Διαγώνισμα 4.23

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 144.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 74 (θεώρημα και συζήτηση πριν από αυτό).

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 216.

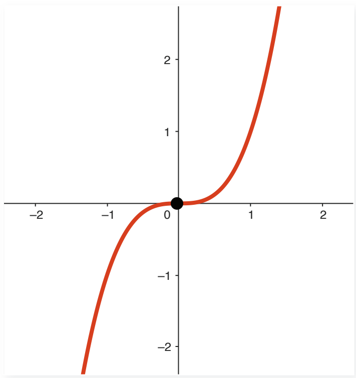
Α4. i) Σ, **ii)** Σ, **iii)** Σ, **iv)** Λ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Δείτε το θεώρημα 2 στη σελ. 214 του σχολικού βιβλίου. Εδώ έχουμε μια γενίκευση αυτού του θεωρήματος για τέσσερα αντί για τρία σημεία, αλλά το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

ii. Δείτε το σχόλιο μετά από το θεώρημα Bolzano στη σελ. 74 του σχολικού βιβλίου. **Προσοχή:** Η πρόταση ισχύει μόνο για διαστήματα (και για το $\mathbb{R}$, το οποίο μπορούμε ουσιαστικά να το θεωρήσουμε σαν διάστημα). Εάν, για παράδειγμα, η συνάρτηση ήταν ορισμένη στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, τότε το ζητούμενο δεν θα ίσχυε απαραίτητα και η πρόταση θα ήταν λάθος (π.χ., μπορεί η συνάρτηση να ήταν θετική στο ένα και αρνητική στο άλλο διάστημα, οπότε ναι μεν δεν θα μηδενιζόταν, αλλά δεν θα διατηρούσε πρόσημο).

iii. Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x/x)=1$. Φυσικά, αφού υπάρχει το όριο, τα πλευρικά όρια επίσης υπάρχουν και είναι ίσα με αυτό, οπότε θα ισχύει αναγκαστικά $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.



iv. Η φράση «αν και μόνο αν» σημαίνει ισοδυναμία των συνθηκών «η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0» και «$f'(x_0)=0$». Η πρώτη συνθήκη πράγματι συνεπάγεται τη δεύτερη, άλλωστε αυτό είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος του Fermat. Αντίθετα, όμως, η δεύτερη συνθήκη δεν συνεπάγεται την πρώτη. Για παράδειγμα, αν $f(x)=x^3$, τότε ισχύει μεν ότι $f'(0)=3\cdot 0^2=0$, όμως η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=0$, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

v. Γενικότερα, από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης, ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ για κάθε $x\in A_f$ και $y\in A_{f^{-1}}$ (σελ. 36 του σχολικού βιβλίου). Εδώ εμφανίζονται τα δύο μέλη αυτής της ισοδυναμίας, όπου απλώς έχουμε επιλέξει ακριβώς την ίδια τιμή για το x και το y. Φυσικά, αυτό είναι επιτρεπτό, αφού, όπως γράψαμε παραπάνω, η ισοδυναμία είναι αληθής για όλα τα x, y (οπότε μπορούμε να τους δώσουμε όποιες τιμές θέλουμε και η ισοδυναμία θα ισχύει).

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Για την f, ο μόνος περιορισμός που θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε θα είχε να κάνει με τον μηδενισμό του παρονομαστή. Όμως, καθώς $e^x > 0$, είναι σαφές ότι η παρονομαστής είναι θετικός για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = \mathbb{R}$.
Για την g ο περιορισμός είναι σαφώς $x > 0$, οπότε $A_g = (0, +\infty)$.

B2. Σκεφτόμαστε ότι $\varphi(x) = g(f(x))$, οπότε για το πεδίο ορισμού της φ θέλουμε να ισχύει:

- $x \in A_f$ (καθώς το x στην παραπάνω έκφραση βρίσκεται «εντός» της f).
- $f(x) \in A_g$ (καθώς η $f(x)$ με τη σειρά της βρίσκεται «εντός» της g).

Οι δύο παραπάνω σχέσεις υπάρχουν και στη σελ. 25 του σχολικού βιβλίου, κάτω από τον ορισμό και το σχήμα, με μόνη διαφορά τον συμβολισμό –χρησιμοποιούνται τα σύμβολα A, B στη θέση των A_f, A_g που χρησιμοποιούμε τώρα.

- Από τη σχέση $x \in A_f$ δεν προκύπτει κάποιος περιορισμός, αφού $A_f = \mathbb{R}$.
- Αφού $A_g = (0, +\infty)$, η σχέση $f(x) \in A_g$ είναι ισοδύναμη με $f(x) > 0$, δηλαδή $(e^x - 1)/(e^x + 1) > 0$. Καθώς ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$$

  η οποία έχει λύσεις $x > 0$.

Συνδυάζοντας τους δύο παραπάνω περιορισμούς (στην ουσία μόνο ο δεύτερος είναι περιοριστικός), προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού της φ είναι το $A_\varphi = (0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\boxed{\varphi(x) = g(f(x)) = \ln f(x) = \ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}.}$$

Β3. Στο πεδίο ορισμού της, η φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη (σύνθεση, πηλίκο) παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ισχύει λοιπόν

$$\varphi'(x)=\left(\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=\frac{1}{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\cdot\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=\frac{e^x+1}{e^x-1}\cdot\frac{\left(e^x-1\right)'\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$=\frac{e^x+1}{e^x-1}\cdot\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{1}{e^x-1}\cdot\frac{2e^x}{e^x+1}=\frac{2e^x}{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}.$$

Ο παράγοντας e^x-1 είναι θετικός, διότι έχουμε υποθέσει ότι $x>0$. Οι παράγοντες $2e^x, \left(e^x+1\right)$ είναι θετικοί ούτως ή άλλως (ασχέτως του προσήμου του x). Συμπεραίνουμε έτσι ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\varphi'(x)>0$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Β4. Γνωρίζουμε από τις ιδιότητες των λογάριθμων ότι $-\ln 2=\ln(1/2)$, οπότε η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\ln\frac{e^x-1}{e^x+1}<\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{e^x-1}{e^x+1}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\left(e^x-1\right)<\left(e^x+1\right)$$

$$\Leftrightarrow e^x<3\quad\boxed{\Leftrightarrow x<\ln 3.}$$

Προσοχή:

Από τη μορφή της αρχικής ανίσωσης, είναι ξεκάθαρο ότι το x πρέπει επιπλέον να ανήκει και στο πεδίο ορισμού της φ, δηλαδή πρέπει να ισχύει $x>0$.

Επομένως, λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x\in(0,\ln 3)$.

Β5. (Bonus) Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα $\int_0^1\left|f(x)\right|dx$. Όπως δείξαμε στο Ερώτημα Β2, η f είναι θετική για $x>0$, οπότε μπορούμε να απαλείψουμε την απόλυτη τιμή. Θέλουμε επομένως να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1\frac{e^x-1}{e^x+1}dx.$$

Ένας τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι να χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση με αντικατάσταση, θέτοντας $y = e^x$. Αυτή είναι μια λογική στρατηγική διότι βλέπουμε ότι το x εμφανίζεται μέσα στο ολοκλήρωμα μόνο μέσω του e^x. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $dy = e^x dx$, οπότε $dx = \left(1/e^x\right)dy = \left(1/y\right)dy$. Υπολογίζουμε τώρα τα νέα άκρα ολοκλήρωσης:

- Για $x = 0$ ισχύει $y = e^0 = 1$.
- Για $x = 1$ ισχύει $y = e^1 = e$.

Επομένως, το ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$\int_1^e \left(\frac{y-1}{y+1}\cdot\frac{1}{y}\right)dy$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{y-1}{y+1} = \frac{y+1-2}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1}$$

άρα

$$\frac{y-1}{y+1}\cdot\frac{1}{y} = \left(1 - \frac{2}{y+1}\right)\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{y} - \frac{2}{y\left(y+1\right)}.$$

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του πρώτου όρου, καθώς είναι ίσος με την παράγωγο του $\ln y$. Ο δεύτερος όρος μάς δυσκολεύει λόγω του γινομένου στον παρονομαστή. Αν δεν υπήρχε το γινόμενο και είχαμε κάθε παράγοντα ξεχωριστά, τότε θα μπορούσαμε να εκφράσουμε το κλάσμα με τη βοήθεια των παραγώγων κάποιων λογαριθμικών συναρτήσεων. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να «σπάσουμε» το κλάσμα σε απλούστερα κλάσματα που περιέχουν στους παρονομαστές τους τον κάθε παράγοντα ξεχωριστά. Εδώ αυτή η διάσπαση είναι η

$$\frac{1}{y\left(y+1\right)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}.$$

Αυτή η διάσπαση μπορεί αρχικά να φαίνεται ουρανοκατέβατη, όμως θα μπορούσαμε να την εξαγάγουμε πιο μεθοδικά, γράφοντας

$$\frac{1}{y\left(y+1\right)} = \frac{A}{y} - \frac{B}{y+1}$$

και υπολογίζοντας τα A, B με απαλοιφή παρονομαστών και απλοποιήσεις.

Μετά από την παραπάνω ανάλυση, μπορούμε πλέον να γράψουμε το ολοκλήρωμα στη σχέση (1) ως

$$\int_1^e\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{y}+\frac{2}{y+1}\right)dy=\int_1^e\left(\frac{2}{y+1}-\frac{1}{y}\right)dy=\left[2\ln(y+1)-\ln y\right]_1^e$$

$$=2\ln(e+1)-2\ln2-\ln e+\ln1=$$

$$\boxed{=2\ln(e+1)-2\ln2-1.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι επίσης ορισμένη σε ένα διάστημα, το $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$. Επομένως, για να δείξουμε ότι είναι σταθερή, αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δείτε το θεώρημα στη σελ. 133 του σχολικού βιβλίου.

Προσοχή: Αυτό το θεώρημα απαιτεί η συνάρτηση να είναι ορισμένη σε διάστημα, γι' αυτό και αναφέρουμε τον όρο «διάστημα» πιο πάνω.

Υπολογίζουμε λοιπόν την παράγωγό της.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x)=\left(f^2(x)\right)'-2f'(x)-\left(4x^2\right)'$$

$$=2f(x)f'(x)-2f'(x)-8x$$

$$=2\left(f(x)f'(x)-f'(x)-4x\right)=0,$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση. Προκύπτει έτσι από την παραπάνω ισότητα ότι $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η g είναι σταθερή.

Γ2. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η g είναι σταθερή. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$g(0)=f^2(0)-2f(0)-4\cdot0^2=2^2-2\cdot2=0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ισότητα $f(0)=2$ που μας δόθηκε στην εκφώνηση. Καθώς η g είναι σταθερή, έπεται ότι $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ο όρος $f^2(x)-2f(x)$ που εμφανίζεται στην g μάς θυμίζει το ανάπτυγμα του $(\alpha-1)^2$, οπότε προσθέτουμε και αφαιρούμε το 1 για να σχηματίσουμε αυτήν την ταυτότητα. Έτσι λοιπόν, η ισότητα $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στη μορφή

$$f^2(x)-2f(x)-4x^2=0 \Leftrightarrow \left(f^2(x)-2f(x)+1\right)-1-4x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-1\right)^2=4x^2+1$$

$$\Leftrightarrow \left|f(x)-1\right|=\sqrt{4x^2+1}. \qquad (1)$$

Μας έχει δοθεί στην εκφώνηση ότι $f(x)\neq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση $f(x)-1$ δεν μηδενίζεται. Εφόσον είναι συνεχής, έπεται ότι διατηρεί πρόσημο. Για $x=0$, αυτή η συνάρτηση παίρνει την τιμή $f(0)-1=2-1=1$, οπότε συμπεραίνουμε ότι είναι θετική για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έπεται λοιπόν από τη σχέση (1), με απαλοιφή της απόλυτης τιμής, ότι

$$\boxed{f(x)-1=\sqrt{4x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{4x^2+1}+1}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπως θέλαμε.

Γ3. Για να κάνουμε υπολογισμούς με την εφαπτομένη της C_f, θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την παράγωγο της f. Από τον κανόνα της αλυσίδας είναι

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}}\cdot\left(4x^2+1\right)'=\frac{1}{2\sqrt{4x^2+1}}\cdot 8x=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

Συνεπώς, η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η $(\varepsilon_\alpha): y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$, η οποία γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\varepsilon_\alpha : y=\frac{4\alpha x}{\sqrt{4\alpha^2+1}}+\left(1+\sqrt{4\alpha^2+1}-\frac{4\alpha^2}{\sqrt{4\alpha^2+1}}\right).$$

Για να βρούμε το σημείο τομής της με τον άξονα $x'x$, θέτουμε $y=0$. Προκύπτει τότε ότι

$$\frac{4\alpha x}{\sqrt{4\alpha^2+1}}+1+\sqrt{4\alpha^2+1}-\frac{4\alpha^2}{\sqrt{4\alpha^2+1}}=0 \Leftrightarrow 4\alpha x+\sqrt{4\alpha^2+1}+1=0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha x=-\left(1+\sqrt{4\alpha^2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{1+\sqrt{4\alpha^2+1}}{4\alpha},$$

όπου στο πρώτο βήμα κάναμε απαλοιφή παρονομαστών και απλοποιήσαμε τους όρους $+4\alpha^2$ και $-4\alpha^2$ που εμφανίζονταν.

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι το ζητούμενο σημείο τομής είναι το

$$\boxed{\mathrm{B}\left(-\frac{1+\sqrt{4\alpha^2+1}}{4\alpha},0\right).}$$

Γ4. Γνωρίζουμε ότι $\alpha'(t)=4$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με t_0 τη χρονική στιγμή κατά την οποία το A βρίσκεται στη θέση $(1,f(1))$. Ισχύει λοιπόν $\alpha(t_0)=1$. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο ερώτημα, το σημείο B είναι το

$$\mathrm{B}\left(-\frac{1+\sqrt{4\alpha^2(t)+1}}{4\alpha(t)},0\right),$$

οπότε η τετμημένη του είναι η

$$\beta(t)=-\frac{1+\sqrt{4\alpha^2(t)+1}}{4\alpha(t)}.$$

Για να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της τη χρονική στιγμή $t=t_0$, δηλαδή το $\beta'(t_0)$, πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την παράγωγο $\beta'(t)$. Είναι

$$\beta'(t)=-\frac{\left(1+\sqrt{4\alpha^2(t)+1}\right)'4\alpha(t)-\left(1+\sqrt{4\alpha^2(t)+1}\right)4\alpha'(t)}{16\alpha^2(t)} \qquad (2)$$

Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τον όρο $\left(1+\sqrt{4\alpha^2(t)+1}\right)'$ που είναι και ο πιο πολύπλοκος. Από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι αυτή η παράγωγος ισούται με

$$\frac{1}{2\sqrt{4\alpha^2(t)+1}}\cdot\left(4\alpha^2(t)+1\right)'=\frac{8\alpha^2(t)\alpha'(t)}{2\sqrt{4\alpha^2(t)+1}}=\frac{4\alpha^2(t)\alpha'(t)}{\sqrt{4\alpha^2(t)+1}}.$$

Για $t=t_0$, αυτή ισούται με

$$\frac{4\cdot1\cdot4}{\sqrt{4\cdot1+1}}=\frac{16}{\sqrt{5}},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $\alpha(t_0)=1$ και $\alpha'(t_0)=4$.

Αντικαθιστώντας τώρα $t=t_0$ στη (2), έπεται ότι

$$\beta'(t_0)=\frac{\frac{16}{\sqrt{5}}\cdot 4-\left(1+\sqrt{4+1}\right)\cdot 4\cdot 4}{16\cdot 1^2}=\frac{\frac{64}{\sqrt{5}}-16\left(1+\sqrt{5}\right)}{16}$$

$$=\frac{16-\left(5+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}}\ \boxed{=\frac{11-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\ ,\ \text{m/sec}}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξή μας.

Γ5. (Bonus) Στο $+\infty$ μπορούμε να αναζητήσουμε οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες. Ισχύει ξεκάθαρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+1\right)=+\infty$, οπότε δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες. Αναζητούμε λοιπόν στο εξής πλάγιες ασύμπτωτες.

- Για x «κοντά» στο $+\infty$, ισχύει $x>0$, οπότε μπορούμε να γράψουμε $x=\sqrt{x^2}$ όταν παίρνουμε όρια $x\to+\infty$. Έχουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}+1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+1}}{\sqrt{x^2}}+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{4x^2+1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)=\sqrt{4}\ =2.$$

- Μένει τώρα να υπολογίσουμε το

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{4x^2+1}-2x\right)$$

Αγνοούμε προς το παρόν το 1 στην αρχή και επικεντρωνόμαστε στους δύο άλλους όρους. Το όριο είναι της μορφής $+\infty-\infty$, η οποία είναι απροσδιόριστη. Σε τέτοιες περιπτώσεις, δηλαδή όταν έχουμε αυτήν την απροσδιόριστη μορφή και ιδιαίτερα όταν ο ένας όρος περιέχει ρίζα, είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ένα χρήσιμο κόλπο το οποίο προκύπτει από την ταυτότητα διαφοράς τετραγώνων $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$. Με μία αναδιάταξη, αυτή η ταυτότητα γράφεται

$$\alpha-\beta=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}.$$

Θέτοντας $\alpha=\sqrt{4x^2+1}$ και $\beta=2x$, παίρνουμε

$$\sqrt{4x^2+1}-2x=\frac{\left(\sqrt{4x^2+1}^{\,2}-(2x)^2\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=\frac{\left(4x^2+1-4x^2\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}=\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}.$$

Πλέον λοιπόν είναι ξεκάθαρο (μια και ο παρονομαστής τείνει στο $+\infty$, καθώς $x\to+\infty$) ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{4x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\right)=1+0=1.$$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=1$, έπεται ότι η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι η

$$\boxed{(\varepsilon): y=2x-1}$$

Σημείωση:

Αυτό το ερώτημα είναι ιδιαίτερα χρονοβόρο και ενδεχομένως αυτό να το κάνει λιγότερο πιθανό να τεθεί ως Θέμα Γ3 σε ένα πραγματικό διαγώνισμα εξετάσεων. Παρ' όλα αυτά, υπάρχει αντίστοιχη άσκηση στο σχολικό βιβλίο (σελ. 69, άσκηση 3, Ερωτήματα ii και iv), οπότε ίσως να ήταν καλό να ρίξουμε μια ματιά στη λύση.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Αυτό το ερώτημα δεν είναι δύσκολο, αλλά έχει μια μικρή ιδιαιτερότητα, καθώς για τη λύση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $f'(0)\neq 1$. Ισοδύναμα, $f'(0)-1\neq 0$. Καθώς η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, η παράγωγος f' είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής). Προκύπτει λοιπόν από την υπόθεση και από τη συνέχεια της παραγώγου ότι

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(f'(x)-1\right)}{f'(x)-1}=\frac{\eta\mu\left(f'(0)-1\right)}{f'(0)-1},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\frac{\eta\mu\left(f'(0)-1\right)}{f'(0)-1}=1 \Rightarrow \eta\mu\left(f'(0)-1\right)=f'(0)-1. \qquad (1)$$

Γνωρίζουμε όμως από τη θεωρία ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ με ισότητα μόνο για $x=0$. Στη σχέση (1) ισχύει η ισότητα για $x=f'(0)-1$. Φυσικά, η ισότητα $\eta\mu\left(f'(0)-1\right)=f'(0)-1$ της σχέσης (1) δεν έχει απόλυτες τιμές, αλλά προφανώς ισχύει και με απόλυτες τιμές –εξάλλου, αν δύο αριθμοί είναι ίσοι, τότε είναι ίσες και οι απόλυτες τιμές τους. Αυτό συνεπάγεται ότι $f'(0)-1=0$, δηλαδή $f'(0)=1$, το οποίο είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι $f'(0)\neq 1$.

Καταλήξαμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι $f'(0)\neq 1$, επομένως πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $f'(0)=1$. Από τη συνέχεια της παραγώγου έπεται τώρα ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(f'(x)-1\right)=f'(0)-1=0,$$

οπότε, θέτοντας $u=f'(x)-1$, παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(f'(x)-1\right)}{f'(x)-1}=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}$$

το οποίο ισούται πράγματι με 1. Άρα η υπόθεση που δίνεται στην εκφώνηση πράγματι ικανοποιείται στην περίπτωση που $f'(0)=1$.

Δ2. Από τις σχέσεις $f(0)=-1$ και $f'(0)=1$ προκύπτει ότι η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)$ η οποία μετά από τις απλοποιήσεις γράφεται στη μορφή $\varepsilon: y=x-1$. Μας έχει δοθεί ότι η f είναι κυρτή, οπότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από τις εφαπτόμενές της, με εξαίρεση τα σημεία επαφής τους. Επομένως, ισχύει $f(x)\ge x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με ισότητα μόνο για $x=0$. Εφόσον $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ και το $f(x)$ είναι μεγαλύτερο από το $x-1$, θα πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Δ3. Η f είναι κυρτή, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Εφόσον $f'(0)=1$, θα ισχύει $f'(x)\ge 1>0$ για κάθε $x\ge 0$. Συνεπώς, η f είναι επίσης γνησίως αύξουσα. Αφού είναι και συνεχής, η εικόνα του διαστήματος $[0,+\infty)$ μέσω της f είναι το σύνολο

$$f\left([0,+\infty)\right)=\left[f(0),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty).$$

Εφόσον $0 \in f([0,+\infty))$, έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in [0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Αποδεικνύεται έτσι η ύπαρξη της ρίζας. Η μοναδικότητα της ρίζας έπεται από τη μονοτονία της f.

Δ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon_{x_0}): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Το x_0 είναι ρίζα της f, οπότε αυτή η εξίσωση γράφεται

$$(\varepsilon_{x_0}): y = f'(x_0)(x - x_0).$$

Όπως είπαμε και στο Ερώτημα Δ3, η C_f βρίσκεται πάνω από τις εφαπτομένες της με εξαίρεση τα σημεία επαφής τους. Ισχύει λοιπόν $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και ειδικότερα για κάθε $x \in [0, x_0]$. Εφόσον λοιπόν αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα μόνο για $x = x_0$ και όχι σε ολόκληρο το $[0, x_0]$, η ανισότητα των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων θα είναι γνήσια (χωρίς ισότητα):

Δείτε το θεώρημα 3 στη σελ. 214 του σχολικού βιβλίου.

$$\int_0^{x_0} f(x)dx > \int_0^{x_0} f'(x_0)(x - x_0)dx = f'(x_0)\int_0^{x_0}(x - x_0)dx$$

$$= f'(x_0)\left[\frac{x^2}{2} - x \cdot x_0\right]_0^{x_0} = -\frac{x_0^2 f'(x_0)}{2}. \quad (2)$$

Καθώς όμως $x_0 > 0$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα (από την κυρτότητα της f), προκύπτει ότι $f'(x_0) > f'(0) = 1$. Έπεται λοιπόν από τη (2) ότι

$$\boxed{\int_0^{x_0} f(x)dx > -\frac{x_0^2}{2}, \text{ όπως θέλαμε.}}$$