Διαγώνισμα 4.22

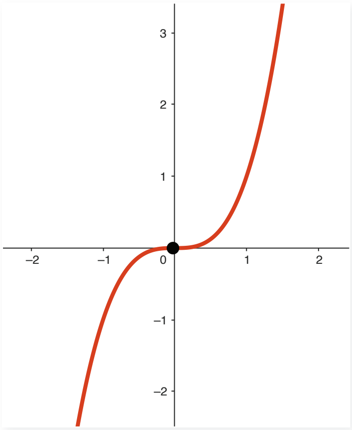
ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 162 (δεύτερος ορισμός).

Α3. i. Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος (Λ).

ii. Θα παραβάλουμε το εξής αντιπαράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το σημείο $x_0=0$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=3x^2$, οπότε $f'(0)=3\cdot 0^2=0$. Σύμφωνα λοιπόν με τον ισχυρισμό, θα έπρεπε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) στο σημείο $x_0=0$. Όμως αυτό δεν ισχύει. Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, στο $x_0=0$ η f δεν παρουσιάζει ούτε τοπικό μέγιστο, ούτε τοπικό ελάχιστο, καθώς για $x>0$ ισχύει $f(x)>f(0)$ (άρα το $f(0)$ δεν μπορεί να είναι μέγιστο) και για $x<0$ ισχύει $f(x)<f(0)$ (άρα το $f(0)$ δεν μπορεί να είναι ελάχιστο). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.



Προσοχή!

Ο αντίστροφος ισχυρισμός είναι σωστός, αρκεί το x_0 να είναι εσωτερικό σημείο σε κάποιο διάστημα στο οποίο ορίζεται η f και η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

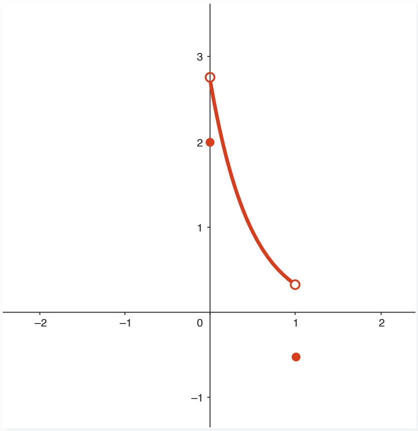
Αν ισχύουν δηλαδή αυτές οι προϋποθέσεις και η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0, τότε ισχύει $f'(x_0)=0$. Αυτό είναι το θεώρημα του Fermat (δείτε το θεώρημα στη σελ. 142 του σχολικού βιβλίου).

Πρέπει λοιπόν να είμαστε προσεκτικοί σε ερωτήσεις Σ-Λ όσον αφορά το ποια από τις δύο κατευθύνσεις της συνεπαγωγής μάς δίνεται. Όπως είδαμε, η μία είναι σωστή (κάτω από τις υποθέσεις που αναφέραμε), αλλά η άλλη (που μας δόθηκε στο παραπάνω ερώτημα) είναι λάθος.

Α3. i) Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Η διατύπωση μοιάζει με το θεώρημα Bolzano, αλλά στο θεώρημα Bolzano υποθέτουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε ολόκληρο το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν υποθέσουμε, όπως εδώ, ότι η συνάρτηση είναι απλώς συνεχής στο ανοιχτό διάστημα (α,β), τότε ενδεχομένως το συμπέρασμα να μην ισχύει, δηλαδή η f να μην έχει καμία ρίζα. Πράγματι, αν υποθέσουμε μόνο τη συνέχεια στο (α,β), τότε μπορεί η f να έχει ασυνέχειες στα άκρα α,β (σε τουλάχιστον ένα από αυτά). Ένα παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση του διπλανού σχήματος: Παρότι $f(0)f(1)<0$, η συνάρτηση πράγματι δεν έχει καμία ρίζα στο ανοιχτό διάστημα $(0,1)$, αφού, όπως παρατηρούμε, είναι παντού θετική σε αυτό (αρνητική είναι μόνο στο άκρο $x_1=1$, όμως και πάλι ρίζες δεν έχει).



ii. Αυτή η πρόταση είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος Rolle. Πράγματι:

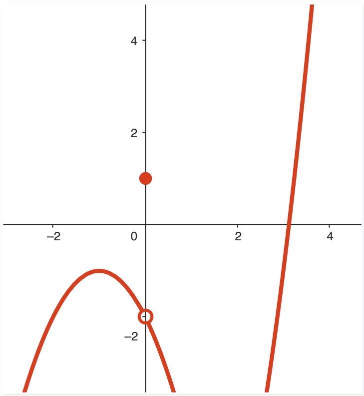
α. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ διότι είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ (άρα και συνεχής σε αυτό).

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, καθώς είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

γ. $f(0)=f(1)$.

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι στο σημείο $(x_0,f(x_0))$ η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη. Άρα η πρόταση είναι αληθής.

iii. Το συμπέρασμα θα ήταν σωστό αν η f ήταν συνεχής, όμως η συνέχεια δεν περιέχεται στις υποθέσεις. Για παράδειγμα, η συνάρτηση μπορεί να είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα: Στην προκειμένη περίπτωση, είναι πράγματι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-2<0$, όμως, αντίθετα, $f(0)=1>0$.



ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Θα αποδείξουμε μόνο την παραγωγισιμότητα της f στο $x_0 = 1$. Ως γνωστόν, η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται τη συνέχεια της f, άρα έτσι θα έχουμε αποδείξει και τις δύο ιδιότητες. Πρέπει λοιπόν να αποδείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Για $x \neq 1$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1} = \frac{\ln x-(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}, \qquad (1)$$

όπου στο δεύτερο βήμα πολλαπλασιάσαμε αριθμητή και παρονομαστή με το $x-1$, ώστε να διώξουμε το κλάσμα από τον αριθμητή. Ενδιαφερόμαστε λοιπόν για το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2}.$$

Όπως παρατηρούμε εύκολα, αυτό το όριο έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Είναι λοιπόν

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x - x + 1)'}{\left((x-1)^2\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x-1}{2(x-1)\cdot(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{1-x}{x}\right)}{2(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(-\frac{x-1}{x}\right)}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{x-1}{2x(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{2x}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Από τον τελευταίο υπολογισμό και από τη σχέση (1), έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = -1/2$. Όπως εξηγήσαμε και στην αρχή, η συνέχεια της f προκύπτει ως συνέπεια της παραγωγισιμότητάς της.

B2. Για $x \neq 1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η παράγωγός της είναι

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x-1}\right)' = \frac{(\ln x)'(x-1) - \ln x(x-1)'}{(x-1)^2} = = \frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2}. \qquad (2)$$

Ο παρονομαστής αυτού του κλάσματος είναι πάντοτε θετικός για $x \neq 1$, οπότε το πρόσημο εξαρτάται εξ ολοκλήρου από τον αριθμητή $\frac{1}{x}(x-1)-\ln x$. Θέτουμε λοιπόν

$$g(x)=\frac{x-1}{x}-\ln x$$

για $x>0$. Η g μπορεί απλούστερα να γραφτεί στη μορφή

$$g(x)=\frac{x}{x}-\frac{1}{x}-\ln x=1-\frac{1}{x}-\ln x.$$

Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=\left(1-\frac{1}{x}-\ln x\right)'=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x^2}.$$

για κάθε $x>0$. Παίρνουμε λοιπόν τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η g έχει μοναδική θέση ολικού μεγίστου την $x_0=1$, στην οποία παίρνει την τιμή $g(1)=0$. Πράγματι, αν $x\in(0,1]$, τότε $g(x)\leq g(1)$, καθώς g γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ ενώ, αν $x\in[1,+\infty)$, τότε $g(x)\geq g(1)$, καθώς g γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x>0$ έχουμε $g(x)\leq g(1)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

Ισχύει επομένως $g(x)<g(1)=0$ για κάθε $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Από τη σχέση (2) έπεται ότι $f'(x)=g(x)/(x-1)^2$, οπότε η ίδια ιδιότητα μεταφέρεται και στην f': Με άλλα λόγια, $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ (αποδείχτηκε στο Β1), προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το $(0,+\infty)$, όπως θέλαμε.

Άλλη μια εφαρμογή του θεωρήματος της σελ. 144 του σχολικού βιβλίου (μέρος iii του θεωρήματος).

Β3. Για να λύσουμε αυτό το ερώτημα, όπως και πολλά παρόμοια ερωτήματα, θα προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών της f. Η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το $(0,+\infty)$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων και λόγω του αποτελέσματος του ερωτήματος Β1. Εφόσον είναι και γνησίως φθίνουσα, έπεται από το αποτέλεσμα της σελ. 78 του σχολικού βιβλίου ότι το σύνολο τιμών της είναι το

$$f\left(\left(0,+\infty\right)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right),\lim_{x\to0^{+}}f\left(x\right)\right)\qquad(3)$$

Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε αυτά τα δύο όρια:

- Το $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1}\ln x/\left(x-1\right)$ έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Ισχύει λοιπόν

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x-1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

- Το δεύτερο όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to0^{+}}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\ln x}{x-1}=+\infty.$$

Προκύπτει λοιπόν από τη σχέση (3) ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f\left(\left(0,+\infty\right)\right)=\left(0,+\infty\right)$. Εφόσον το 2024 ανήκει σε αυτό, υπάρχει $x_1\in\left(0,+\infty\right)$ τέτοιο, ώστε $f\left(x_1\right)=2024$. Το x_1 είναι το μοναδικό με αυτήν την ιδιότητα, διότι, όπως αποδείξαμε στο Ερώτημα B2, η f είναι γνησίως φθίνουσα (άρα και «1-1»).

B4. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο $x_2\in\left(0,+\infty\right)$ στο οποίο η C_f να έχει οριζόντια εφαπτομένη. Θα ισχύει τότε $f'\left(x_2\right)=0$. Όπως είδαμε στο Ερώτημα B2, η f' είναι αρνητική για κάθε $x\neq1$, οπότε θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $x_2=1$. Από την άλλη όμως, είδαμε στο ερώτημα B1 ότι $f'\left(1\right)=-\frac{1}{2}$, η f' δεν μηδενίζεται ούτε στη θέση $x=1$. Συνεπώς, η f' δεν έχει ρίζες, άρα είναι αδύνατον η C_f να έχει οριζόντιες εφαπτόμενες.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'\left(x\right)=\frac{2\left(e^{x}-1\right)'\left(e^{x}+1\right)-2\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+1\right)'}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{2e^{x}\left(e^{x}+1\right)-2\left(e^{x}-1\right)e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$=\frac{2e^{2x}+2e^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\frac{4e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Αυτό δεν είναι το ζητούμενο σε αυτό το ερώτημα, αλλά το κρατάμε σαν πληροφορία γιατί μπορεί να είναι χρήσιμο αργότερα. Για την κυρτότητα πρέπει να κοιτάξουμε τη δεύτερη παράγωγο. Σαφώς η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f''(x)=\frac{4\left(e^x\right)'\left(e^x+1\right)^2-4e^x\left(\left(e^x+1\right)^2\right)'}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{4e^x\left(e^{2x}+2e^x+1\right)-4e^x\cdot 2\left(e^x+1\right)\cdot\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^4}$$

$$=\frac{4e^{3x}+8e^{2x}+4e^x-8e^x\left(e^x+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{4e^{3x}+8e^{2x}+4e^x-8e^{3x}-8e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^4}$$

$$=\frac{4e^x-4e^{3x}}{\left(e^x+1\right)^4}=\frac{4e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^x+1\right)^4}.$$

Όλοι οι παράγοντες είναι θετικοί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ εκτός του $1-e^{2x}$. Λύνοντας την ανίσωση $1-e^{2x}>0$, παίρνουμε την ισοδυναμία

$$1>e^{2x}\Leftrightarrow e^0>e^{2x}\Leftrightarrow 0>2x$$
$$\Leftrightarrow x<0,$$

οπότε αυτός ο παράγοντας είναι θετικός για $x<0$. Λύνοντας την ανίσωση με την αντίστροφη φορά, παίρνουμε ότι είναι αρνητικός για $x>0$. Για $x=0$ είναι ίσος με μηδέν. Προκύπτει έτσι ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-e^{2x}$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$		$\frown$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$.

Γ2. • Αντικαθιστώντας $x=0$ στους τύπους των δύο συναρτήσεων, παίρνουμε $f(0)=g(0)=0$, οπότε σίγουρα το $O(0,0)$ είναι κοινό σημείο των δύο γραφικών παραστάσεων.

• Ισχύει επίσης $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x$, οπότε $g'(0)=1$. Στο Γ1 υπολογίσαμε

$$f'(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \quad \text{οπότε} \quad f'(0)=\frac{4}{(1+1)^2}=1.$$

Η εφαπτομένη της C_f λοιπόν στο $O(0,0)$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_f): y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

η οποία γράφεται μετά από τις απλοποιήσεις ως $(\varepsilon_f): y=x$. Η εφαπτομένη της C_g στο ίδιο σημείο είναι η

$$(\varepsilon_g): y-g(0)=g'(0)(x-0)$$

Μετά από τις απλοποιήσεις, μπορούμε να δούμε ότι και αυτή είναι η $(\varepsilon_g): y=x$. Άρα οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη στο O.

Γ3. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ με ισότητα μόνο για $x=0$. Επιπλέον, για κάθε πραγματικό αριθμό α γνωρίζουμε ότι $\alpha\le|\alpha|$ και $\alpha\ge-|\alpha|$. Αυτές οι ανισότητες είναι γνωστές από την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου και αποδεικνύονται εύκολα με τη χρήση του ορισμού της απόλυτης τιμής. Άρα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

> Αυτή η ανισότητα βρίσκεται στη σελ. 52 του σχολικού βιβλίου.

• Για $x>0$ είναι $g(x)=\eta\mu x\le|\eta\mu x|<|x|=x$, όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε την πρώτη από τις θεμελιώδεις ανισότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω, στο τρίτο την ανισότητα $|\eta\mu x|<|x|$ (θυμηθείτε ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, οπότε εδώ έχουμε γνήσια ανισότητα) και στο τέταρτο βήμα τη σχέση $|x|=x$, που ισχύει διότι είμαστε στην περίπτωση $x>0$.

• Ομοίως, για $x<0$ είναι $g(x)=\eta\mu x\ge-|\eta\mu x|>-|x|=x$, όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε τη δεύτερη από τις θεμελιώδεις ανισότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω, στο τρίτο την ανισότητα $|\eta\mu x|<|x|$, πολλαπλασιασμένη με το -1 και από τις δύο πλευρές (γι' αυτό και είναι αντεστραμμένη η φορά της –διότι πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με αρνητικό αριθμό) και στο τέταρτο βήμα την ισότητα $-|x|=x$, που ισχύει διότι είμαστε στην περίπτωση $x<0$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει ότι για $x>0$ ισχύει $g(x)<x$ και για $x<0$ ισχύει $g(x)>x$.

Γ4. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική λύση $x=0$. Όπως είδαμε στο Ερώτημα Γ2, η εφαπτομένη της C_f στο $(0,f(0))$ είναι η $\varepsilon_f : y=x$. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τα διαστήματα κυρτότητας της f, τα οποία προσδιορίσαμε στο Ερώτημα Γ1.

- Στο διάστημα $[0,+\infty)$ είδαμε ότι η f είναι κυρτή, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από τις εφαπτομένες της, με εξαίρεση τα σημεία επαφής τους. Συνεπώς, αφού η εφαπτομένη στο $(0,f(0))$ είναι η $y=x$, θα ισχύει $f(x)>x$ για κάθε $x>0$. Ταυτόχρονα, είδαμε στο Γ3 ότι $g(x)<x$ για κάθε $x>0$. Επομένως, για $x>0$ ισχύει $f(x)>x>g(x)$ και επομένως αποκλείεται να ισχύει $f(x)=g(x)$ για κανένα τέτοιο x.

- Στο διάστημα $(-\infty,0]$ είδαμε ότι η f είναι κοίλη, άρα η C_f βρίσκεται κάτω από τις εφαπτομένες της, με εξαίρεση τα σημεία επαφής τους. Συνεπώς, αφού η εφαπτομένη στο $(0,f(0))$ είναι η $y=x$, ισχύει $f(x)<x$ για κάθε $x<0$. Ταυτόχρονα, είδαμε ότι $g(x)>x$ για κάθε $x<0$. Επομένως, για $x<0$ ισχύει $f(x)<x<g(x)$ και επομένως αποκλείεται να ισχύει $f(x)=g(x)$ για κανένα τέτοιο x.

Από τα παραπάνω έπεται ότι για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $f(x)\neq g(x)$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η πρώτη υπόθεση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x)\geq x-\ln x-1 \quad (1)$$

για κάθε $x>0$. Το όριο του δεύτερου μέλους για $x\to 0^+$ είναι

$$\lim_{x\to 0^+}(x-\ln x-1)=0-(-\infty)-1=+\infty.$$

Από τη σχέση (1) έπεται ότι $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, αφού η f είναι μεγαλύτερη από μια συνάρτηση που τείνει στο $+\infty$.

Το τελευταίο επιχείρημα δεν είναι πλήρως δικαιολογημένο, υπό την έννοια ότι δεν γνωρίζουμε αν το όριο $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ υπάρχει, οπότε θεωρητικά δεν θα μπορούσαμε να γράψουμε την ανισότητα

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \geq +\infty.$$

Θα μπορούσαμε να γράψουμε μια πλήρη δικαιολόγηση ως εξής: Αρχικά ισχύει $\lim_{x\to 0^+}(x-\ln x-1)=+\infty$, οπότε η συνάρτηση $x-\ln x-1$ είναι θετική κοντά στο 0. Εφόσον για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\geq x-\ln x-1$, έπεται και ότι η f είναι θετική κοντά στο 0. Μπορούμε λοιπόν για x κοντά στο 0 να αντιστρέψουμε την ανισότητα $f(x)\geq x-\ln x-1$ (αφού και τα δύο μέλη είναι θετικά κοντά στο μηδέν) και να γράψουμε

$$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{x-\ln x-1}.$$

Εφόσον η f είναι θετική κοντά στο 0, μπορούμε να επεκτείνουμε αυτήν την ανισότητα γράφοντας

$$0 \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{x-\ln x-1}.$$

Το όριο του δεξιού μέλους είναι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x-\ln x-1} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

όπως και αυτό του αριστερού μέλους. Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$. Αφού η f είναι θετική κοντά στο μηδέν και αφού $f(x)=\frac{1}{1/f(x)}$, προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1/f(x)} = +\infty,$$

που είναι το ζητούμενο. Παρ' όλα αυτά, η απόδειξη που δώσαμε στο κύριο μέρος της λύσης είναι γενικά αποδεκτή στις εξετάσεις.

Δ2. Έστω ότι η f έχει ρίζα $x_0 \neq 1$. Τότε από την πρώτη υπόθεση προκύπτει ότι

$$0 = f(x_0) \geq x_0 - \ln x_0 - 1.$$

Όμως για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1$, με ισότητα μόνο για $x = 1$.
Άρα για το $x_0 \neq 1$ ισχύει

$$\ln x_0 < x_0 - 1 \Leftrightarrow x_0 - \ln x_0 - 1 < 0.$$

Συνδυάζοντας αυτήν τη σχέση με την παραπάνω, προκύπτει ότι

$$0 = f(x_0) \geq x_0 - \ln x_0 - 1 > 0,$$

δηλαδή $0 > 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η f δεν γίνεται να έχει ρίζες διαφορετικές του 1.

Αυτή η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς απόδειξη, καθώς εμφανίζεται ως εφαρμογή στη σελ. 148 του σχολικού βιβλίου.

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της, οπότε ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[1, e]$. Πράγματι:

- Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$, καθώς είναι παραγωγίσιμη σε αυτό (διότι είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$).
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, e)$, καθώς είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$.

Επομένως, από το Θ.Μ.Τ. έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \frac{e - 2 - f(1)}{e - 1}.$$

Από την αρχική υπόθεση προκύπτει όμως ότι

$$f(1) + 1 \geq 1 - \ln 1 \Rightarrow f(1) \geq 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το -1 και γράφοντας την τελευταία ανισότητα ως $-f(1) \leq 0$, προκύπτει ότι

$$f'(\xi) = \frac{e - 2 - f(1)}{e - 1} \leq \frac{e - 2 - 0}{e - 1} = \frac{e - 2}{e - 1}. \qquad (2)$$

Για να αποδείξουμε ότι το τελευταίο κλάσμα είναι μικρότερο από $\frac{1}{2}$, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{e - 2}{e - 1} = \frac{e - 1 - 1}{e - 1} = 1 - \frac{1}{e - 1} \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad (3)$$

όπου η ανισότητα στο τρίτο βήμα προκύπτει από το γεγονός ότι

$$e<3\Rightarrow e-1<2\Rightarrow \frac{1}{e-1}>\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{e-1}<-\frac{1}{2}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τις σχέσεις (2), (3) ότι $f'(\xi)<\frac{1}{2}$, όπως θέλαμε.

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=f(x)+1-x+\ln x$$

για κάθε $x>0$. Από την πρώτη υπόθεση στην εκφώνηση, προκύπτει ότι $g(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$. Αντικαθιστώντας όμως $x=e$, παίρνουμε

$$g(e)=e-2+1-e-\ln e=0.$$

Επομένως, η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $g(e)=0$ στη θέση $x=e$. Αυτό το σημείο είναι προφανώς εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της g, η οποία είναι και παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Έτσι, από το θεώρημα του Fermat, προκύπτει ότι $g'(e)=0$. Για κάθε $x>0$ ισχύει

$$g'(x)=f'(x)-1-\frac{1}{x},$$

άρα $g'(e)=f'(e)-1-\frac{1}{e}$. Από τη σχέση $g'(e)=0$ έπεται λοιπόν τώρα άμεσα ότι

$$f'(e)=1+\frac{1}{e}.$$