Διαγώνισμα 4.24

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 133.

Α2. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 51.

Α3. **i.** Ο ισχυρισμός είναι σωστός.

ii. Έστω τυχόν σημείο x_0 στο πεδίο ορισμού της f (δηλαδή $x_0 \neq 0$). Ισχύει τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0),$$

άρα η f είναι συνεχής στο x_0. Το x_0 ήταν τυχόν σημείο, άρα η f είναι συνεχής σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.

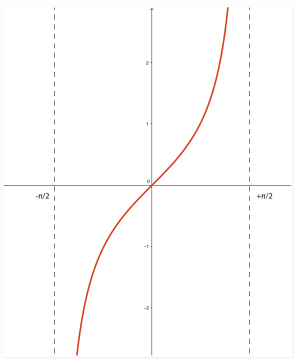
Αυτό το ερώτημα μας διδάσκει ότι, για να είναι μια συνάρτηση συνεχής, δεν χρειάζεται απαραίτητα η γραφική της παράσταση να είναι μια «συνεχόμενη γραμμή». Εδώ η γραφική παράσταση «δια κόπτεται» στο $x=0$, αλλά αυτό δεν έχει σημασία, καθώς το $x=0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

Α4. Θεωρία – σχολικό βιβλίο, σελ. 164.

Α5. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Λ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Για να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Ε.Τ., πρέπει η συνάρτηση να είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Αν, όπως εδώ, είναι ορισμένη σε ανοιχτό διάστημα, δεν παίρνει υποχρεωτικά μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Θεωρούμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση $f(x) = εφx$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αυτή είναι συνεχής, ως βασική τριγωνομετρική συνάρτηση, όμως δεν έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, καθώς



$$\lim_{x\to -\pi/2} εφx = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to \pi/2} εφx = +\infty.$$

ii. Για να είναι σωστός ο ισχυρισμός, θα έπρεπε να προσθέσουμε την επιπλέον υπόθεση ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Χωρίς αυτήν την υπόθεση, το δοσμένο ολοκλήρωμα δεν είναι απαραίτητα θετικό (πάρτε, για παράδειγμα, τη σταθερή συνάρτηση $f(x)=-1$).

iii. Η αντίστροφη συνεπαγωγή θα ήταν σωστή. Αν δηλαδή η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο στο $\xi\in(\alpha,\beta)$, τότε ισχύει υποχρεωτικά ότι $f'(\xi)=0$. Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος του Fermat. Η δοσμένη κατεύθυνση της συνεπαγωγής όμως δεν ισχύει. Αυτό το έχουμε εξηγήσει και σε προηγούμενα διαγωνίσματα (π.χ. στο 4.23), όπου χρησιμοποιήσαμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3$ και το σημείο $\xi=0$ σαν αντιπαράδειγμα.

ΘΕΜΑ Β

Λύση

B1. Η f ορίζεται αν και μόνο αν $\frac{x^2}{x+1}>0$. Το πρόσημο αυτού του πηλίκου φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-1		0		$+\infty$
$1-e^{2x}$	$+$		$+$	0	$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-$		$+$	0	$+$	

Βλέπουμε λοιπόν ότι το πηλίκο $\frac{x^2}{x+1}$ είναι θετικό για $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $A_f=(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Στο πεδίο ορισμού της, η f είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για να υπολογίσουμε ευκολότερα την παράγωγό της, μπορούμε να γράψουμε την f στη μορφή

$$f(x)=\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)=\ln(x^2)-\ln(x+1)=2\ln|x|-\ln(x+1).$$

Αυτό δεν παραβιάζει κάποιον περιορισμό, αφού οι ποσότητες $|x|$ και $x+1$ είναι από κοινού θετικές στο σύνολο $A_f=(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Η παράγωγος της f είναι ίση με

$$f'(x)=\left(2\ln|x|-\ln(x+1)\right)'=\frac{2}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x(x+1)}-\frac{x}{x(x+1)}=\frac{x+2}{x(x+1)},$$

όπου στο πρώτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$. Από τους παράγοντες που εμφανίζονται στην f', οι $x+1$ και $x+2$ είναι θετικοί για κάθε $x \in A_f = (-1,0) \cup (0,+\infty)$. Επομένως, το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από τον παράγοντα x. Προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	-1	0	$+\infty$
$1-e^{2x}$	$-$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0)$.
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

B2. Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τις εικόνες $f((-1,0))$ και $f((0,+\infty))$ με βάση τη μονοτονία της f. Εφόσον $f \searrow (-1,0)$ και εφόσον η f είναι συνεχής σε αυτό το διάστημα, έπεται ότι

$$f((-1,0)) = \left(\lim_{x\to 0^-} f(x), \lim_{x\to -1^+} f(x)\right). \quad (1)$$

Είδαμε παραπάνω ότι $f(x) = 2\ln|x| - \ln(x+1)$ για κάθε $x \in A_f$. Επομένως,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(2\ln|x| - \ln(x+1)\right) = 2\cdot(-\infty) - \ln 1 = -\infty, \quad (2)$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to 0^-} 2\ln|x| \overset{u=|x|}{=} \lim_{u\to 0^+} 2\ln u = -\infty.$$

Υπολογίζουμε τώρα το άλλο όριο που εμφανίζεται στη σχέση (1). Ισχύει

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \left(2\ln|x| - \ln(x+1)\right) = 2\ln|-1| - (-\infty) = +\infty, \quad (3)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1) \overset{u=x+1}{=} \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty.$$

Συμπεραίνουμε από τις σχέσεις (1), (2), (3), ότι $f((-1,0)) = \mathbb{R}$. Ήδη από αυτήν την ισότητα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το

$\mathbb{R}$, ακόμη και χωρίς να βρούμε το $f((0,+\infty))$. Ο λόγος είναι ότι, όποιο και να είναι το $f((0,+\infty))$, η ένωσή του με το $f((-1,0))=\mathbb{R}$ αποκλείεται να μας δώσει κάτι διαφορετικό από το ίδιο το $\mathbb{R}$. Παρ' όλα αυτά όμως, θα προσδιορίσουμε το $f((0,+\infty))$, καθώς είναι χρήσιμο για το επόμενο ερώτημα. Καθώς $f\nearrow(0,+\infty)$, έπεται ότι

$$f((0,+\infty))=\left(\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right). \quad (4)$$

Ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2\ln|x|-\ln(x+1)\right)\overset{x>0}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(2\ln x-\ln(x+1)\right)$$

$$=2\cdot(-\infty)-\ln 1=-\infty. \quad (5)$$

Για να υπολογίσουμε το όριο στο $+\infty$, βολεύει καλύτερα να γράψουμε την f στην αρχική της μορφή. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty,$$

οπότε, θέτοντας $u=x^2/(x+1)$, παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)=\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty. \quad (1)$$

Πλέον, έπεται από τις σχέσεις (4), (5), (6) ότι $\boxed{f((0,+\infty))=\mathbb{R}.}$

B3. Θεωρούμε τυχόντα πραγματικό αριθμό α. Εφόσον $\alpha\in\mathbb{R}=f((-1,0))$, υπάρχει $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\alpha$. Μάλιστα, το x_1 είναι το μοναδικό σημείο στο $(-1,0)$ με αυτήν την ιδιότητα, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0)$.
Ομοίως, ισχύει $\alpha\in\mathbb{R}=f((0,+\infty))$, άρα υπάρχει $x_2\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=\alpha$. Το x_2 είναι επίσης το μοναδικό σημείο στο $(0,+\infty)$ με αυτήν την ιδιότητα, καθώς $f\nearrow(0,+\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $f(x_1)=f(x_2)$ και, εφόσον $x_1<0<x_2$, το ζητούμενο έχει αποδειχτεί.

Μάλιστα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι δεν υπάρχει απλώς ένα, αλλά άπειρα ζεύγη (x_1,x_2), ένα για κάθε τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$.

B4. Στο Ερώτημα Β1 και ειδικότερα στον πίνακα μονοτονίας που σχεδιάσαμε, είδαμε ότι η f' δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $A_f=(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Επομένως, αποκλείεται να υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=0$.
Ο λόγος που, παρότι $f(x_1)=f(x_2)$, δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος

Rolle (δηλαδή δεν μηδενίζεται η παράγωγος μεταξύ των x_1, x_2) είναι ότι δεν ικανοποιούνται οι άλλες δύο υποθέσεις του θεωρήματος. Συγκεκριμένα, είδαμε στο Β3 ότι $x_1 < 0 < x_2$. Για να ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, θα έπρεπε η f να είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2), άρα και στο σημείο $x_0 = 0$. Κάτι τέτοιο όμως δεν αληθεύει, αφού η f δεν ορίζεται καν σε αυτό το σημείο.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, απ' όπου θα προκύψει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Τα δύο μέλη της δοσμένης ισότητας είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις (εφόσον η f έχει υποτεθεί παραγωγίσιμη). Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε παραγώγους και στα δύο μέλη, απ' όπου θα προκύψει ότι

$$\left(f^3(x) - 2f^2(x) + 2f(x)\right)' = \left(e^x - 5\right)' \Rightarrow f'(x)\left(3f^2(x) - 4f(x) + 2\right) = e^x.$$

Στην παραπάνω ισότητα παραλείψαμε ένα βήμα και βγάλαμε κατευθείαν κοινό παράγοντα το $f'(x)$. Το δεύτερο μέλος της ισότητας είναι θετικός αριθμός. Επίσης, θυμηθείτε ότι θέλουμε να αποδείξουμε πως $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$3f^2(x) - 4f(x) + 2 > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το τριώνυμο $3y^2 - 4y + 2$. Η διακρίνουσά του είναι ίση με

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8 < 0$$

και ο συντελεστής του x^2 είναι ίσος με $3 > 0$. Από τη θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου (Άλγεβρα Α΄ Λυκείου), έπεται ότι $3y^2 - 4y + 2 > 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Αντικαθιστώντας $y = f(x)$, προκύπτει ακριβώς αυτό που θέλουμε, δηλαδή ότι $3f^2(x) - 4f(x) + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από αυτήν την παρατήρηση και από την ισότητα

$$f'(x)\left(3f^2(x) - 4f(x) + 2\right) = e^x, \qquad (1)$$

έπεται ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Για $x = \ln 5$, η αρχική ισότητα γίνεται

$$f^3(\ln 5) - 2f^2(\ln 5) + 2f(\ln 5) = 0 \Leftrightarrow f(\ln 5)\left(f^2(\ln 5) - 2f(\ln 5) + 2\right) = 0.$$

Ο δεύτερος παράγοντας όμως (η παρένθεση) γράφεται στη μορφή

$$f^2(\ln 5)-2f(\ln 5)+1+1=\left(f(\ln 5)-1\right)^2+1>0,$$

άρα έπεται από την παραπάνω ισότητα ότι ισχύει αναγκαστικά $f(\ln 5)=0$. Αντικαθιστώντας $x=\ln 5$ στη σχέση (1), προκύπτει ότι

$$f'(\ln 5)\left(3f^2(\ln 5)-4f(\ln 5)+2\right)=5 \overset{f(\ln 5)=0}{\Leftrightarrow} f'(\ln 5)\cdot 2=5 \Leftrightarrow f'(\ln 5)=5/2.$$

Συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\left(\ln 5, f(\ln 5)\right)$ είναι η

$$\boxed{(\varepsilon): y-f(\ln 5)=f'(\ln 5)(x-\ln 5) \Leftrightarrow y=\frac{5x}{2}-\frac{5\ln 5}{2}.}$$

Γ3. Βγάζοντας κοινό παράγοντα το $f(x)$, η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$f(x)\left(f^2(x)-2f(x)+2\right)=e^x-5$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Όπως παρατηρήσαμε και παραπάνω, ο παράγοντας μέσα στην παρένθεση γράφεται στη μορφή

$$\left(f^2(x)-2f(x)+1\right)+1=\left(f(x)-1\right)^2+1>0,$$

άρα προκύπτει από την παραπάνω ισότητα ότι το πρόσημο του $f(x)$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του όρου e^x-5. Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- $e^x-5>0 \Leftrightarrow e^x>5 \Leftrightarrow x>\ln 5.$
- $e^x-5<0 \Leftrightarrow e^x<5 \Leftrightarrow x<\ln 5.$
- $e^x-5=0 \Leftrightarrow e^x=5 \Leftrightarrow x=\ln 5.$

Επομένως, το πρόσημο του $f(x)$ φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		$\ln 5$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Γ4. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$f^3(x)-2f^2(x)+2f(x)<\left(f(x)+1\right)^3. \qquad (2)$$

Πράγματι, αναπτύσσοντας τον κύβο στο δεύτερο μέλος, η ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$f^3(x)-2f^2(x)+2f(x)<f^3(x)+3f^2(x)+3f(x)+1$$

και κάνοντας τις απλοποιήσεις καταλήγουμε στην ανισότητα

$$5f^2(x)+f(x)+1>0,$$

η οποία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διότι το τριώνυμο $5y^2+y+1$ έχει αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου. Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη (2) και από τη σχέση που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$(f(x)+1)^3>e^x-5.$$

Για $x>\ln5$ ισχύει $f(x)>0$ (Γ3) και $e^x-5>0$, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε κυβικές ρίζες. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$f(x)+1>\sqrt[3]{e^x-5}\Rightarrow\frac{f(x)}{x}>\frac{\sqrt[3]{e^x-5}}{x}-\frac{1}{x}\qquad(3)$$

για κάθε $x>\ln5$. Καθώς $x>\ln5>0$, παρατηρούμε ότι

$$\frac{\sqrt[3]{e^x-5}}{x}=\sqrt[3]{\frac{e^x-5}{x^3}}.$$

Το όριο της υπόρριζης ποσότητας, καθώς $x\to+\infty$, μπορούμε να το υπολογίσουμε με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-5}{x^3}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}\overset{+\infty/+\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty.$$

Θέτοντας λοιπόν $u=\dfrac{e^x-5}{x^3}$, προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{e^x-5}{x^3}}=\lim_{u\to+\infty}\sqrt[3]{u}=+\infty,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{e^x-5}{x^3}}-\frac{1}{x}\right)=(+\infty)-0=+\infty.$$

Έπεται άμεσα πλέον από τη σχέση (3) ότι $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\text{, όπως θέλαμε.}}$

Γ5. (Bonus) Θα θέλαμε να παραγωγίσουμε τη σχέση που μας έχει δοθεί, ώστε να πάρουμε περισσότερες πληροφορίες για το πρόσημο της f'. Αυτό όμως είναι κάτι που δεν μπορούμε να κάνουμε, καθώς δεν μας έχει δοθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Θα δουλέψουμε λοιπόν με την κλασική μέθοδο των x_1, x_2. Πριν το κάνουμε αυτό όμως, πρέπει να κάνουμε μια παρατήρηση που είναι απαραίτητη για τη συνέχεια. Μπορούμε, για την ακρίβεια, να δείξουμε ότι η f είναι «1-1». Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Ισχύουν τότε τα εξής:

- $f^3(x_1) = f^3(x_2)$.
- $-2f^2(x_1) = -2f^2(x_2)$.
- $2f(x_1) = 2f(x_2)$.

Προσθέτοντας αυτές τις τρεις σχέσεις κατά μέλη και χρησιμοποιώντας τη σχέση που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση, παίρνουμε

$$f^3(x_1) - 2f^2(x_1) + 2f(x_2) = f^3(x_2) - 2f^2(x_2) + 2f(x_2) \Leftrightarrow e^{x_1} - 5 = e^{x_2} - 5$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Έπεται λοιπόν ότι η f είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $f(\mathbb{R}) = (-1, +\infty)$. Για να προσδιορίσουμε την αντίστροφή της, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = y$ ως προς x. Για να το κάνουμε αυτό, αντικαθιστούμε το $f(x)$ με y στην ισότητα που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση. Παίρνουμε τότε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $y > -1$

$$y^3 - 2y^2 + 2y = e^x - 5 \Leftrightarrow e^x = y^3 - 2y^2 + 2y + 5$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(y^3 - 2y^2 + 2y + 5\right),$$

οπότε $f^{-1}(x) = \ln\left(x^3 - 2x^2 + 2x + 5\right)$ για $x > -1$. Αυτή η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ισχύει

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 + 2x + 5} \cdot \left(x^3 - 2x^2 + 2x + 5\right)' = \frac{3x^2 - 4x + 2}{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε $x \in A_{f^{-1}}$, καθώς αυτό είναι απαραίτητο για να ορίζεται η f^{-1} (κοιτάξτε, π.χ., τον τύπο της). Ο αριθμητής είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -8 < 0,$$

και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με 3. Επομένως, ο αριθμητής είναι θετικός για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα και για κάθε $x \in A_{f^{-1}}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\left(f^{-1}\right)'(x) > 0$ για κάθε $x \in A_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (-1, +\infty)$, οπότε η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Δεδομένου ότι $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A_f = \mathbb{R}$, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση $x_1 < x_2$ ισοδύναμα ως

$$f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)).$$

Εφόσον η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, η τελευταία ισότητα συνεπάγεται ότι $f(x_1) < f(x_2)$, απ' όπου έπεται τελικά ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Σύμφωνα με την υπόθεση, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{e^{f(x)} - e^{-x}}{e^{f(x)}} - 1 &\Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = e^{f(x)} - e^{-x} - e^{f(x)} \\ &\Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' = \left(e^{-x}\right)' \\ &\Leftrightarrow e^{f(x)} = e^{-x} + c, \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. (ο c είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός). Για $x = 0$ προκύπτει ότι

$$e^{f(0)} = e^{-0} + c \Leftrightarrow e^{\ln 2} = 1 + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1,$$

άρα

$$e^{f(x)} = e^{-x} + 1 \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(e^{-x} + 1\right).$$

Μένουν μόνο μερικές απλοποιήσεις:

$$\begin{aligned} f(x) = \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{e^x}\right) &= \ln\left(e^x + 1\right) - \ln e^x \\ &\boxed{= \ln\left(e^x + 1\right) - x, \text{ όπως θέλαμε.}} \end{aligned}$$

Δ2. Γι' αυτό το ερώτημα υπάρχουν διάφοροι τρόποι λύσης, ένας από τους οποίους προκύπτει μέσω της γνωστής ανισότητας $\ln x \le x - 1$. Παρ' όλα αυτά, καθώς έχουμε χρησιμοποιήσει αυτήν την ανισότητα αρκετές φορές σε προηγούμενα θέματα, θα δείξουμε εδώ έναν άλλον τρόπο επίλυσης, με τη χρήση του Θ.Μ.Τ.

Συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι η f έχει τη μορφή

$$\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^x\right),$$

που μας θυμίζει τη διαφορά $f(\beta)-f(\alpha)$, η οποία εμφανίζεται στο συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. Θεωρούμε λοιπόν τυχόν $x>0$, το οποίο θα θεωρήσουμε στο εξής ως σταθερό, τη συνάρτηση $h(t)=\ln t$ (για $t>0$) και το διάστημα $\Delta_x=\left[e^x,e^x+1\right]\subseteq(0,+\infty)$. Η h είναι η λογαριθμική συνάρτηση, οπότε είναι προφανώς συνεχής στο Δ_x και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του. Επομένως, προκύπτει από το Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχει $\xi_x\in\left(e^x,e^x+1\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi_x)=\frac{h\left(e^x+1\right)-h\left(e^x\right)}{\left(e^x+1\right)-e^x}=\frac{\ln\left(e^x+1\right)-\ln e^x}{1}=f(x). \quad (1)$$

Ισχύει όμως $h'(t)=\frac{1}{t}$, άρα $h'(\xi_x)=\frac{1}{\xi_x}$. Εφόσον $0<e^x<\xi_x<e^x+1$, προκύπτει (με αντιστροφή της τελευταίας ανισότητας) ότι

$$\frac{1}{e^x}>\frac{1}{\xi_x}>\frac{1}{e^x+1}\Rightarrow\frac{1}{e^x}>h'(\xi_x)>\frac{1}{e^x+1}\ \boxed{\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{1}{e^x}>f(x)>\frac{1}{e^x+1},}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

Δ3. Σύμφωνα με το Ερώτημα Δ2, ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι

$$\frac{1}{e^x}>f(x)>\frac{1}{e^x+1}. \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας $\ln x$ στη θέση του x, προκύπτει ότι

$$\frac{1}{e^{\ln x}}>f(\ln x)>\frac{1}{e^{\ln x}+1}\Rightarrow\frac{1}{x}>f(\ln x)>\frac{1}{x+1},$$

για κάθε $x>0$. Μπορούμε να αντιστρέψουμε αυτήν την ανισότητα, καθώς όλοι οι όροι της είναι θετικοί. Παίρνουμε τότε

$$x<\frac{1}{f(\ln x)}<x+1\Leftrightarrow x+1<\frac{1}{f(\ln x)}<x \quad (3)$$

για κάθε $x>0$. Όλοι οι όροι στις εξισώσεις (2) και (3) είναι θετικοί, οπότε μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη. Προκύπτει τότε η σχέση

$$\frac{x+1}{e^x} > \frac{f(x)}{f(\ln x)} > \frac{x}{e^x+1}, \qquad (4)$$

η οποία μας παραπέμπει στο κριτήριο παρεμβολής. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^x} \overset{+\infty/+\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x+1} \overset{+\infty/+\infty}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0,$$

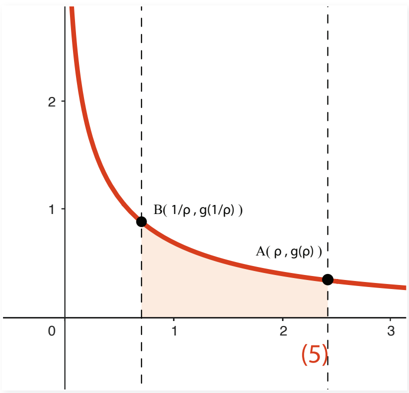
όπου χρησιμοποιήσαμε και στις δύο περιπτώσεις τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $+\infty/+\infty$. Έπεται λοιπόν από τη σχέση (4) και από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(\ln x)}=0.}$$

Σημείωση:

Θα μπορούσαμε να είχαμε γλιτώσει λίγο κόπο, αν παρατηρούσαμε ότι $\frac{x}{e^x+1}>0$ και χρησιμοποιούσαμε το 0 στο δεξί μέλος της σχέσης (4). Έτσι, δεν θα χρειαζόταν να υπολογίσουμε δύο όρια, αλλά μόνο το πρώτο, καθώς το δεξιό μέλος θα ήταν ταυτοτικά ίσο με μηδέν.

Δ4. Όπως είδαμε στο Δ1, ισχύει $g(x)=\ln(x+1)-\ln x$ για κάθε $x>0$. Εφόσον η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, έπεται ότι $g(x)>0$ για κάθε $x>0$. Επομένως, το εμβαδόν του χωρίου Ω_ρ, το οποίο φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, είναι ίσο με



$$E(\rho)=\int_{1/\rho}^{\rho} g(x)dx=\int_{1/\rho}^{\rho}\left(\ln(x+1)-\ln x\right)dx$$

$$=\int_{1/\rho}^{\rho}\ln(x+1)dx-\int_{1/\rho}^{\rho}\ln x dx.$$

Υπολογίζουμε αυτούς τους δύο όρους με παραγοντική ολοκλήρωση. Ισχύει

$$\begin{aligned}\int_{1/\rho}^{\rho}\ln(x+1)dx &= \int_{1/\rho}^{\rho}(x+1)'\ln(x+1)dx\\ &= \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_{1/\rho}^{\rho}-\int_{1/\rho}^{\rho}(x+1)\left(\ln(x+1)\right)'dx\\ &= \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_{1/\rho}^{\rho}-\int_{1/\rho}^{\rho}1dx\\ &= (\rho+1)\ln(\rho+1)-\left(\frac{1}{\rho}+1\right)\ln\left(\frac{1}{\rho}+1\right)-\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_{1/\rho}^{\rho}\ln x dx = \int_{1/\rho}^{\rho}(x)'\ln x dx &= \left[x\ln x\right]_{1/\rho}^{\rho}-\int_{1/\rho}^{\rho}x(\ln x)'dx\\ &= \rho\ln\rho-\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)-\int_{1/\rho}^{\rho}1dx\\ &= \rho\ln\rho-\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)-\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right).\end{aligned}$$

Προκύπτει λοιπόν από τη σχέση (5) ότι

$$\begin{aligned}E(\rho) &= (\rho+1)\ln(\rho+1)-\left(\frac{1}{\rho}+1\right)\ln\left(\frac{1}{\rho}+1\right)-\rho\ln\rho+\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{1}{\rho}\right)\\ &= (\rho+1)\ln(\rho+1)-\frac{\rho+1}{\rho}\left(\ln(\rho+1)-\ln\rho\right)-\rho\ln\rho-\frac{1}{\rho}\ln\rho\\ &= \left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\ln(\rho+1)-(\rho-1)\ln\rho. \quad (6)\end{aligned}$$

Θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε το όριο της τελευταίας ποσότητας, καθώς $\rho\to+\infty$. Ίσως να μπορούσαμε να υπολογίσουμε το όριο κατευθείαν, αλλά σίγουρα θα χρειάζονταν αρκετοί υπολογισμοί, καθώς εμφανίζεται η απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Για να καταλήξουμε στο ζητούμενο με πιο απλό τρόπο, θα χρησιμοποιήσουμε ανισότητες.

Καθώς $0<\ln\rho<\ln(\rho+1)$, έπεται από την (6) ότι

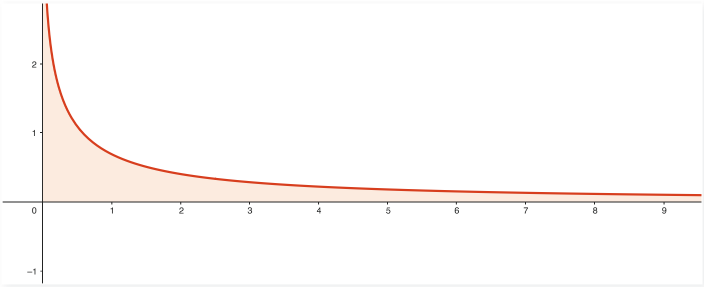
$$E(\rho)>\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\ln(\rho+1)-(\rho-1)\ln(\rho+1)=\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\ln(\rho+1).$$

Εδώ απλώς αντικαθιστούμε το lnρ με ln(ρ+1). Εφόσον αφαιρούμε πλέον μια μεγαλύτερη ποσότητα, η παράσταση «μικραίνει».

Ισχύει ότι $\lim\limits_{\rho\to+\infty}\left[(1-1/\rho)\ln(\rho+1)\right]=(1-0)\cdot(+\infty)=+\infty$, άρα, αφού το $E(\rho)$ είναι ακόμη μεγαλύτερο από την ποσότητα μέσα στο όριο, έπεται τελικά ότι $\lim\limits_{\rho\to+\infty}E(\rho)=+\infty$, όπως θέλαμε.

Σημείωση:

Το τελευταίο αποτέλεσμα μπορεί να ερμηνευτεί γεωμετρικά με έναν ενδιαφέροντα τρόπο. Καθώς $\rho\to+\infty$, το άνω όριο ολοκλήρωσης τείνει στο $+\infty$ και το κάτω όριο, που είναι το $1/\rho$, τείνει στο μηδέν. Επομένως, το όριο του ολοκληρώματος $E(\rho)=\int_{1/\rho}^{\rho}g(x)dx$ αναπαριστά το εμβαδόν του «άπειρου» χωρίου που βρίσκεται μεταξύ της C_g, του άξονα $x'x$ και του άξονα $y'y$, και το οποίο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το αποτέλεσμα του παραπάνω ερωτήματος θα σήμαινε ότι το παραπάνω γραμμοσκιασμένο χωρίο έχει «άπειρο» εμβαδόν. Φυσικά, όλα αυτά δεν αποτελούν μέρος της εξεταστέας ύλης, αλλά έχει ενδιαφέρον να σκεφτεί κανείς πώς θα μπορούσαμε να μελετήσουμε εμβαδά «άπειρων» χωρίων. Αυτό είναι κάτι που συνήθως αναλύεται στα μαθήματα Μαθηματικών πολλών πανεπιστημιακών τμημάτων.

Δ5. (Bonus) Είδαμε παραπάνω ότι $f(x)=\ln\left(e^{-x}+1\right)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$f(\ln x)=\ln\left(e^{-\ln x}+1\right)=\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

για κάθε $x>0$. Καθώς

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e^{-x}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)=\ln(0+1)=0,$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Παίρνουμε λοιπόν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(\ln x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{-x}+1\right)}{\ln(1/x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{x}+1\right)-x}{\ln(x+1)-\ln x}$$

$$\overset{0/0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}/\left(e^{x}+1\right)-1}{1/(x+1)-1/x}$$

Πριν εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital, γράφουμε ξανά την f στην άλλη της μορφή, καθώς έτσι είναι πιο εύκολος ο υπολογισμός των παραγώγων.

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/\left(e^{x}+1\right)}{-1/\left[x(x+1)\right]}=-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{e^{x}+1}\right)$$

$$\overset{+\infty/+\infty}{=}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{e^{x}}\overset{+\infty/+\infty}{=}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x}}=0.$$