Διαγώνισμα 4.20

ΘΕΜΑ Α
Λύση

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 76.

A2. **i.** Στο διάστημα $[0,\alpha]$ η f είναι αρνητική ή μηδέν, άρα $|f(x)|=-f(x)$ για κάθε $x\in[0,\alpha]$. Το εμβαδόν του Ω_1 δίνεται από τη σχέση $\int_0^\alpha |f(x)|dx$. Άρα $\int_0^\alpha |f(x)|dx=2$. Είναι όμως $|f(x)|=-f(x)$, άρα προκύπτει ότι $\int_0^\alpha f(x)dx=-2$.

ii. Αυτό το ολοκλήρωμα ισούται με το συνολικό εμβαδόν μεταξύ της C_f, του άξονα $x'x$ και των κατακόρυφων ευθειών $x=\alpha$ και $x=\gamma$. Με άλλα λόγια,

$$\int_\alpha^\gamma |f(x)|dx=E(\Omega_2)+E(\Omega_3)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

A3. **i.** Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος (Λ).

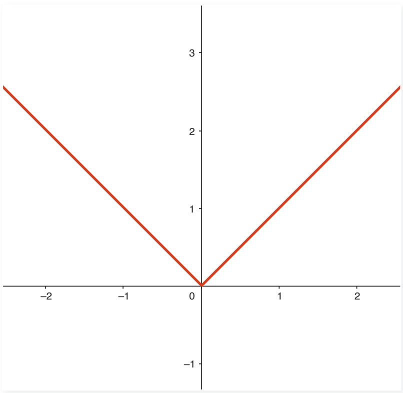
ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης το σημείο $x_0=0$. Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, καθώς $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=|0|=0=f(0)$. Παρ' όλα αυτά, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο, καθώς το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει. Αυτό μπορούμε να το δούμε συγκρίνοντας τα δύο πλευρικά όρια:

- Για $x>0$ είναι $|x|=x$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$$

- Για $x<0$ είναι $|x|=-x$, οπότε

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1.$$



Εφόσον τα δύο πλευρικά όρια δεν είναι ίσα μεταξύ τους, το όριο δεν υπάρχει. Έτσι, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, η οποία επιβεβαιώνει το παραπάνω συμπέρασμα: Η f είναι συνεχής στο 0 αφού η γραφική παράσταση είναι μια συνεχόμενη γραμμή, καθώς περνάει από το $(0,f(0))$. Δεν είναι όμως παραγωγίσιμη σε αυτό το σημείο, καθώς η γραφική παράσταση σχηματίζει γωνία.

Προσπαθήστε να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ αποτελεί επίσης αντιπαράδειγμα: Είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά όχι παραγωγίσιμη.

A4. i) Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Λ, **v)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

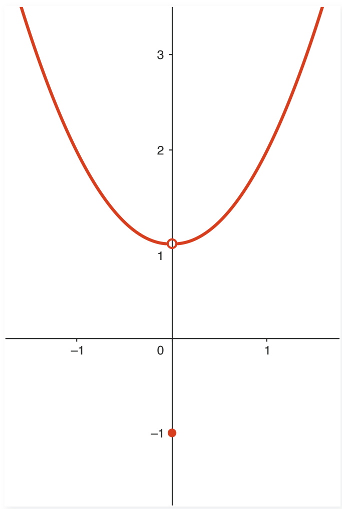
i. Για να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, πρέπει επιπλέον να ισχύει $f(0)=f(1)$.

ii. Εφόσον το γινόμενο των τεσσάρων αριθμών είναι αρνητικό, πρέπει τουλάχιστον ένας από αυτούς να είναι αρνητικός. Δεν μπορεί όμως να είναι όλοι αρνητικοί, αφού τότε το γινόμενο θα ήταν θετικός. Υπάρχει λοιπόν και ένας θετικός μεταξύ αυτών των αριθμών. Έστω ότι ο αρνητικός είναι ο $f(\alpha)$ και ο θετικός ο $f(\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in\{0,1,2,3\}$ και $\alpha\neq\beta$. Τότε ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$. Εφόσον η f είναι συνεχής, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι έχει τουλάχιστον μία ρίζα μεταξύ των α,β.

iii. Το σωστό θα ήταν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=F(\beta)-F(\alpha)$, όπου F είναι μία παράγουσα της f, δηλαδή μία συνάρτηση τέτοια, ώστε $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

iv. Το πεδίο ορισμού είναι το $\{x\in A_g : g(x)\in A_f\}$. Σκεφτείτε ότι ο τύπος της $f\circ g$ είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ Το x βρίσκεται λοιπόν μέσα στην g, άρα πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

v. Το συμπέρασμα θα ήταν σωστό αν υπήρχε η επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι συνεχής. Παρ' όλα αυτά, χωρίς αυτήν την υπόθεση, το συμπέρασμα δεν ισχύει απαραίτητα. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση



$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\neq 0 \\ -1, & x=0 \end{cases}$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παραπάνω σχήμα:

Γι' αυτήν τη συνάρτηση ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2+1\right)=0^2+1=1>0,$$

όμως, παρ' όλα αυτά, $f(0)=-1<0$. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής και, γι' αυτό, το συμπέρασμα δεν είναι αληθές. Επαναλαμβάνουμε όμως ότι, αν η f ήταν συνεχής, τότε η πρόταση θα ήταν σωστή.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Ο μόνος περιορισμός είναι να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής, δηλαδή να ισχύει $x+1\neq 0$, ή ισοδύναμα $x\neq -1$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το

$$\boxed{A_f=\mathbb{R}-\{-1\}.}$$

Στο πεδίο ορισμού της, η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ισχύει

$$f'(x)=\frac{(x-1)'(x+1)^2-(x-1)\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x+1)^2-(x-1)\cdot 2(x+1)\cdot(x+1)'}{(x+1)^4}=$$

Σε αυτό το βήμα χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα της αλυσίδας, και συγκεκριμένα τη σχέση $(f^2(x))'=2f(x)f'(x)$, όπου $f(x)=x+1$.

$$=\frac{(x+1)^2-2(x-1)(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)\left[(x+1)-2(x-1)\right]}{(x+1)^4}=$$

$$=\frac{(x+1)(x+1-2x+2)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)(3-x)}{(x+1)^4}=\frac{3-x}{(x+1)^4}.$$

Συνεπώς, το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από τα πρόσημα των παραγόντων $3-x$ και $(x+1)^3$. Αναλύουμε τα πρόσημα αυτών των παραγόντων, επομένως και το πρόσημο της f' και τη μονοτονία της f στον ακόλουθο πίνακα:

	$-\infty\pi-x$	$+$	$-+$
$-$	συνx	$+$	$-$
$-$	$h'(x)$	$h'(x)$	$+$
			$h(x)\nearrow$
$\nearrow\searrow$	$\nearrow\searrow$	$x \nearrow$	x

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,3]$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[3,+\infty)$.

Σημείωση:

Στον υπολογισμό της παραγώγου, εάν δεν παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή και, αντίθετα, εκτελέσουμε τις πράξεις, τότε θα καταλήξουμε στην έκφραση

$$f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{(x+1)^4}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, για να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f', πρέπει να προσδιορίσουμε το πρόσημο του τριωνύμου $-x^2+2x+3$. Ο ευκολότερος τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι με τη χρήση της θεωρίας για το πρόσημο τριωνύμου από την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου. Θα ήταν καλό να γίνει μια υπενθύμιση αυτής της θεωρίας σε περίπτωση που δεν τη θυμόμαστε.

B2. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\neq -1$ ισχύει

$$f''(x)=\left(\frac{3-x}{(x+1)^3}\right)'=\frac{(3-x)'(x+1)^3-(3-x)\left((x+1)^3\right)'}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{-(x+1)^3-3(3-x)(x+1)^2(x+1)'}{(x+1)^6}=\frac{-(x+1)^3-3(3-x)(x+1)^2}{(x+1)^6}$$

$$=\frac{-(x+1)^2\left[(x+1)+3(3-x)\right]}{(x+1)^6}=-\frac{x+1+3(3-x)}{(x+1)^4}=-\frac{10-2x}{(x+1)^4}=\frac{2(x-5)}{(x+1)^4}.$$

Το πρόσημο της $f''(x)$ εξαρτάται μόνο από τον παράγοντα $x-5$, καθώς ο παρονομαστής $(x+1)^4$ είναι θετικός για κάθε $x\neq 1$. Σχηματίζουμε λοιπόν τον ακόλουθο πίνακα κυρτότητας:

			$3-x$
+	+		$(x+1)^3$
+	+	$f'(x)$	$f'(x)$
+	−	$f(x)$	$f(x)$

- Η γραφική παράσταση C_f έχει ένα μοναδικό σημείο καμπής, το σημείο

$$\boxed{K(5,f(5))\equiv\left(5,\frac{1}{9}\right)}$$

Β3. Αναζητούμε αρχικά κατακόρυφες ασύμπτωτες. Το μοναδικό σημείο στο οποίο έχει νόημα να το κάνουμε αυτό είναι το $x_1=1$, καθώς το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x-1}{(x+1)^2}=+\infty,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο παρονομαστής $(x+1)^2$ είναι θετικός για κάθε $x\neq 1$. Έπεται ότι η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, και μάλιστα η μοναδική.

Σημείωση:

Υπολογίσαμε μόνο το όριο από τα δεξιά, διότι ο ορισμός της κατακόρυφης ασύμπτωτης απαιτεί τουλάχιστον ένα πλευρικό όριο να είναι ίσο με $\pm\infty$, όχι απαραίτητα και τα δύο (σελ. 161 του σχολικού βιβλίου). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το αριστερό πλευρικό όριο ισούται με $-\infty$, οπότε θα μπορούσαμε να είχαμε συμπεράνει το ζητούμενο υπολογίζοντας εκείνο. Δεν χρειάζεται όμως να υπολογίσουμε και τα δύο.

Αναζητούμε τώρα οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και το $-\infty$.

- Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα μεγιστοβάθμιων όρων για το όριο πηλίκου πολυώνυμων στο $\pm\infty$ (σελ. 67 του σχολικού βιβλίου). Έπεται έτσι ότι η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

- Για το $-\infty$ έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

εντελώς όμοια με πριν. Επομένως, η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

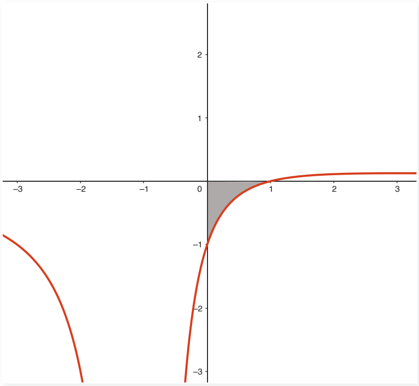
Εφόσον η C_f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και το $-\infty$, αποκλείεται να έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

B4. Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^1 \left|\frac{x-1}{(x+1)^2}\right| dx.$$

Για $x \in [0,1]$, η f είναι αρνητική ή μηδέν (μηδενίζεται στο $x_1 = 1$), οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται χωρίς απόλυτες τιμές ως

$$\int_0^1 \frac{1-x}{(x+1)^2} dx.$$



Αυτό το ολοκλήρωμα δεν είναι ιδιαίτερα περίπλοκο, αλλά κάποιος μπορεί να δυσκολευτεί λόγω των υπολογισμών. Μια κίνηση που απλοποιεί πολύ τα πράγματα είναι να θέσουμε $y = x+1$, καθώς αυτό φέρνει τον παρονομαστή σε απλούστερη μορφή. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x=0$ είναι $y=0+1=1$
- Για $x=1$ είναι $y=1+1=2$.

Ισχύει επίσης $dy=(x+1)'dx=dx$. Επίσης, το x γράφεται συναρτήσει του y ως $x=y-1$. Το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται λοιπόν στη μορφή

$$\int_1^2 \frac{1-(y-1)}{y^2}dy=\int_1^2 \frac{2-y}{y^2}dy=\int_1^2\left(\frac{2}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=\left[-\frac{2}{y}-\ln y\right]_1^2$$

$$=(-1-\ln 2)-(-2-\ln 1)\ \boxed{=1-\ln 2.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'-(\ln x)'-(3)'=2\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-1}{x},$$

οπότε η παράγωγος είναι θετική όταν $\sqrt{x}-1>0$, δηλαδή όταν $x>1$ (ο παρονομαστής είναι θετικός, αφού το x παίρνει μόνο θετικές τιμές). Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}-1$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

- Η f έχει ακριβώς μία θέση ολικού ακροτάτου, και συγκεκριμένα τη $x=1$. Σε αυτήν τη θέση η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1)=-1$. Πράγματι, αν $x\in(0,1]$, τότε $f(x)\geq f(1)$, καθώς f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, ενώ, αν $x\in[1,+\infty)$, τότε $f(x)\geq f(1)$, καθώς f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x>0$ έχουμε $f(x)\geq f(1)$.

Γ2. Λόγω της συνέχειας της f και του πίνακα μονοτονίας που έχουμε από το προηγούμενο ερώτημα, μπορούμε να υπολογίσουμε τις εικόνες των διαστημάτων $(0,1]$ και $[1,+\infty)$ μέσω της f.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$, οπότε ισχύει

$$f\big((0,1]\big)=\Big[f(1),\lim_{x\to 0^+}f(x)\Big).$$

Έχουμε $f(1)=-1$ και

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2\sqrt{x}-\ln x-3\right)=2\cdot 0-(-\infty)-3=+\infty.$$

Επομένως, $f\big((0,1]\big)=[-1,+\infty)$.

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, οπότε ισχύει

$$f\big([1,+\infty)\big)=\Big[f(1),\lim_{x\to +\infty}f(x)\Big). \qquad (1)$$

Έχουμε $f(1)=-1$ και

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(2\sqrt{x}-\ln x-3\right)$$

Εμφανίζεται λοιπόν εδώ η απροσδιόριστη μορφή $+\infty-\infty$. Ένας κλασικός τρόπος να προσδιορίζουμε τέτοια όρια είναι να μετατρέπουμε τη διαφορά σε πηλίκο, καθώς στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Πιο συγκεκριμένα, αγνοώντας προσωρινά τη σταθερά -3, έχουμε

$$\lim_{x\to +\infty}(2\sqrt{x}-\ln x)=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}\left(2-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right).$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τώρα το όριο του πηλίκου. Αυτό έχει την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$, οπότε, σύμφωνα με τον κανόνα De L' Hospital, ισχύει

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Άρα το αρχικό όριο ισούται με

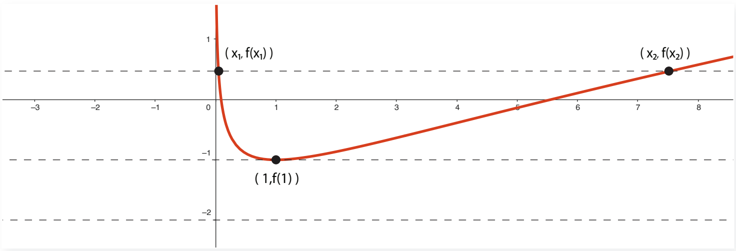
$$\lim_{x\to +\infty}\left[\sqrt{x}\left(2-\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)-3\right]=(+\infty)\cdot(2-0)-3=+\infty.$$

Προκύπτει λοιπόν από τη σχέση (1) ότι $f\big([1,+\infty)\big)=[-1,+\infty)$.

Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ είναι το πλήθος των σημείων τομής της C_f με την οριζόντια ευθεία $y=\alpha$.

Σε τέτοιου είδους ασκήσεις, είναι χρήσιμο να σχεδιάζουμε μια πολύ πρόχειρη γραφική παράσταση της C_f, με βάση το σύνολο τιμών που έχουμε βρει, ώστε να διαπιστώσουμε έτσι το πλήθος αυτών των σημείων τομής. Εδώ θα παραθέσουμε τη λεπτομερή γραφική παράσταση, αλλά στην πραγματικότητα δεν χρειάζεται ιδιαίτερη λεπτομέρεια: Αρκεί να απεικονίζονται οι πληροφορίες του συνόλου τιμών.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Επιπλέον, έχουμε σχεδιάσει την οριζόντια ευθεία $y=\alpha$ για τρεις διαφορετικές τιμές του α.



Παρατηρούμε ότι για $\alpha>-1$ υπάρχουν δύο σημεία τομής (μπλέ ευθεία). Για $\alpha=-1$ υπάρχει ένα μοναδικό σημείο τομής (πορτοκαλί ευθεία), ενώ για $\alpha<-1$ δεν υπάρχει κανένα σημείο τομής. Αντίστοιχα μπορούμε να περιγράψουμε και το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$. Πιο αναλυτικά:

- Για $\alpha>-1$ έχουμε ότι $\alpha\in f((0,1])$ και $\alpha\in f([1,+\infty))$, επομένως υπάρχουν $x_1\in(0,1]$ και $x_2\in[1,+\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)=\alpha$. Αυτά τα σημεία είναι μοναδικά διότι η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα υποδιαστήματα $(0,1]$ και φυσικά αποκλείεται να είναι κάποιο από τα x_1,x_2 ίσο με 1, διότι τότε θα ίσχυε

$$\alpha=f(x_1)=f(1)=-1<\alpha,$$

  το οποίο είναι προφανώς άτοπο (και αντίστοιχα για το x_2). Υπάρχουν λοιπόν δύο ακριβώς λύσεις της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ σε αυτήν την περίπτωση.

- Για $\alpha=-1$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση την $x=1$. Πράγματι, είδαμε προηγουμένως ότι η f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό ακρότατο το $f(1)=-1$, το οποίο είναι μάλιστα και ολικό ελάχιστο. Λόγω της γνήσιας μονοτονίας της σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1]$ και $[1,+\infty)$, η f αποκλείεται να λαμβάνει την τιμή -1 σε κάποιο άλλο σημείο.

- Για $\alpha<-1$ η εξίσωση δεν έχει καμία λύση. Πράγματι, είδαμε ότι $f((0,1])=[-1,+\infty)$ και $f([1,+\infty))=[-1,+\infty)$, οπότε η f λαμβάνει αποκλειστικά τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του -1. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, δεν μπορεί να πάρει την τιμή α.

Γ3. Ισχύει

$$g'(x)=\frac{f(x)}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-\ln x-3}{2\sqrt{x}}=1-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση θα μπορούσαμε να προσπαθήσουμε να κάνουμε αντιπαραγώγιση, γράφοντας το δεξιό μέλος στη μορφή της παραγώγου κάποιας συνάρτησης. Αυτό όμως χρειάζεται φαντασία, αφού δεν είναι τελείως ξεκάθαρο πώς μπορούμε να γράψουμε την ποσότητα

$$1-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{2\sqrt{x}}$$

σαν παράγωγο κάποιας συνάρτησης.

Ένας πιο εύκολος τρόπος να αποδείξουμε το ζητούμενο είναι να αποδείξουμε αρχικά ότι η παράγωγος της συνάρτησης

$$h(x)=g(x)-\left[x-\sqrt{x}(\ln x+1)\right]==g(x)-x+\sqrt{x}(\ln x+1)$$

είναι ίση με μηδέν για κάθε $x>0$. Αυτό θα μας έδινε ότι η h είναι σταθερή. Γνωρίζουμε ότι $g(1)=0$, άρα μπορούμε να δείξουμε ότι $h(1)=0$. Έτσι, εφόσον η h είναι σταθερή, προκύπτει ότι $h(x)=0$ για κάθε $x>0$. Άρα θα πάρουμε ότι $g(x)=x-\sqrt{x}(\ln x+1)$ για κάθε $x>0$, που είναι το ζητούμενο.

Αυτή η στρατηγική είναι χρήσιμη από τη στιγμή που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση ο τύπος στον οποίο πρέπει να καταλήξουμε. Το μόνο που μας μένει λοιπόν είναι να αποδείξουμε το αρχικό βήμα που περιγράψαμε, δηλαδή ότι για κάθε $x>0$. Από τον τύπο που μας έχει δοθεί για την παράγωγο $g'(x)$ έχουμε λοιπόν

$$h'(x)=g'(x)-(x)'+\left[\sqrt{x}(\ln x+1)\right]'=g'(x)-(x)'+\left(\sqrt{x}\right)'(\ln x+1)+\sqrt{x}(\ln x+1)'$$

$$=\left(1-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)-1+\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+1)+\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=1-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{2\sqrt{x}}-1+\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Εδώ παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι διαγράφονται μεταξύ τους, οπότε έχουμε πράγματι ότι $h'(x)=0$ για κάθε $x>0$, άρα η h είναι σταθερή. Είναι

$$h(1)=g(1)-1+\sqrt{1}(\ln 1+1)=0,$$

άρα, όπως περιγράψαμε και παραπάνω, $h(x)=0$ για κάθε $x>0$. Γράφοντας τον ορισμό της h, παίρνουμε τον ζητούμενο τύπο για τη g.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $g(x)>0$ ή ισοδύναμα ότι

$$x>\sqrt{x}(\ln x+1)\Leftrightarrow\sqrt{x}>\ln x+1,$$

όπου η ισοδυναμία προκύπτει διαιρώντας με τη θετική ποσότητα $\sqrt{x}$. Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $\phi(x)=\sqrt{x}-\ln x-1$ για $x\in(0,1]$. Η ϕ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων, με

$$\phi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}.$$

Καθώς έχουμε θεωρήσει ότι $x\in(0,1]$, θα είναι $\sqrt{x}-2<0$, άρα $\phi'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1]$. Επομένως, η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$. Παρατηρούμε ότι $\phi(1)=\sqrt{1}-\ln 1-1=0$, άρα για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $\phi(x)>\phi(1)=0$, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

Θα παρατηρήσατε ότι, παρότι μας ζητείται να αποδείξουμε μία σχέση για $x\in(0,1)$, εμείς ορίσαμε τη συνάρτηση στο $(0,1]$, δηλαδή και στο σημείο $x_1=1$. Αυτό το κάναμε για να μπορέσουμε στο τέλος να συγκρίνουμε τις τιμές της ϕ με το $\phi(1)$ και να ολοκληρώσουμε εύκολα την απόδειξη. Διαφορετικά, δεν θα μπορούσαμε να γράψουμε $\phi(1)$ και η απόδειξη θα γινόταν πιο περίπλοκη.

Αυτό φυσικά είναι κάτι που μπορεί να διαπιστώσουμε καθώς λύνουμε την άσκηση: Μπορεί δηλαδή αρχικά να έχουμε ορίσει τη συνάρτηση στο $(0,1)$, αλλά στη συνέχεια να διαπιστώσουμε ότι θα ήταν πολύ βολικό αν αυτή οριζόταν και στο $x_1=1$. Δεν διστάζουμε φυσικά σε μια τέτοια περίπτωση να πάρουμε την πρωτοβουλία να αλλάξουμε ελαφρώς τον ορισμό και να συνεχίσουμε τη λύση κανονικά χωρίς να αλλάξουμε τίποτε άλλο.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x>0$ είναι $e^{2x}>1$, οπότε

$$f'(x)+\eta\mu(f(x))>1 \Leftrightarrow f'(x)>1-\eta\mu(f(x)).$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση ημίτονο παίρνει τιμές μικρότερες του 1, άρα θα είναι $1-\eta\mu(f(x))\geq 0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ – στην πραγματικότητα αυτό ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όμως σε αυτό το ερώτημα θέλουμε να αποδείξουμε το ζητούμενο μόνο για $x\geq 0$, οπότε επικεντρωνόμαστε σε αυτές τις τιμές του x.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για $x>0$ είναι $f'(x)>1-\eta\mu(f(x))\geq 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Στο $x_0=0$ η f είναι συνεχής (εξ υποθέσεως είναι παραγωγίσιμη), άρα προκύπτει ότι είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το $[0,+\infty)$, όπως θέλαμε.

Δ2. Στη σχέση $f'(x)+\eta\mu(f(x))=e^{2x}$, όλες οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων (η f έχει υποτεθεί δύο φορές παραγωγίσιμη). Μπορούμε λοιπόν να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη αυτής της εξίσωσης, οπότε θα προκύψει

$$f''(x)+\left(\eta\mu(f(x))\right)'=\left(e^{2x}\right)'.$$

Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας, αυτή η σχέση γράφεται

$$f''(x)+f'(x)\sigma\upsilon\nu(f(x))=2e^{2x}.$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} f''(x)=2e^{2x}-f'(x)\sigma\upsilon\nu(f(x)) &= 2e^{2x}-\left(e^{2x}-\eta\mu(f(x))\right)\sigma\upsilon\nu(f(x)) \\ &= e^{2x}\left(2-\eta\mu(f(x))\right)+\eta\mu(f(x))\sigma\upsilon\nu(f(x)). \end{aligned}$$

Ισχύει $2-\eta\mu(f(x))\geq 1$ και $\eta\mu(f(x))\sigma\upsilon\nu(f(x))\geq -1$, καθώς και οι δύο παράγοντες παίρνουν τιμές στο $[-1,1]$. Συμπεραίνουμε έτσι ότι

$$f''(x)\geq e^{2x}\cdot 1-1=e^{2x}-1.$$

Για $x>0$ είναι $e^{2x}>1$, οπότε $f''(x)>0$ για κάθε $x>0$. Συμπεραίνουμε έτσι ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Στο παραπάνω επιχείρημα, η f'' είναι θετική στο ανοιχτό διάστημα $(0,+\infty)$, όμως ισχυριστήκαμε ότι η f είναι κυρτή σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)$. Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος της σελ. 156 του σχολικού βιβλίου, σύμφωνα με το οποίο αρκεί να είναι η f'' θετική μόνο στο εσωτερικό του διαστήματος για να αποδειχτεί η κυρτότητα.

Δ3. Αρχικά, είναι εύκολο να δούμε ότι για $x=0$ η διπλή ανισότητα ισχύει, καθώς $f(0)=0$. Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$, θα ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Έχουμε εξηγήσει και σε άλλα θέματα πιο πάνω ότι για κάθε $y>0$ ισχύει $\eta\mu y<y$. Θα εξηγήσουμε για άλλη μία φορά γιατί ισχύει αυτό. Θυμόμαστε αρχικά ότι:

- Για κάθε $y\in\mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu y|\leq|y|$. Αυτή η ανισότητα είναι γνωστή από τη θεωρία (σελ. 52 του σχολικού βιβλίου). Η ισότητα ισχύει μόνο για $y=0$, οπότε για $y\neq 0$ ισχύει $|\eta\mu y|<|y|$.
- Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι $\alpha\leq|\alpha|$. Αυτή η ανισότητα είναι γνωστή από την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου.

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα (το δεύτερο για $\alpha=\eta\mu y$) και λαμβάνοντας υπόψη ότι για $y>0$ ισχύει $|y|=y$, παίρνουμε ότι για $y>0$ είναι

$$\eta\mu y\leq|\eta\mu y|<|y|=y,$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Αφού για $x>0$ ισχύει $f(x)>0$, έπεται από το παραπάνω αποτέλεσμα (για $y=f(x)>0$) ότι $\eta\mu(f(x))<f(x)$ για κάθε $x>0$. Θα είναι λοιπόν

$$e^{2x}=f'(x)+\eta\mu(f(x))<f'(x)+f(x)$$

για κάθε $x>0$. Θα προσπαθήσουμε τώρα να σχηματίσουμε μια παράγωγο στο δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης. Μια γνωστή στρατηγική για να το κάνουμε αυτό είναι ο πολλαπλασιασμός και των δύο μελών με e^x. Θα προκύψει έτσι

$$e^{3x}<e^xf'(x)+e^xf(x).$$

Πλέον, το δεύτερο μέλος είναι η παράγωγος της συνάρτησης $e^xf(x)$ λόγω του κανόνα του γινομένου. Το αριστερό μέλος είναι ίσο με την παράγωγο της συνάρτησης $e^{3x}/3$ λόγω του κανόνα της αλυσίδας. Η σχέση λοιπόν γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'<\left(e^xf(x)\right)'\Leftrightarrow\left(e^xf(x)-\frac{1}{3}e^{3x}\right)'>0$$

για κάθε $x>0$. Λόγω συνέχειας, έπεται ότι η συνάρτηση

$$g(x)=e^{x}f(x)-\frac{1}{3}e^{3x}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(0)=-\frac{1}{3}$, άρα, λόγω μονοτονίας, θα ισχύει $g(x)>-\frac{1}{3}$ για κάθε $x>0$. Ισοδύναμα,

$$\boxed{f(x)>\frac{1}{3}\left(e^{2x}-e^{-x}\right) \text{ για κάθε } x>0 \text{, όπως θέλαμε.}}$$

Δ4. Ας υποθέσουμε ότι αυτό το όριο υπάρχει και είναι ίσο με έναν πραγματικό αριθμό ρ. Ισχύει $f'(x)=e^{2x}-\eta\mu(f(x))$, οπότε προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-\eta\mu(f(x))\right)= =0-\eta\mu(\rho) =-\eta\mu(\rho). \qquad (1)$$

Ας υποθέσουμε ότι $\eta\mu(\rho)\neq 0$. Υπάρχουν λοιπόν δύο περιπτώσεις:

- $\eta\mu(\rho)>0$:

  Σε αυτήν την περίπτωση, θα ισχύει για x κοντά στο $-\infty$ ότι $f'(x)<-\frac{\eta\mu\rho}{2}$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

  Αυτό προκύπτει από το θεώρημα 1 στη σελ. 47 του σχολικού βιβλίου, καθώς και από την παρατήρηση στην αρχή της σελ. 66, η οποία εξασφαλίζει ότι οι ιδιότητες των ορίων εξακολουθούν να ισχύουν και για όρια στα $\pm\infty$.

  Από την (1) προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f'(x)+\frac{\eta\mu(\rho)}{2}\right)=-\eta\mu(\rho)+\frac{\eta\mu(\rho)}{2} =-\frac{\eta\mu(\rho)}{2}<0,$$

  άρα για x κοντά στο $-\infty$ είναι $f'(x)+\eta\mu(\rho)/2<0$, η ισοδύναμα

$$f'(x)<-\frac{\eta\mu(\rho)}{2},$$

  όπως ακριβώς ισχυριστήκαμε. Η φράση «κοντά στο $-\infty$» δηλώνει ότι η ιδιότητα $f'(x)<-\frac{\eta\mu(\rho)}{2}$ ισχύει σε κάποιο διάστημα της μορφής $(-\infty,-M]$, όπου M ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Συμπεραίνουμε ότι, στο διάστημα $(-\infty,-M]$, η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)+\frac{\eta\mu(\rho)}{2}x$$

  είναι γνησίως φθίνουσα, αφού η παράγωγός της είναι η

$$g'(x) = f'(x) + \frac{\eta\mu(\rho)}{2} < 0.$$

Άρα για $x < -M$ ισχύει

$$g(x) > g(-M) = f(-M) - \frac{\eta\mu(\rho)}{2} M$$

ή ισοδύναμα

$$f(x) > \left(f(-M) - \frac{\eta\mu(\rho)}{2} M \right) - \frac{\eta\mu(\rho)}{2} x$$

Ο όρος μέσα στην παρένθεση είναι σταθερός και ο τελευταίος όρος έχει όριο

$$\lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{\eta\mu(\rho)}{2} x \right) = -\frac{\eta\mu(\rho)}{2} (-\infty) = +\infty,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την υπόθεση $\eta\mu(\rho) > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, στην πιο πάνω ανισότητα, το δεξιό μέλος τείνει στο $+\infty$, καθώς $x \to -\infty$. Εφόσον η $f(x)$ στο αριστερό μέλος είναι ακόμη μεγαλύτερη από το δεξιό μέλος, θα ισχύει αναγκαστικά $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Αυτό όμως είναι άτοπο, καθώς έχουμε υποθέσει ότι το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \rho \in \mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν μπορεί να ισχύει $\eta\mu(\rho) > 0$.

- $\eta\mu(\rho) < 0$:

Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να καταλήξουμε σε άτοπο εντελώς όμοια με την πρώτη περίπτωση. Παραλείπουμε το επιχείρημα, καθώς είναι πανομοιότυπο με αυτό που αναλύσαμε πιο πάνω.

Από τα παραπάνω έπεται ότι αναγκαστικά πρέπει να ισχύει $\eta\mu(\rho) = 0$. Οι λύσεις αυτής της τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι όλα τα ακέραια πολλαπλάσια του π, δηλαδή όλα τα στοιχεία του συνόλου $\{\kappa\pi : \kappa \in \mathbb{Z}\}$. Άρα το όριο ρ θα πρέπει να είναι ένα στοιχείο αυτού του συνόλου.