Διαγώνισμα 4.18

ΘΕΜΑ Α

Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 135.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 157-158 (συζήτηση μετά από το θεώρημα).

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 31 (υποσημείωση στο τέλος της σελίδας).

Α4. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Λ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Θεωρούμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}.$$

Η f είναι «1-1» διότι καμία οριζόντια ευθεία δεν τέμνει τη γραφική της παράσταση πάνω από μία φορά. Δείτε την αντίστοιχη συζήτηση στις σελ. 34-35 του σχολικού βιβλίου.

ii. Η συνάρτηση $f(x)=-e^x$ είναι η αντίστροφη της $g(x)=-\ln x$ και επομένως γι' αυτόν το λόγο οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$.

iii. Η συνάρτηση $f(x)=|x|-1$ είναι συνεχής στο $[-3,3]$ με $f(1)=f(-1)=0$. Όμως $f(-3)=f(3)=2>0$, άρα $f(-3)f(3)>0$.

iv. Οι $f(x_0)$ και $g(x_0)$ είναι σταθεροί αριθμοί, δηλαδή η παράγωγός τους θα είναι πάντα μηδέν. Για παράδειγμα, αν $f(x)=5x$ και $g(x)=x^2$, τότε

$$(f+g)'(1)=f'(1)+g'(1)=5+2=7,$$

αλλά $\left(f(1)+g(1)\right)'=(5+1)'=0$.

v. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y=0$ στο $+\infty$, κάτι που μπορούμε να αποδείξουμε με χρήση του κριτηρίου παρεμβολής (δείτε τη λύση του Ερωτήματος Β1 παρακάτω). Παρ' όλα αυτά, την τέμνει σε όλα τα σημεία με τετμημένη της μορφής $x=\kappa\pi$ με $\kappa\in\mathbb{Z}$.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=\mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων, και ισχύει $f'(x)=-\eta\mu x+4x-2\pi$. Η f' είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων, με παράγωγο $f''(x)=-\sigma\upsilon\nu x+4>0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Για να αποδείξουμε ότι η f έχει ακριβώς ένα ακρότατο, θα δείξουμε αρχικά ότι η f' έχει ακριβώς ένα σημείο μηδενισμού. Εφόσον $f''(x)>0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Εφόσον είναι και συνεχής, μπορούμε να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών της από τον τύπο

$$f'(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f'(x),\lim_{x\to+\infty}f'(x)\right). \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε τα δύο όρια, θα δείξουμε πρώτα ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$. Χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής: Ισχύει

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}\Rightarrow-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}.$$

Εφόσον

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{|x|}=0,$$

το ζητούμενο έπεται. Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}(\eta\mu x/x)=0$. Για τα όρια της f' λοιπόν μπορούμε να δουλέψουμε ως εξής:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}f'(x)&=\lim_{x\to-\infty}(-\eta\mu x+4x-2\pi)\\&=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\frac{\eta\mu x}{x}+4-\frac{2\pi}{x}\right)=-\infty,\end{aligned}$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα που αποδείξαμε παραπάνω. Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$. Συνεπώς, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f'(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Εφόσον $0\in\mathbb{R}=f'(\mathbb{R})$, έπεται ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Μάλιστα, αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι ο μοναδικός πραγματικός αριθμός με αυτήν την ιδιότητα. Επιπλέον, ισχύουν οι συνεπαγωγές:

- $x<x_0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_0)=0$.
- $x>x_0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0$.

Σχηματίζουμε λοιπόν για την f τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Από αυτόν τον πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f έχει ακριβώς ένα ακρότατο, το οποίο είναι ολικό ελάχιστο, και παρουσιάζεται στη θέση $x=x_0$.

  Πράγματι, αν $x\in(-\infty,x_0]$, τότε $f(x)\geq f(x_0)$, καθώς f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,x_0]$, ενώ, αν $x\in[x_0,+\infty)$, τότε $f(x)\geq f(x_0)$, καθώς f γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f(x)\geq f(x_0)$.

Β2. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι η παράγωγος $f'(x)=-\eta\mu x+4x-2\pi$ είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f'(x_0)=0$. Παρατηρούμε ότι

$$f'(0)=-\eta\mu 0+4\cdot 0-2\pi=-2\pi<0$$

και

$$f'(\pi)=-\eta\mu\pi+4\pi-2\pi=2\pi>0,$$

άρα

$$f'(0)<0=f'(x_0)<f'(\pi).$$

Από τη μονοτονία της f' και από την τελευταία ανισότητα, έπεται ότι $0<x_0<\pi$, όπως θέλαμε. Για να αποδείξουμε ότι το ελάχιστο της f, δηλαδή η τιμή $f(x_0)$, είναι αρνητικός αριθμός, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f(\pi)=\sigma\upsilon\nu\pi+2\pi^2-2\pi^2+1=0$. Εφόσον $x_0<\pi$, έπεται από τον πίνακα μονοτονίας της f ότι $f(x_0)<f(\pi)=0$, που είναι το ζητούμενο.

B3. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 2\pi]$ και ισχύουν τα εξής:

- $f(0)=2>0$,
- $f(x_0)<0$,
- $f(2\pi)=8\pi^2-4\pi^2+1=4\pi^2+1>0$.

Εφόσον $f(0)f(x_0)<0$ και $f(x_0)f(2\pi)<0$, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(0,x_0)$ και τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(x_0,2\pi)$ τέτοια, ώστε $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,x_0)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(x_0,+\infty)$, επομένως είναι αδύνατο να έχει άλλες ρίζες πέραν των ξ_1,ξ_2.

B4. Η εφαπτόμενη ευθεία σε ένα σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=f'(\alpha)\cdot x+f(\alpha)-\alpha f'(\alpha).$$

Για να διέρχεται αυτή η ευθεία από το σημείο $M(0,-1)$, θα πρέπει να ισχύει

$$-1=f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)\Leftrightarrow -1=\left(\sigma\upsilon\nu\alpha+2\alpha^2-2\pi\alpha+1\right)-\alpha\left(-\eta\mu\alpha+4\alpha-2\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow 0=\sigma\upsilon\nu\alpha+\alpha\cdot\eta\mu\alpha-2\alpha^2+2.$$

Θέτουμε λοιπόν $g(x)=\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x-2x^2+2$ για $x\in\mathbb{R}$. Σύμφωνα με την εκφώνηση και βάσει της παραπάνω ισοδυναμίας, σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η g έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων, και ισχύει

$$g'(x)=-\eta\mu x+\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x-4x=x\sigma\upsilon\nu x-4x=x(\sigma\upsilon\nu x-4).$$

Ο δεύτερος παράγοντας είναι ξεκάθαρα αρνητικός, καθώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$. Επομένως, το πρόσημο της g' εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του παράγοντα x. Προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Θεωρούμε τα διαστήματα $A_1=(-\infty,0)$ και $A_2=[0,+\infty)$. Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, δηλαδή ότι η g έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$, θα αποδείξουμε ότι έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από αυτά τα δύο διαστήματα.

- Η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A_1, οπότε για την εικόνα του A_1 ισχύει ότι $g(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), g(0)\right)$.

$$g(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty} g(x), g(0)\right). \qquad (2)$$

Για να υπολογίσουμε το όριο στο $-\infty$, θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$.Αυτό αποδεικνύεται μέσω του κριτηρίου παρεμβολής. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}\Rightarrow-\frac{1}{x^2}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}.$$

Καθώς $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{x^2}=0$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$. Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$, όπως αποδείξαμε στο Ερώτημα Β1. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}+\frac{\eta\mu x}{x}-2-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty.$$

Ισχύει επίσης $g(0)=3$, άρα από τη σχέση (2) παίρνουμε ότι $g(A_1)=(-\infty,3)$. Ισχύει λοιπόν $0\in g(A_1)$, άρα υπάρχει $x_1\in A_1$ τέτοιο, ώστε $g(x_1)=0$. Το x_1 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα στο διάστημα A_1, καθώς η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1.

- Η g είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2=[0,+\infty)$, οπότε

$$g(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right].$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά το όριο στο $+\infty$. Αρχικά, ομοίως με πριν, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$. Επίσης, έχουμε ήδη αποδείξει στο προηγούμενο ερώτημα ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}+\frac{\eta\mu x}{x^2}-2-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$$

Ισχύει επίσης $g(0)=3$. Άρα $g(A_2)=(-\infty,3]$. Ισχύει λοιπόν $0\in g(A_2)$, άρα υπάρχει $x_2\in A_2$ τέτοιο, ώστε $g(x_2)=0$. Το x_2 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα στο διάστημα A_2, καθώς η g είναι γνησίως φθίνουσα στο A_2.

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι η g έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$ και, κατ' επέκταση, η C_f έχει ακριβώς δύο εφαπτόμενες που διέρχονται από το σημείο $M(0,1)$.

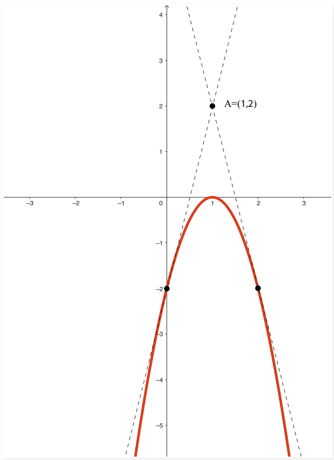
ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Αναζητούμε τις εφαπτόμενες της C_f που περνούν από το σημείο $A(1,2)$ (αυτή είναι η σημασία του ρήματος «άγονται»). Έστω $B(x_0,f(x_0))$, ένα σημείο της C_f. Η εφαπτόμενη ευθεία (ε) στο σημείο έχει εξίσωση

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y+2(x_0-1)^2=-4(x_0-1)(x-x_0)$$
$$\Leftrightarrow y=-4(x_0-1)x+4x_0^2-4x_0-2(x_0-1)^2.$$

Η (ε) διέρχεται από το A αν και μόνο αν οι συντεταγμένες $x=1$ και $y=2$ επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή αν

$$2=-4x_0+4+4x_0^2-4x_0-2(x_0-1)^2 \Leftrightarrow 2=4x_0^2-8x_0+4-2(x_0-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x_0^2-4x_0=0 \Leftrightarrow 2x_0(x_0-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x_0=0 \text{ ή } x_0=2$$



Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της C_f που άγονται από το σημείο $A(1,2)$. Οι εξισώσεις τους προκύπτουν αντικαθιστώντας $x_0=0$ και $x_0=2$ στην αρχική εξίσωση της εφαπτομένης στο $B(x_0,f(x_0))$ που γράψαμε παραπάνω. Οι εξισώσεις είναι οι εξής:

- Για $x_0=0$ έχουμε την εξίσωση $y=4x-2$.
- Για $x_0=2$ έχουμε την εξίσωση $y=-4x+6$.

Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται αυτές οι δύο εφαπτόμενες.

Γ2. Έστω $\Lambda(x_\Lambda(t), y_\Lambda(t))$ το ζητούμενο σημείο, όπου ισχύει $x'_\Lambda(t)=y'_\Lambda(t)$. Εφόσον το $K(x(t),y(t))$ κινείται επί της C_f, θα ισχύει $y(t)=-2(x(t)-1)^2$. Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη αυτής της ισότητας παίρνουμε ότι

$$y'(t)=-4(x(t)-1)\cdot x'(t)=-4x(t)x'(t)+4x'(t).$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου Λ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $x'_\Lambda(t)=y'_\Lambda(t)$, η παραπάνω ισότητα γράφεται ως

$$x'_\Lambda(t)=-4\cdot x_\Lambda(t)\cdot x'_\Lambda(t)+4x'_\Lambda(t)\overset{x'\neq 0}{\Leftrightarrow}1=-4\cdot x_\Lambda(t)+4$$

$$\Leftrightarrow -3=-4\cdot x_\Lambda(t)\quad \boxed{\Leftrightarrow x(t)=\frac{3}{4},}$$

όπου στο πρώτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $x'(t)\neq 0$ για κάθε $t\geq 0$ (το οποίο δίνεται εμμέσως στην εκφώνηση) για να διαιρέσουμε όλους τους όρους με $x'_\Lambda(t)$ και να απλοποιήσουμε έτσι την εξίσωση. Τέλος, ισχύει

$$y_\Lambda(t)=-2\left(\frac{3}{4}-1\right)^2=-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2=-2\cdot\frac{1}{16}=-\frac{1}{8},$$

άρα $\Lambda\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{8}\right)$.

Γ3. Ισχύει $f(x)=-2(x-1)^2$, άρα

$$\frac{1}{f(x)+8}=\frac{1}{-2(x-1)^2+8}=\frac{1}{-2\left[(x-1)^2-4\right]}$$

$$=\frac{1}{-2(x-3)(x+1)}=\frac{A}{-2(x-3)}+\frac{B}{x+1},\quad (1)$$

Ο σκοπός της ανάλυσης σε απλά κλάσματα είναι να καταλήξουμε σε ποσότητες των οποίων το ολοκλήρωμα μπορούμε να υπολογίσουμε.

όπου οι A, B είναι πραγματικοί αριθμοί τους οποίους θέλουμε να προσδιορίσουμε. Θεωρούμε τώρα τα δύο τελευταία βήματα στην παραπάνω ισότητα, δηλαδή τη σχέση

$$\frac{1}{-2(x-3)(x+1)}=\frac{A}{-2(x-3)}+\frac{B}{x+1}.$$

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών, παίρνουμε ότι

$$1 = A(x+1) - 2B(x-3)$$

για κάθε $x \neq 3$ και $x \neq -1$. Αρκεί τώρα να αντικαταστήσουμε δύο τυχαίες τιμές του x και να λύσουμε το αντίστοιχο σύστημα ως προς A, B.

- Για $x = 0$ παίρνουμε $1 = A + 6B$.
- Για $x = -2$ παίρνουμε $1 = -A + 10B$.

Προσθέτοντας αυτές τις δύο σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε $16B = 2$, δηλαδή $B = 1/8$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη (ή στη δεύτερη) εξίσωση, παίρνουμε $A = 1/4$. Επομένως, προκύπτει από τη σχέση (1) ότι

$$\frac{1}{f(x)+8} = \frac{1/4}{-2(x-3)} + \frac{1/8}{x+1} = -\frac{1}{8(x-3)} + \frac{1}{8(x+1)},$$

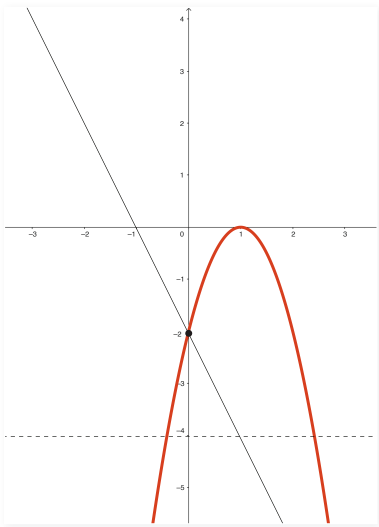
οπότε

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{f(x)+8} dx = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{8} \cdot \ln|x-3| + \frac{1}{8} \cdot \ln|x+1| \right]_{-2}^{2}$$

$$\boxed{= \frac{1}{8}\ln 3 + \frac{1}{8}\ln 5 = \frac{1}{8}\ln 15.}$$

Γ4. Στις περιπτώσεις που το ζητούμενο αφορά εμβαδά, είναι πάντοτε καλό να σχεδιάζουμε ένα πρόχειρο σχήμα για βοήθεια. Ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που το ζητούμενο είναι πιο περίπλοκο, όπως εδώ. Παραθέτουμε λοιπόν ένα σχήμα στο οποίο έχουμε επιλέξει μια τυχαία τιμή του α, πιο συγκεκριμένα $\alpha = \sqrt{2}$. Στο σχήμα φαίνεται ξεκάθαρα ότι η οριζόντια ευθεία χωρίζει το χωρίο μεταξύ της C_f και της ευθείας $y = -2x - 2$ (κόκκινη ευθεία) σε τρία μέρη. Θα βρούμε αρχικά τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = 2x - 2$. Λύνουμε λοιπόν την εξίσωση $f(x) = -2x - 2$. Αυτή γράφεται ισοδύναμα στη μορφή



$$f(x)=-2x-2 \Leftrightarrow -2(x-1)^2=-2(x+1)$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=x+1 \Leftrightarrow x^2-3x=0$$
$$\Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\; \text{ή} \;\; x=3.$$

Το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y=-2x-2$ είναι ίσο με

$$\mathrm{E}=\int_0^3\left|-2(x-1)^2+2x+2\right|dx=\int_0^3\left|-2x^2+4x-2+2x+2\right|dx=\int_0^3\left|-2x^2+6x\right|dx$$
$$=\int_0^3\left|2x(3-x)\right|dx=\int_0^3 2x(3-x)dx=\int_0^3\left(-2x^2+6x\right)dx.$$

Εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι x∈[0,3], οπότε x>0 και 3-x>0.

$$=\left[\frac{-2x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\right]_0^3=\frac{-2\cdot 3^3}{3}+3\cdot 3^2=-18+27=9.$$

Τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-2\alpha^2$ και της C_f δίνονται από τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=-2\alpha^2$. Αυτή γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$-2(x-1)^2=-2\alpha^2 \Leftrightarrow x-1=\alpha \;\; \text{ή} \;\; x-1=-\alpha$$
$$\Leftrightarrow x=\alpha+1 \;\; \text{ή} \;\; x=1-\alpha.$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι, για x μεταξύ των $1-\alpha$ και $1+\alpha$, ισχύει $f(x)>-2\alpha^2$, δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=-2\alpha^2$. Αυτό μπορούμε να το δούμε γραφικά στο παραπάνω σχήμα, αλλά μπορούμε να το δούμε και από την παρακάτω ισοδυναμία:

$$f(x)>-2\alpha^2 \Leftrightarrow -2(x-1)^2>-2\alpha^2 \Leftrightarrow (x-1)^2<\alpha^2$$
$$\Leftrightarrow |x-1|<|\alpha| \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} |x-1|<\alpha$$
$$\Leftrightarrow -\alpha<x-1<\alpha \Leftrightarrow 1-\alpha<x<1+\alpha.$$

Δηλαδή το x είναι μεταξύ των τιμών που αναφέραμε παραπάνω.

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία $y=-2\alpha^2$ και τη C_f είναι ίσο με

$$\mathrm{E}_1=\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\left|f(x)-\left(-2\alpha^2\right)\right|dx=\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\left(f(x)+2\alpha^2\right)dx=\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\left(-2(x-1)^2+2\alpha^2\right)dx$$
$$=\int_{1-\alpha}^{\alpha+1}\left(-2x^2+4x-2+2\alpha^2\right)dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+\frac{4x^2}{2}+\left(2\alpha^2-2\right)x\right]_{1-\alpha}^{\alpha+1}$$

$$=-\frac{2}{3}\left[(\alpha+1)^3-(1-\alpha)^3\right]+2\left[(\alpha+1)^2-2(1-\alpha)^2\right]+\left(2\alpha^2-2\right)2\alpha$$

$$=-\frac{4\alpha^3}{3}+4\alpha^3-2=\frac{8\alpha^3}{3}-2,$$

όπου απλώς παραλείψαμε κάποιους υπολογισμούς χάριν συντομίας. Σύμφωνα με την υπόθεση, θα πρέπει αυτό το εμβαδόν να είναι ίσο με το $\frac{1}{2}$ του συνολικού εμβαδού που υπολογίσαμε παραπάνω, το οποίο ήταν ίσο με 9. Θα πρέπει λοιπόν

$$\boxed{\frac{8\alpha^3}{3}-2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 8\alpha^3=\frac{13}{2}\Leftrightarrow \alpha=\sqrt[3]{\frac{13}{16}}.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Λύση

Δ1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αναζητούμε τώρα πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$. Ισχύει

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+4x}{x\left(x^2+2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-2x^2+4\right)}{x\left(x^2+2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2,$$

και

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x^3+4x}{x^2+2}+\frac{2x\left(x^2+2\right)}{x^2+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^3+4x+2x^3+4x}{x^2+2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{x^2}=0,$$

άρα η ευθεία $\boxed{y=-2x}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Με εντελώς όμοιο τρόπο, βρίσκουμε ότι η ίδια ευθεία είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$. Εφόσον η C_f έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$, δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Δ2. Ισχύει

$$E(\alpha)=\int_{-\alpha}^{-3\alpha}\left|f(x)+2x\right|dx=\int_{-\alpha}^{-3\alpha}\left|\frac{8x}{x^2+2}\right|dx\overset{-\alpha>0}{=}\int_{-\alpha}^{-3\alpha}\frac{8x}{x^2+2}dx$$

$$=\left[4\ln\left(x^2+2\right)\right]_{-\alpha}^{-3\alpha}=4\ln\left(9\alpha^2+2\right)-4\ln\left(\alpha^2+2\right)=4\ln\frac{9\alpha^2+2}{\alpha^2+2}.$$

Επομένως,

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\mathrm{E}(\alpha)=\lim_{\alpha\to-\infty}\left(4\ln\frac{9\alpha^2+2}{\alpha^2+2}\right)\quad(1)$$

Ισχύει

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{9\alpha^2+2}{\alpha^2+2}=\lim_{\alpha\to-\infty}\frac{9\alpha^2}{\alpha^2}=9,$$

οπότε, θέτοντας $u=\left(9\alpha^2+2\right)/\left(\alpha^2+2\right)$, παίρνουμε από την (1) ότι

$$\boxed{\lim_{\alpha\to-\infty}\mathrm{E}(\alpha)=\lim_{u\to9}4\ln u=4\ln9.}$$

Δ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g(x)=\frac{-2x^3+4x}{x^2+2}-\frac{4x}{x^2+2}=\frac{-2x^3}{x^2+2},$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη ως ρητή. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x)=\frac{-6x^2\left(x^2+2\right)+2x^3(2x)}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{-6x^4-12x^2+4x^4}{\left(x^2+2\right)^2}$$

$$=\frac{-2x^4-12x^2}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{-2x^2\left(x^2+6\right)}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $g'(x)<0$ για κάθε $x\neq0$, και $g'(0)=0$. Εφόσον η g είναι συνεχής στη θέση $x=0$, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Επομένως, είναι και αντιστρέψιμη. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε και 1–1, άρα αντιστρέψιμη.

Προκύπτει από το θεώρημα 3(iii) στη σελ. 144 του σχολικού βιβλίου, το οποίο μας βγάζει από τη δύσκολη θέση όταν η παράγωγος δεν είναι θετική παντού αλλά μηδενίζεται σε κάποιο/α μεμονωμένο/α σημείο/α.

Δ4. Είδαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι

$$g(x)=-\frac{2x^3}{x^2+2}\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}.$$

Θέτουμε $u=g^{-1}(x)$. Ισχύει τότε $x=g(u)$, οπότε $dx=g'(u)du$. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x=0$ ισχύει $g(u)=0 \Leftrightarrow g(u)=g(0) \Leftrightarrow u=0$.
- Για $x=-\frac{2}{3}$ ισχύει $g(u)=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow g(u)=g(1) \Leftrightarrow u=1$.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τα παραπάνω, καθώς και ολοκλήρωση κατά παράγοντες, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-2/3}^{0} g^{-1}(x)dx = \int_{1}^{0} ug'(u)du = \left[ug(u)\right]_1^0 - \int_1^0 (u)' g(u)du$$

$$= -g(1) - \int_1^0 g(u)du = -g(1) - \int_0^1 \frac{2u^3}{u^2+2}du = \frac{2}{3} - \int_0^1 \frac{2u\cdot u^2}{u^2+2}du$$

$$= \frac{2}{3} - \int_0^1 \frac{2u\left(u^2+2-2\right)}{u^2+2}du = \frac{2}{3} - \int_0^1 \frac{2u\left(u^2+2\right)-4u}{u^2+2}du$$

$$= \frac{2}{3} - \int_0^1 \left(2u - \frac{4u}{u^2+2}\right)du = \frac{2}{3} - \left[u^2 - 2\ln\left(u^2+2\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - (1-2\ln 3) + (0-2\ln 2) \boxed{= -\frac{1}{3} + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right).}$$

Δ5. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$-2x^3 + (1-\kappa)x^2 - 2\kappa + 2 = 0 \Leftrightarrow -2x^3 = (\kappa-1)x^2 + 2(\kappa-1)$$

$$\Leftrightarrow -2x^3 = (\kappa-1)\left(x^2+2\right) \Leftrightarrow \frac{-2x^3}{x^2+2} = \kappa - 1$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \kappa - 1.$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα για το σύνολο τιμών της ισχύει ότι

$$g(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to+\infty} g(x), \lim_{x\to-\infty} g(x)\right). \qquad (2)$$

Υπολογίζουμε αυτά τα δύο όρια ως εξής:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^3}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη σχέση (2) ότι $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε τιμή του $(\kappa-1)\in\mathbb{R}$, άρα και του $\kappa\in\mathbb{R}$, η εξίσωση $g(x)=\kappa-1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Αυτή η ρίζα είναι μοναδική, αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.