\pi/2}e^{2x}dx=2\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\pi/2}=2\cdot\frac{e^{\pi}-1}{2}=e^{\pi}-1. \quad (3)$$

Για τον δεύτερο όρο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Συμβολίζουμε αυτόν τον όρο με I. Ισχύει

$$I=2\int_0^{\pi/2}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=2\int_0^{\pi/2}\left(e^x\right)'\sigma\upsilon\nu x dx=2\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}e^x\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'dx$$

$$=-2+2\int_0^{\pi/2}e^x\eta\mu x dx=-2+2\int_0^{\pi/2}\left(e^x\right)'\eta\mu x dx=-2+2\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}e^x\left(\eta\mu x\right)'dx$$

$$=-2+2e^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=-2+2e^{\pi/2}-I.$$

Συνδυάζοντας το πρώτο με το τελευταίο μέλος της παραπάνω ισότητας, παίρνουμε

$$=-2+2e^{\pi/2}-I\Leftrightarrow 2I=-2+2e^{\pi/2}\Leftrightarrow I=e^{\pi/2}-1.$$

Έπεται λοιπόν από τις σχέσεις (2), (3) ότι

$$\boxed{E=\left(e^{\pi}-1\right)-\left(e^{\pi/2}-1\right)=\left(e^{\pi}-e^{\pi/2}\right).}$$

Δ4. Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$16e^{-\pi/4}f(x)-e^{-\pi/4}(4x-\pi)^2=16\sqrt{2}\Leftrightarrow 16f(x)-(4x-\pi)^2=16\sqrt{2}e^{\pi/4}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\frac{(4x-\pi)^2}{16}=\sqrt{2}\cdot e^{\pi/4}\Leftrightarrow f(x)-f(\pi/4)=\left(\frac{4x-\pi}{4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x)-f(\pi/4)=(x-\pi/4)^2.$$

Σύμφωνα με τον πίνακα μονοτονίας της f, το αριστερό μέλος είναι αρνητικό για κάθε $x\in A_f-\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$, διότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x=\frac{\pi}{4}$ και αυτή είναι η μοναδική θέση ολικού μεγίστου. Από την άλλη, το δεξιό μέλος είναι θετικό για κάθε $x\neq\frac{\pi}{4}$. Επομένως, αφού το ένα μέλος είναι θετικό και το άλλο αρνητικό, κανένας αριθμός διαφορετικός του $\frac{\pi}{4}$ δεν μπορεί να είναι λύση της εξίσωσης.

Από την άλλη, για $x=\frac{\pi}{4}$, και τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι ίσα με μηδέν.

$$\boxed{\text{Επομένως, το } x=\tfrac{\pi}{4} \text{ είναι η μοναδική λύση.}}$$