Διαγώνισμα 4.21

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 216.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 141.

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 34.

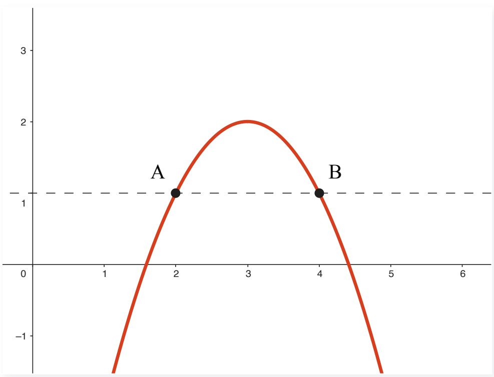
Α4. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Λ, **iv)** Λ, **v)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Εκτός από την ύπαρξη του ορίου, πρέπει επιπλέον αυτό το όριο να είναι ίσο με $f(x_0)$. Δείτε τον ορισμό της συνέχειας στη σελ. 70 του σχολικού βιβλίου.

ii. Η ευθεία $y=x$ έχει κλίση 1. Η παράγωγος σε ένα σημείο αναπαριστά την κλίση της εφαπτομένης ευθείας, οπότε, για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην $y=x$, θα πρέπει να ισχύει $f'(x_0)=1$.

iii. Δύο διαφορετικά σημεία με την ίδια τετμημένη δεν υπάρχουν στη γραφική παράσταση **καμίας** συνάρτησης. Αυτό έπεται άμεσα από τον ορισμό της συνάρτησης. Αν υπήρχαν δύο τέτοια σημεία, έστω (x_0,α) και $(x_0,)$, τότε θα ίσχυε $f(x_0)=\alpha$ και $f(x_0)=\beta$, οπότε τελικά θα ίσχυε $\alpha=\beta$ και επομένως θα επρόκειτο για το ίδιο σημείο και όχι για δύο διαφορετικά. Μια συνάρτηση είναι «1-1» αν επιπλέον δεν υπάρχουν στη γραφική της παράσταση δύο σημεία με την ίδια **τεταγμένη.** Για παράδειγμα, η συνάρτηση του διπλανού σχήματος δεν είναι «1-1», καθώς τα διαφορετικά σημεία A,B έχουν την ίδια τεταγμένη.



iv. Η σωστή έκφραση του εμβαδού είναι $\int_0^1 |f(x)|dx$, καθώς το εμβαδόν είναι πάντοτε θετικός αριθμός, ακόμη και αν η f παίρνει αρνητικές τιμές.

v. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} ημx$ δεν υπάρχει, καθώς το $ημx$ είναι περιοδική συνάρτηση και δεν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό (ούτε φυσικά στο $+\infty$ ή το $-\infty$, καθώς το ημίτονο παίρνει τιμές μεταξύ -1 και 1).

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Μπορούμε να αποδείξουμε το ζητούμενο με δύο τρόπους: Ο απλούστερος είναι να υπολογίσουμε την παράγωγο της g. Η g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων και ισχύει $g'(x)=e^x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Εύκολα λοιπόν βλέπουμε ότι $g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα.

Ένας δεύτερος τρόπος θα ήταν να θεωρήσουμε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και να αποδείξουμε ότι $g(x_1)<g(x_2)$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $e^{x_1}<e^{x_2}$. Ο δεύτερος τρόπος εδώ ίσως είναι λίγο πιο χρονοβόρος, αλλά είναι πιο γενικός, καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για συναρτήσεις που ίσως να μην είναι παραγωγίσιμες.

B2. Μια συνήθης στρατηγική θα ήταν να παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης που μας έχει δοθεί, αλλά δυστυχώς αυτό δε θα ήταν σωστό, διότι δεν γνωρίζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη. Θεωρούμε λοιπόν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$.

Ένας τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $f(x_1)\geq f(x_2)$. Σε αυτή την περίπτωση θα ίσχυε επίσης ότι

$$f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$$

Οι περιττές δυνάμεις (3,5,..) διατηρούν τη διάταξη. Οι άρτιες το κάνουν μόνο για θετικούς αριθμούς.

οπότε με πρόσθεση των δύο ανισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι $f^3(x_1)+f(x_1)\geq f^3(x_2)+f(x_2)$. Η αρχική σχέση όμως τώρα δίνει $e^{x_1}+x_1-1\geq e^{x_2}+x_2-1$, δηλαδή, σύμφωνα με τον συμβολισμό του Ερωτήματος Β1, $g(x_1)\geq g(x_2)$. Η g όμως είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $x_1\geq x_2$, το οποίο είναι άτοπο διότι έχουμε υποθέσει πως $x_1<x_2$. Καταλήξαμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι $f(x_1)\geq f(x_2)$, άρα συμπεραίνουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B3. Για τη συνάρτηση g του Ερωτήματος Β1 παρατηρούμε ότι $g(0)=0$. Καθώς η g είναι γνησίως αύξουσα, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας προσήμου για την g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Η δοσμένη σχέση γράφεται $f^3(x)+f(x)=g(x)$. Παραγοντοποιώντας το πρώτο μέλος, προκύπτει ότι $f(x)\left(f^2(x)+1\right)=g(x)$. Καθώς ο δεύτερος παράγοντας του πρώτου μέλους είναι θετικός για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έπεται ότι το πρόσημο του πρώτου παράγοντα, δηλαδή της f, είναι ίδιο με το πρόσημο της g.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

B4. Είδαμε παραπάνω ότι $f(0)=1$. Θα προσπαθήσουμε τώρα να κάνουμε μια εκτίμηση για το $f(1)$.

Ας σκεφτούμε όμως πρώτα τι θέλουμε να αποδείξουμε για το $f(1)$. Το ζητούμενο της άσκησης μας παραπέμπει στο θεώρημα Bolzano ή το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (Θ.Ε.Τ.). Για να χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο, θα έπρεπε ιδανικά να αποδείξουμε ότι $f(1)>1$. Αυτό ακριβώς θα προσπαθήσουμε να κάνουμε.

Πολλές φορές βοηθάει να προσπαθούμε να σκεφτούμε *πίσω από την άσκηση*. Να απλοποιούμε δηλαδή το ζητούμενο, όπως, π.χ., εδώ το μετατρέψαμε στη συνθήκη $f(1)>1$.

Για $x=1$ στην αρχική σχέση, προκύπτει ότι $f^3(1)+f(1)=e$. Θυμηθείτε ότι θέλουμε να δείξουμε πως $f(1)>1$. Ας προσπαθήσουμε με απαγωγή σε άτοπο. Αν ήταν $f(1)\leq 1$, τότε θα ίσχυε επίσης $f^3(1)\leq 1$. Άρα, αθροίζοντας αυτά τα δύο, προκύπτει ότι

$$f^3(1)+f(1)\leq 2<e$$

το οποίο είναι άτοπο, καθώς είδαμε πριν ότι $f^3(1)+f(1)=e$. Έπεται λοιπόν έτσι ότι $f(1)>1$. Το Θ.Ε.Τ. εφαρμόζεται:

- Η f είναι συνεχής.
- $f(0)\neq f(1)$, καθώς $f(0)=0$ και $f(1)>1$.
- $f(0)<1<f(1)$.

Προκύπτει λοιπόν ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=1$. Από τη μονοτονία της f έπεται ότι αυτό το x_0 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η δοσμένη σχέση γράφεται

$$f'(x)\left(f'(x)+2\right)=2x^2+3x+\frac{9}{8}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Το τριώνυμο του δεύτερου μέλους είναι μη αρνητικό για κάθε τιμή του x, διότι η διακρίνουσά του είναι ίση με

$$\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot\frac{9}{8}=0$$

και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι ίσος με $2>0$. Αυτό το τριώνυμο έχει μοναδική ρίζα το $x_0=-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{3}{4}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν έτσι ότι και το αριστερό μέλος, δηλαδή η παράσταση $f'(x)\left(f'(x)+2\right)$, είναι μη αρνητική για κάθε τιμή του $x\in\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η $f'(x)$ δεν μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα $(-2,0)$ διότι τότε ο πρώτος παράγοντας $f(x)$ θα ηταν αρνητικός, ενώ ο δεύτερος, $f(x)+2$, θα ήταν θετικός, με αποτέλεσμα το γινόμενο να είναι αρνητικό.

Άρα η f' παίρνει τιμές στο σύνολο $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$. Αναγκαστικά όμως πρέπει να παίρνει τιμές μόνο στο ένα από αυτά τα δύο υποδιαστήματα, καθώς σε διαφορετική περίπτωση, αν δηλαδή έπαιρνε τιμές και στα δύο, θα έπρεπε να παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές. Αυτό έπεται από το Θ.Ε.Τ., καθώς γνωρίζουμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, άρα η f' είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη). Είναι αδύνατον όμως η f' να παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές, δεν μπορεί, για παράδειγμα, να πάρει την τιμή -1. Άρα είτε θα ισχύει $f'(x)\le -2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είτε $f'(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Όμως μας έχει δοθεί ότι $f'\left(-\frac{3}{4}\right)=0$, άρα θα ισχύει $f'(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, μας έχει δοθεί ότι $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\ne -\frac{3}{4}$, άρα, εφόσον έχουμε δείξει ότι η f' παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές, προκύπτει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\ne -\frac{3}{4}$. Καθώς η f είναι συνεχής στο $x_0=-\frac{3}{4}$, έπεται τώρα από τη θεωρία ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Θεώρημα στη σελ. 144. Πολύ χρήσιμο όταν η παράγωγος δεν είναι παντού θετική.

Γ2. Αν $x\ge 2$, τότε $2x^2+3x+\frac{9}{8}\ge 8+6+\frac{9}{8}>15$.

Αυτό συνεπάγεται λοιπόν ότι $\left(f'(x)\right)^2+2f'(x)>15$ για $x\ge 2$. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα για ακόμη μία φορά απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει, ότι δηλαδή $f'(x)\le 3$. Τότε, καθώς $f'(x)\ge 0$, προκύπτει ότι $\left(f'(x)\right)^2\le 9$ (εδώ μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο, διότι έχουμε μόνο θετικούς όρους –διαφορετικά, μόνο οι περιττές δυνάμεις διατηρούν τη διάταξη). Επιπλέον, $2f'(x)\le 2\cdot 3=6$. Με πρόσθεση κατά μέλη έπεται ότι $\left(f'(x)\right)^2+2f'(x)\le 9+6=15$ το οποίο είναι άτοπο, καθώς παραπάνω είδαμε ότι το πρώτο μέλος είναι μεγαλύτερο του 15. Έπεται λοιπόν έτσι ότι $f'(x)>3$ για $x\ge 2$.

Γ3. Θεωρούμε τυχόν $x>2$. Από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(2,x)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}.$$

Από το Ερώτημα Γ2 έπεται ότι $f'(\xi)>3$, οπότε $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}>3$. Κάνοντας τους υπολογισμούς, παίρνουμε ότι $f(x)>3x-6+f(2)$. Είδαμε πρωτύτερα ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε $f(2)>f(0)=1$. Άρα

$$f(x)>3x-6+f(2)>3x-6+1\ \boxed{=3x-5.}$$

Γ4. Καθώς η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, μπορούμε να παραγωγίσουμε την αρχική σχέση. Παίρνουμε $2f'(x)f''(x)+2f''(x)=4x+3$, η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$2f''(x)\left(f'(x)+2\right)=4x+3.$$

Σύμφωνα με το Γ1, η παρένθεση είναι θετικός αριθμός, άρα το πρόσημο της $f''(x)$ είναι ίδιο με το πρόσημο του $4x+3$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$		$-3/4$		$+\infty$
$4x+3$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Από τον ορισμό της f προκύπτει ότι $f(0)=0$, επομένως θέλουμε αρχικά να αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Θα εξετάσουμε τα δύο πλευρικά όρια:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1-e^{-x}\right)=1-e^{-0}=0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

Αυτό έχει την απροσδιόριστη μορφή $0\cdot(-\infty)$. Μια τυπική τεχνική για τον υπολογισμό τέτοιων ορίων (απροσδιόριστη μορφή με τη μορφή γινομένου) είναι να τα μετατρέπουμε σε πηλίκο και να χρησιμοποιούμε τον κανόνα De L' Hospital. Γράφουμε λοιπόν

Αντί για $\frac{\ln x}{1/x}$, θα μπορούσε κανείς να μετατρέψει το γινόμενο και σε . Σε αυτές τις περιπτώσεις, σκεπτόμενοι ότι θέλουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital, επιλέγουμε τη μορφή που οδηγεί στις πιο εύκολες παραγωγίσεις. Εδώ αυτή είναι προφανώς η πρώτη $\frac{x}{1/\ln x}$, καθώς ο όρος $1/\ln x$ που περιέχεται στη δεύτερη δεν έχει και την πιο απλή παράγωγο και επιπλέον δημιουργεί και πιο δύσκολο όριο! Φυσικά, αν κάποια φορά διαπιστώσουμε ότι η μορφή που έχουμε επιλέξει δεν λειτουργεί, μπορούμε πάντοτε να δοκιμάσουμε και την άλλη.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\overset{-\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0,$$

οπότε και το δεξί όριο είναι ίσο με μηδέν.

Αφού και τα δύο όρια είναι ίσα με $0=f(0)$, συμπεραίνουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$. Για να αποδείξουμε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη, κοιτάζουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Κι εδώ θα κοιτάξουμε τα πλευρικά όρια: Το δεξί όριο γράφεται στη μορφή

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

που δεν είναι πραγματικός αριθμός. Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, χωρίς καν να χρειαστεί να υπολογίσουμε το αριστερό πλευρικό όριο.

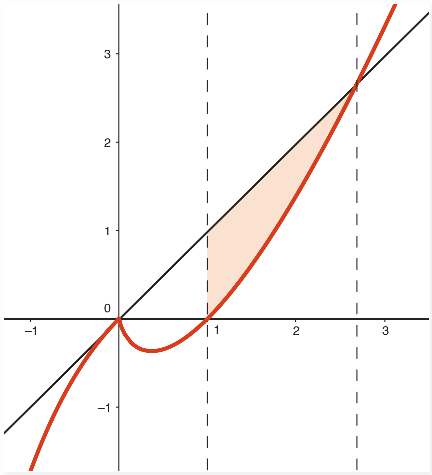
Δ2. Ένα σημείο τομής είναι ξεκάθαρα το $O(0,0)$. Για $x>0$ πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $x\ln x=x$, η οποία γράφεται $\ln x=1$ και έχει μοναδική λύση την $x=e$ με σημείο τομής το $A(e,e)$.

Για $x<0$ θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν σημεία τομής, δηλαδή ότι η εξίσωση

$$1-e^{-x}=x \quad (1)$$

δεν έχει λύσεις στο $(-\infty,0)$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $e^{x}\geq x+1$, η οποία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στην οποία η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Αντικαθιστώντας $-x$ στη θέση του x, αυτή η ανισότητα γίνεται $e^{-x}\geq -x+1$ ή ισοδύναμα $1-e^{-x}\geq x$. Η ισότητα όμως εδώ ισχύει μόνο για $-x=0$, δηλαδή για $x=0$. Για $x<0$ ισχύει επομένως η γνήσια ανισότητα $1-e^{-x}>x$, άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο $(-\infty,0)$.

Δ3. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν που μας ζητείται, θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος. Σε ερωτήματα εύρεσης εμβαδού, καλό είναι να σχεδιάζουμε ένα πρόχειρο σχήμα για να έχουμε μια άποψη του χωρίου που θέλουμε να μετρήσουμε. Παραθέτουμε εδώ ένα πιο ακριβές σχήμα, αν και η λεπτομέρεια συνήθως δεν είναι ζωτικής σημασίας σε τέτοια ερωτήματα.



Σύμφωνα με το Ερώτημα Γ2 και το παραπάνω σχήμα, το εμβαδόν που πρέπει να υπολογίσουμε είναι ίσο με

$$E=\int_1^e |f(x)-x|dx=\int_1^e |x\ln x-x|dx.$$

Για $x\in(1,e)$ ισχύει $\ln x<1$ άρα $x\cdot\ln x<x$. Επομένως, το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$E=\int_1^e (x-x\ln x)dx=\int_1^e xdx-\int_1^e x\ln xdx. \qquad (2)$$

Υπολογίζουμε τώρα το κάθε ολοκλήρωμα ξεχωριστά:

- $\displaystyle\int_1^e x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=\frac{e^2-1}{2}.$
- Για το δεύτερο ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_1^e x\ln xdx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln xdx=\left[\frac{x^2\ln x}{2}\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}dx$$

$$=\frac{e^2}{2}-\int_1^e \frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}.$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς, έπεται από τη σχέση (1) ότι το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με

$$\boxed{\frac{e^2-1}{2}-\frac{e^2+1}{4}=\frac{e^2-3}{4}.}$$

Δ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_\alpha): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

Για $x>0$ ισχύει

$$f'(x)=(x\ln x)'=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1,$$

οπότε, αφού $\alpha>0$, η εξίσωση της εφαπτομένης γράφεται

$$y-\alpha\ln\alpha=(\ln\alpha+1)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=(\ln\alpha+1)x-\alpha.$$

Το ζητούμενο λοιπόν είναι να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=(\ln\alpha+1)x-\alpha$ έχει ακριβώς μία ακόμα λύση εκτός της προφανούς $x=\alpha$.

- Για $x>0$ η εξίσωση αυτή δεν έχει λύσεις. Ένας τρόπος να το δούμε αυτό είναι να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$. Πράγματι,

$$f''(x)=(f'(x))'=(1+\ln x)'=1+\frac{1}{x}$$

αριθμός ο οποίος είναι θετικός για $x>0$. Εφόσον λοιπόν η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από τις εφαπτόμενές της, με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα δεν υπάρχουν άλλα κοινά σημεία της C_f με την ε_α για $x>0$.

- Πρέπει επομένως να δείξουμε ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση για $x<0$. Σε αυτήν την περίπτωση, η εξίσωση γράφεται

$$1-e^{-x}=(\ln\alpha+1)x-\alpha$$

Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση

$$g(x)=1-e^{-x}-(\ln\alpha+1)x+\alpha$$

για $x \le 0$. Αυτή είναι προφανώς παραγωγίσιμη και για κάθε $x \le 0$ ισχύει

$$g'(x) = e^{-x} - \ln\alpha - 1. \quad (3)$$

Καθώς $\alpha < 1/e$, θα ισχύει ότι

$$\ln\alpha < -1 \Rightarrow -\ln\alpha - 1 < 0 \quad (4)$$

Εφόσον $e^{-x} > 0$, έπεται από τις (3), (4) ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \le 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η g είναι γνησίως αύξουσα. Όντας συνεχής, έχει σύνολο τιμών το

$$g((-\infty,0]) = \left(\lim_{x\to-\infty} g(x), g(0)\right]. \quad (5)$$

Ισχύει $g(0) = \alpha$, οπότε μένει να υπολογίσουμε το όριο της g στο $-\infty$. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-e^{-x}\right) \overset{y=-x}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(-e^{y}\right) = -\infty \quad (6)$$

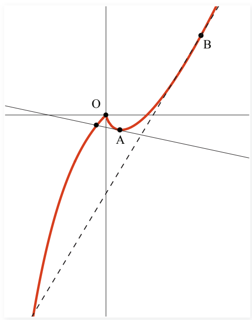
και

$$\lim_{x\to-\infty}(\ln\alpha+1)x = (\ln\alpha+1)(-\infty) = +\infty, \quad (7)$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι ο $\ln\alpha + 1$ είναι αρνητικός [όπως εξηγήσαμε και λίγο παραπάνω, στη σχέση (4)]. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6) και (7), παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - e^{-x} - (\ln\alpha+1)x + \alpha\right) = (-\infty) - (+\infty) + \alpha = -\infty$$

Έπεται τώρα από τη σχέση (5) ότι $g((-\infty,0]) = (-\infty,\alpha]$. Καθώς $\alpha > 0$, το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της g, άρα η g έχει ρίζα στο $(-\infty,0]$. Αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της g. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το φαινόμενο που αποδείξαμε παραπάνω, δηλαδή ότι η εφαπτόμενη στο A τέμνει ξανά τη C_f σε μοναδικό σημείο.



Σημείωση:

Ο περιορισμός $\alpha \in \left(0,\frac{1}{e}\right)$ δεν ήταν απόλυτα αναγκαίος. Στην πραγματικότητα, το ζητούμενο ισχύει για κάθε $\alpha > 0$. Αυτό φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, όταν μετακινούμε το σημείο A στη θέση B. Παρ' όλα αυτά, η απόδειξη, αν και όχι δύσκολη, είναι αρκετά πιο χρονοβόρα διότι οι ιδιότητες μονοτονίας και ο υπολογισμός των ορίων είναι λιγότερο.