Διαγώνισμα 4.19

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 144.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 212 (σχήμα 11 και σχετική συζήτηση).

Α3. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 96 (σχόλιο στο τέλος της σελίδας).

Α4. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Αντιθέτως, ισχύει $f(x)=f(-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε όλα τα ζεύγη αντιθέτων αντιστοιχίζονται στην ίδια τιμή μέσω της f. Για παράδειγμα, $f(1)=f(-1)$, παρότι $1\neq-1$.

ii. Δείτε την παρατήρηση α) στη σελ. 17 του σχολικού βιβλίου.

iii. Δείτε το θεώρημα στη σελ. 156 του σχολικού βιβλίου.

iv. Η παγίδα κρύβεται στο γεγονός ότι το α μπορεί να είναι ίσο ή ακόμη και μικρότερο του β. Για παράδειγμα, αν $f(x)=x^2+3$ και $\alpha=\beta$, τότε, ενώ $f(x)>0$, ισχύει $\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0$. Αν δινόταν ότι $\alpha<\beta$, τότε το συμπέρασμα θα ήταν αληθές.

v. Το εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta |f(x)|dx$.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Για $x\in(-1,0)$ και για $x>3$ ισχύει $f'(x)>0$. Εφόσον η f είναι και συνεχής, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[3,+\infty)$. Για $x\in(-\infty,-1)$ και για $x\in(0,3)$ ισχύει $f'(x)<0$. Εφόσον η f είναι και συνεχής, έπεται ότι είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[0,3]$. Συνοψίζοντας, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Από τον πίνακα προκύπτει επίσης ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στις θέσεις $x=-1$ και $x=3$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x=0$.

B2. Όσον αφορά την κυρτότητα, πρέπει να κοιτάξουμε τη μονοτονία της πρώτης παραγώγου που δίνεται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,\gamma]$ και $[\delta,+\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή σε αυτά τα διαστήματα. Αντιστοίχως, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\gamma,\delta]$, οπότε η f είναι κοίλη σε αυτό το διάστημα. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	γ	δ	$+\infty$
$f'(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
$f(x)$	$\smile$	$\frown$	$\smile$	

Η C_f παρουσιάζει σημεία καμπής στις θέσεις όπου η f αλλάζει κυρτότητα, δηλαδή στις θέσεις $x=\gamma$ και $x=\delta$.

B3. Παρατηρούμε από το σχήμα ότι $f'(1)=-4$. Αυτή θα είναι η κλίση της εφαπτόμενης της C_f στο Z. Από την εκφώνηση δίνεται επίσης ότι $f(1)=-\dfrac{23}{12}$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτόμενης είναι

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y+\frac{23}{12}=-4(x-1)$$
$$\Leftrightarrow y=-4x+4-\frac{23}{12} \quad \boxed{\Leftrightarrow y=-4x+\frac{25}{12}.}$$

B4. Το εμβαδόν του εν λόγω χωρίου δίνεται από τον τύπο

$$\int_{-2}^{0}|f'(x)|dx=\int_{-2}^{-1}f'(x)dx+\int_{-1}^{0}f'(x)dx=\left[-f(x)\right]_{-2}^{-1}+\left[f(x)\right]_{-1}^{0}$$
$$=-f(-1)+f(-2)+f(0)-f(-1)=-2f(-1)+f(-2)+f(0)$$
$$=-2f(-1)+\frac{13}{6},$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση $f(-2)+f(0)=\frac{13}{6}$. Μας έχει δοθεί όμως ότι το εμβαδόν αυτού του χωρίου είναι ίσο με $\dfrac{10}{3}$, οπότε από την παραπάνω σχέση έπεται ότι

$$-2f(-1)+f(-2)+f(0)=\frac{10}{3}\Leftrightarrow -2f(-1)+\frac{13}{6}=\frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow -2f(-1)=\frac{20}{6}-\frac{13}{6}\Leftrightarrow -2f(-1)=\frac{7}{6}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow f(-1)=-\frac{7}{12}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Λύση

Γ1. Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in A$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{-\left(x^2+4x+t\right)'}{\left(x^2+4x+t\right)^2}=\frac{-(2x+4)}{\left(x^2+4x+t\right)^2}$$

$$=-2(x+2)\left(\frac{1}{x^2+4x+t}\right)^2 \boxed{=-2(x+2)f^2(x),\text{ όπως θέλαμε.}}$$

Γ2. Από το Γ1 γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει $f'(x)=-2(x+2)f^2(x)$. Από τον τύπο της f είναι προφανές ότι η f δεν μηδενίζεται, οπότε στην παραπάνω ισότητα μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με $f(x)$ και να καταλήξουμε έτσι στη σχέση

$$(x+2)f(x)=-\frac{f'(x)}{2f(x)}.$$

Το δοσμένο ολοκλήρωμα γράφεται τότε στη μορφή

$$\int_0^1(x+2)f(x)dx=\int_0^1-\frac{f'(x)}{2f(x)}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=-\frac{1}{2}\Big[\ln|f(x)|\Big]_0^1$$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\ln|f(1)|-\ln|f(0)|\Big]=-\frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{|5+t|}-\ln\frac{1}{|t|}\right]=-\frac{1}{2}\ln\frac{|t|}{|5+t|}\overset{t>0}{=}-\frac{1}{2}\ln\frac{t}{5+t}.$$

Έχει δοθεί όμως στην εκφώνηση ότι αυτό το ολοκλήρωμα είναι ίσο με $\ln5-\ln3$, οπότε καταλήγουμε στην ισότητα

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{t}{5+t}=\ln3-\ln2\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\ln\frac{t}{5+t}=\ln\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{t}{5+t}=-2\ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln\frac{t}{5+t}=\ln\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow \ln\frac{t}{5+t}=\ln\frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{5+t}=\frac{4}{9} \Leftrightarrow 9t=20+4t \Leftrightarrow 5t=20 \boxed{\Leftrightarrow t=4}$$

Τελικά λοιπόν, ισχύει

$$f(x)=\frac{1}{x^2+4x+4}=\frac{1}{(x+2)^2},$$

οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $\boxed{A=\mathbb{R}-\{-2\}.}$

Γ3. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Γ1, ισχύει

$$f'(x)=\frac{-2(x+2)}{(x^2+4x+4)^2}=\frac{-2}{(x+2)^3}$$

για κάθε $x\neq -2$. Η πρώτη παράγωγος είναι παραγωγίσιμη, ως ρητή, και η παράγωγός της ισούται με

$$f''(x)=-\frac{-2\cdot\left[(x+2)^3\right]'}{(x+2)^6}=\frac{2\cdot 3(x+2)^2}{(x+2)^6}=\frac{6}{(x+2)^4}>0.$$

Επομένως, η f' είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2)$ και $(-2,+\infty)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f'(x)+x$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων. Φυσικά η g είναι και παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Μάλιστα, για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει ότι $g'(x)=f''(x)+1>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. Επίσης, ισχύει ότι:

- $g(0)=f'(0)=-\dfrac{2}{(0+2)^3}=-\dfrac{1}{4}<0$.
- $g(1)=f'(1)+1=-\dfrac{2}{(1+2)^3}+1=-\dfrac{2}{27}+\dfrac{27}{27}=\dfrac{25}{27}>0$.

Εφόσον $g(0)g(1)<0$, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=-x_0.$$

Εφόσον η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, το x_0 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα.

Γ4. Η εξίσωση γράφεται στη μορφή

$$\frac{10x_0+x}{5}f^2\left(\frac{x}{5x_0}\right)=\frac{x_0^2}{2}\Leftrightarrow\frac{10x_0+x}{5x_0}f^2\left(\frac{x}{5x_0}\right)=\frac{x_0}{2}\Leftrightarrow-2\left(\frac{x}{5x_0}+2\right)f^2\left(\frac{x}{5x_0}\right)=-x_0.$$

Θέτοντας $y=\dfrac{x}{5x_0}$, η εξίσωση γράφεται στη μορφή $-2(y+2)f^2(y)=-x_0$. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Ερωτήματος Γ1, αλλά και την ισότητα $f'(x_0)=-x_0$ του Ερωτήματος Γ3, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία εξίσωση στη μορφή

$$f'(y)=f'(x_0)\Leftrightarrow-\frac{2}{(y+2)^3}=-\frac{2}{(x_0+2)^3}$$

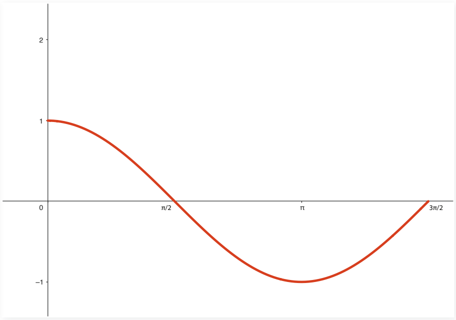
$$\Leftrightarrow(y+2)^3=(x_0+2)^3\Leftrightarrow y+2=x_0+2$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{5x_0}=x_0\ \boxed{\Leftrightarrow x=5x_0^2.}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Έστω $A(\alpha,f(\alpha))$ ένα σημείο της C_f. Η εφαπτόμενη της C_f στο A έχει εξίσωση

$$(\varepsilon):y-f(\alpha)=f'(\alpha)\cdot(x-\alpha).$$



Σημειώνουμε ότι $f'(x)=\eta\mu x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$. Η παραπάνω εφαπτόμενη διέρχεται από το $M\left(\pi,\frac{\pi}{2}+1\right)$ αν και μόνο αν οι $x=\pi$ και $y=\frac{\pi}{2}+1$ ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\frac{\pi}{2}+1-f(\alpha)=f'(\alpha)(-\alpha)\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}+1+\sigma\upsilon\nu\alpha-1=(\pi-\alpha)\cdot\eta\mu\alpha$$

$$\Leftrightarrow(\pi-\alpha)\cdot\eta\mu\alpha-\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu\alpha=0.$$

Θέτουμε $h(x)=(\pi-x)\cdot\eta\mu x-\dfrac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu x$ για $x\in\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Ισχύουν τα εξής:

- $h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$.
- $h\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\pi+\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, με

$$h'(x)=(\pi-x)\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x+\eta\mu x=(\pi-x)\sigma\upsilon\nu x.$$

Με βάση τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $\sigma\upsilon\nu x$, της οποίας τη γραφική παράσταση έχουμε παραθέσει παραπάνω, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$
$\pi-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\sigma\upsilon\nu x$		$+$	0	$-$		$-$	0
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Στον πίνακα έχουμε επίσης σημειώσει τις ρίζες $x=\frac{\pi}{2}$ και $x=\frac{3\pi}{2}$ της συνάρτησης h, τις οποίες είχαμε εντοπίσει παραπάνω. Από τη μονοτονία της h προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Για $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $h(x)<h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.
- Για $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ισχύει $h(x)<h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.
- Για $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ ισχύει $h(x)<h\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$.

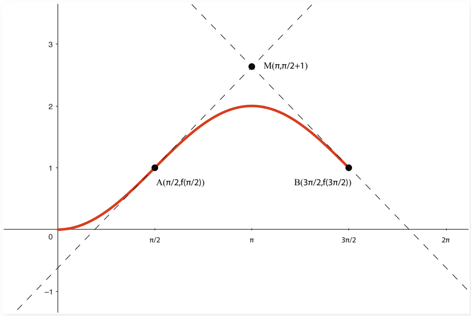
Με άλλα λόγια, οι μοναδικές ρίζες της h είναι οι $x=\frac{\pi}{2}$ και $x=\frac{3\pi}{2}$. Από τον ορισμό της h προκύπτει ότι πράγματι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $M\left(\pi,\frac{\pi}{2}+1\right)$, αυτές στις θέσεις $x=\frac{\pi}{2}$ και $x=\frac{3\pi}{2}$. Για $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε την εφαπτόμενη

$$(\varepsilon_1):y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y-1=x-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow y=x+1-\frac{\pi}{2},$$

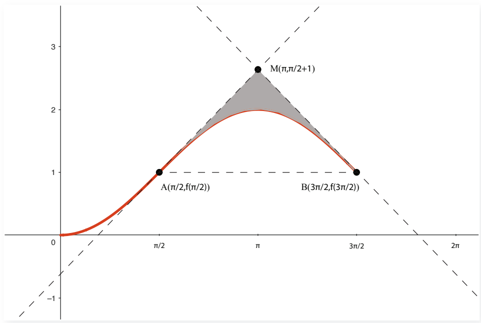
ενώ για $x=\dfrac{3\pi}{2}$ έχουμε την εφαπτόμενη

$$(\varepsilon_2):y-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y-1=-1\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=-x+1+\frac{3\pi}{2}.$$

Δ2. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-\sigma\upsilon\nu x$, μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Με τη σειρά της, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-\sigma\upsilon\nu x$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\sigma\upsilon\nu x$, με ανάκλαση στον άξονα $x'x$. Με βάση αυτές τις πληροφορίες, σχεδιάζουμε τη C_f και τις ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Δ3. Ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1$. Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με τη διαφορά των εμβαδών του τριγώνου MAB και του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την οριζόντια ευθεία $y=1$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sigma\upsilon\nu x\le 0$ για $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, υπολογίζουμε αυτό το εμβαδόν ως εξής:



$$E=(\mathrm{MAB})-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}|1-f(x)|dx=\frac{\pi\cdot\frac{\pi}{2}}{2}-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}|\sigma\upsilon\nu x|dx=\frac{\pi^2}{4}-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sigma\upsilon\nu x dx$$

$$\boxed{=\frac{\pi^2}{4}-[\eta\mu x]_{\pi/2}^{3\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}-2,\text{ όπως θέλαμε.}}$$

Δ4. Σημειώνουμε αρχικά ότι η $f'(x)=\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, άρα και στο υποδιάστημα $[\alpha,\beta]$. Αφού $\alpha<\beta$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), έπεται από το Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{-\sigma\upsilon\nu\beta+1+\sigma\upsilon\nu\alpha-1}{\beta-\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta-\alpha}.$$

Ισχύει όμως $\alpha<\xi<\beta$, άρα, από το γεγονός ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, έπεται ότι

$$f'(\alpha)<f'(\xi)<f'(\beta)\Leftrightarrow \eta\mu\alpha<\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta}{\beta-\alpha}<\eta\mu\beta$$

$$\boxed{\overset{\beta-\alpha>0}{\Leftrightarrow}(\beta-\alpha)\eta\mu\alpha<\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta<(\beta-\alpha)\eta\mu\beta,}$$

που είναι το ζητούμενο.

Δ5. Αποδεικνύουμε αρχικά ότι $\left(\sqrt{e},e\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

- $e<3<\pi<\frac{3\pi}{2}$ και $e>2>\frac{\pi}{2}$, οπότε $e\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.
- $\sqrt{e}<e<\frac{3\pi}{2}$ και $\sqrt{e}>\sqrt{2,56}=1,6>\frac{\pi}{2}$, οπότε $\sqrt{e}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

  Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $e\approx 2,71>2,56$, καθώς και το γεγονός ότι $\pi<3,2$, οπότε $\pi/2<3,2/2=1,6$.

Συμπεραίνουμε ότι $\left(\sqrt{e},e\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$, όπως θέλαμε. Για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ ισχύει $f''(x)=\sigma\upsilon\nu x<0$ (δείτε το πρόσημο της συνάρτησης συνημίτονο στο γράφημα της προηγούμενης σελίδας). Έπεται από αυτό ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, επομένως η C_f βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Είδαμε στο Δ1 ότι η ευθεία $y=x+1-\frac{\pi}{2}$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Άρα για κάθε $x\in\left(\sqrt{e},e\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$f(x)<x+1-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}<1+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2x}.$$

Η ισότητα θα ίσχυε μόνο στο σημείο επαφής, δηλαδή μόνο για $x=\frac{\pi}{2}$. Όμως, καθώς $\frac{\pi}{2}<\sqrt{e}<e$, η ανισότητα είναι γνήσια για $x\in\left(\sqrt{e},e\right)$. Για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, προκύπτει η ανισότητα

$$\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{f(x)}{x}dx<\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(1+\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{2x}\right)dx=\left[x+\ln x-\frac{\pi}{2}\ln x\right]_{\sqrt{e}}^{e}$$

$$=e+1-\frac{\pi}{2}-\sqrt{e}-\ln\sqrt{e}+\frac{\pi}{2}\ln\sqrt{e}=e+1-\frac{\pi}{2}-\sqrt{e}-\frac{1}{2}\ln e+\frac{\pi}{4}\ln e$$

$$=e+1-\frac{\pi}{2}-\sqrt{e}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{=e-\sqrt{e}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4},\ \text{που είναι το ζητούμενο.}}$$