Διαγώνισμα 4.25

ΘΕΜΑ Α
Λύση

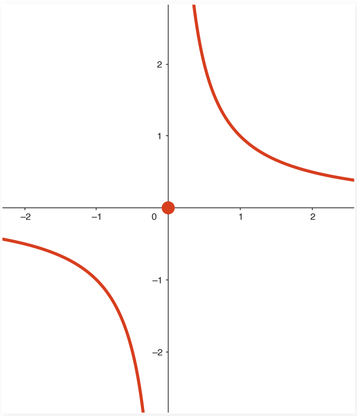
Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 106.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 77.

Α3. i. Ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος (Λ).

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$,

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το σημείο $O(0,0)$ είναι μέρος της C_f, καθώς αναπαριστά τον κάτω κλάδο της f. Αρχικά, είναι εύκολο να δούμε γραφικά ότι η f είναι «1-1», καθώς καμία οριζόντια ευθεία δεν τέμνει τη γραφική της παράσταση παραπάνω από μία φορά. Αν θέλουμε να επαληθεύσουμε αυτήν την παρατήρηση και αλγεβρικά, μπορούμε να θεωρήσουμε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Σύμφωνα με τον ορισμό της «1-1» συνάρτησης, πρέπει να δείξουμε ότι $x_1=x_2$. Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:



- Αν $x_1=0$, τότε $f(x_1)=0$, οπότε έπεται από τη σχέση $f(x_1)=f(x_2)$ ότι $f(x_2)=0$. Η f όμως μηδενίζεται μόνο στη θέση $x=0$, οπότε έπεται ότι $x_2=0$. Άρα $x_1=x_2$.

- Αν $x_1\neq 0$, τότε $f(x_1)=\frac{1}{x_1}$, άρα $f(x_2)=f(x_1)\neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι $x_2=0$, καθώς σε εκείνη την περίπτωση θα ίσχυε $f(x_2)=f(0)=0$, άτοπο. Αφού $x_2\neq 0$, έπεται ότι $f(x_2)=\frac{1}{x_2}$. Η ισότητα $f(x_1)=f(x_2)$ γράφεται λοιπόν ισοδύναμα στη μορφή $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}$, η οποία συνεπάγεται ότι $x_1=x_2$.

Συμπεραίνουμε ότι, σε κάθε περίπτωση, η σχέση $f(x_1)=f(x_2)$ συνεπάγεται ότι $x_1=x_2$. Άρα η f είναι «1-1». Είναι εύκολο να δούμε όμως ότι η f είναι γνησίως μονότονη. Για παράδειγμα, δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα, καθώς $1<2$, όμως

$$f(1)=1>\frac{1}{2}=f(2).$$

Ομοίως, δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα, αφού για παράδειγμα $-1<0$, όμως,

$$f(-1)=-1<0=f(0).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος. **Προσοχή:** Ο αντίστροφος ισχυρισμός θα ήταν σωστός. Αν δηλαδή μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και «1-1».

Α4. i) Σ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)** Σ, **v)** Σ

Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Δείτε τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης στη σελ. 35 του σχολικού βιβλίου. Το γεγονός ότι η f είναι «1-1» είναι βασική υπόθεση για να ορίζεται η αντίστροφη.

ii. Δείτε την τελευταία παρατήρηση στη σελ. 212 του σχολικού βιβλίου.

iii. Υπάρχει μια παρανόηση πολλές φορές μεταξύ των μαθητών, ότι η ανισότητα $f(x)\leq 3$ σημαίνει πως πρέπει απαραίτητα η f να λαμβάνει την τιμή 3. Αυτό δεν αληθεύει. Η σχέση «μικρότερο ή ίσο» ικανοποιείται με οποιαδήποτε από τις δύο καταστάσεις «μικρότερο» / «ίσο», εξάλλου αυτή είναι η σημασία του διαζευκτικού «ή». Επομένως, η σχέση $f(x)\leq 3$ δεν διασφαλίζει ότι η f παίρνει την τιμή 3. Μπορεί στην πραγματικότητα η f να είναι γνησίως μικρότερη του 3. Για παράδειγμα, η σταθερή συνάρτηση $f(x)=2$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x)\leq 3$ (ικανοποιεί την κατάσταση «μικρότερο» –όπως είπαμε, δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιεί και την κατάσταση «ίσο», αλλά αρκεί μία από τις δύο), όμως η μέγιστη τιμή της είναι προφανώς το 2.

iv. Ας υποθέσουμε ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος του $P(x)$ είναι το $\alpha_\nu x^\nu$ και ο μεγιστοβάθμιος όρος του $Q(x)$ είναι το $\beta_\mu x^\mu$, όπου μ,ν είναι μη αρνητικοί θετικοί ακέραιοι. Ισχύει εξ ορισμού $\alpha_\nu,\beta_\mu\neq 0$. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι οι μ,ν, που είναι οι βαθμοί των δύο πολυωνύμων, είναι διαφορετικοί μεταξύ τους. Από την παρατήρηση στη σελ. 67 του σχολικού βιβλίου έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}\right)=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\nu-\mu}\right).$$

v. Αν $\nu > \mu$, τότε αυτό το όριο ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$, ανάλογα με το πρόσημο του πηλίκου α_ν / β_μ. Από την άλλη, αν $\nu < \mu$, αυτό το όριο ισούται με μηδέν. Ο ισχυρισμός είναι λοιπόν αληθής.

vi. Το αποτέλεσμα είναι άμεσο με αντικατάσταση της τιμής $x = 0$ στη δοσμένη σχέση.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Ο λογαριθμικός όρος ορίζεται όταν $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, ενώ το κλάσμα ορίζεται για $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Συνδυάζοντας αυτούς τους δύο περιορισμούς, προκύπτει ότι $A_f = (-1, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x > -1$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}(x+1)' - \frac{(x^2)'(x+1) - x^2(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x + 1 - x^2 - 2x}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - x + 1}{(x+1)^2}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός, άρα όλα εξαρτώνται από το πρόσημο του αριθμητή. Ο αριθμητής είναι ένα τριώνυμο με διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 5$$

και ρίζες

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι αρνητικός, οπότε το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Σημειώνουμε όμως ότι $x_1 < -1$. Πράγματι, ισχύει $\sqrt{5} > 1$, άρα

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < \frac{-1-1}{2} = -1.$$

Επομένως, αυτή η ρίζα δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Για τη δεύτερη ρίζα δεν υπάρχει πρόβλημα, καθώς μπορούμε πολύ εύκολα να δούμε ότι είναι θετική. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, σχεδιάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας για την f:

x	-1 $\quad\quad$ x_2	$+\infty$
$-x^2-x+1$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,x_2)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(x_2,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) μέγιστο στη θέση $x = x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Πράγματι, αν $x \in (-1,x_2]$, τότε $f(x) \leq f(x_2)$, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,x_2]$, ενώ, αν $x \in [x_2,+\infty)$, τότε $f(x) \leq f(x_2)$, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_2,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x > -1$ έχουμε $f(x) \leq f(x_2)$.

B2. Όπως είδαμε παραπάνω, η f' είναι ρητή, άρα είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Η παράγωγός της είναι ίση με

$$f''(x) = \left(\frac{-x^2-x+1}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(-x^2-x+1)'(x+1)^2 - (-x^2-x+1)\left[(x+1)^2\right]'}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(-2x-1)(x+1)^2 + 2(x+1)(x^2+x-1)}{(x+1)^4} = \frac{-(2x+1)(x+1)+2(x^2+x-1)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{-2x^2-2x-x-1+2x^2+2x-2}{(x+1)\wedge 3} = -\frac{(x+3)}{(x+1)^3},$$

όπου παραλείψαμε κάποιους ενδιάμεσους υπολογισμούς χάριν συντομίας. Εφόσον $A_f = (-1,+\infty)$, τόσο ο αριθμητής, όσο και ο παρονομαστής, είναι θετικοί για κάθε $x \in A_f$. Έπεται λοιπόν ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x > -1$, άρα η f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

B3. Έχουμε να αποδείξουμε μια ανισότητα, έχοντας ήδη αποδείξει ότι η f είναι κοίλη. Αυτό μας παραπέμπει σε εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f. Πιο συγκεκριμένα, γνωρίζουμε ότι η C_f βρίσκεται «κάτω» από τις εφαπτόμενές της, με εξαίρεση τα σημεία επαφής μαζί τους.
Πρέπει να επιλέξουμε όμως κάποια συγκεκριμένη εφαπτομένη. Θα επιλέξουμε αυτήν στη θέση $x = 0$. Υπάρχει κάποια εξήγηση γι' αυτήν την επιλογή; Γιατί να μη διαλέξουμε κάποια άλλη τιμή του x; Ο λόγος είναι ότι παρατηρούμε πως $f(0) = 0$. Αντίθετα, για κάθε άλλη τιμή του x, εμφανίζονται εκθετικοί ή λογαριθμικοί παράγοντες στην τιμή $f(x)$ [κάτι που δεν είναι ιδανικό για εμάς, καθώς θέλουμε να δείξουμε ότι $f(x) \le x$, και το δεξιό μέλος δεν περιέχει καθόλου εκθετικούς-λογαριθμικούς παράγοντες]. Φυσικά, αν βρεθείτε σε μια αντίστοιχη περίσταση και η πρώτη σας επιλογή δεν δουλέψει, μπορείτε να δοκιμάσετε και άλλες τιμές του x.

Από την έκφραση για την f' που έχουμε βρει στο Ερώτημα B1, προκύπτει ότι $f'(0) = 1$. Σε συνδυασμό με την ισότητα $f(0) = 0$, προκύπτει ότι η εφαπτομένη της C_f στη θέση $x = 0$ είναι η

$$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x.$$

Εφόσον η C_f βρίσκεται «κάτω» από αυτήν (με εξαίρεση το σημείο επαφής), έπεται ότι $f(x) \le x$ για κάθε $x \in A_f$, και μάλιστα η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

B4. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $A_g = \mathbb{R}$. Το πεδίο ορισμού της ϕ είναι το σύνολο

$$A_\phi = \{x \in A_g : g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) > -1\}.$$

Πρέπει επομένως να λύσουμε την ανίσωση $g(x) > -1$. Αυτή γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$e^x - 1 > -1 \Leftrightarrow e^x > 0,$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $A_\phi = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\phi(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x - 1)$$

$$= \ln(e^x - 1 + 1) - \frac{(e^x - 1)^2}{e^x - 1 + 1} \boxed{= x - \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x}.}$$

Β5. Ισχύει

$$\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x}=\frac{e^{2x}}{e^x}-\frac{e^x}{e^x}+\frac{1}{e^x}=e^x-1+e^{-x},$$

άρα

$$\int_0^{\ln 2}\phi(x)dx=\int_0^{\ln 2}\left(x-\frac{e^{2x}-e^x+1}{e^x}\right)dx=\int_0^{\ln 2}\left(x-e^x+1-e^{-x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-e^x+x+e^{-x}\right]_0^{\ln 2}=\left(\frac{\ln^2 2}{2}-2+\ln 2+e^{-\ln 2}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-1+0+e^{-0}\right)$$

$$\boxed{=\frac{\ln^2 2}{2}+\ln 2-\frac{3}{2},}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $e^{-\ln 2}=\frac{1}{e^{\ln 2}}=\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Έστω $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Ισχύουν τότε τα εξής:

- $f^2(x_1)=f^2(x_2)$
- $e^{f(x_1)}=e^{f(x_2)}$

Προσθέτοντας αυτές τις δύο σχέσεις κατά μέλη και χρησιμοποιώντας τη σχέση που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση, παίρνουμε

$$f^2(x_1)-e^{f(x_1)}=f^2(x_2)-e^{f(x_2)}\Rightarrow x_1^2-1=x_2^2-1$$
$$\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow\sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}\Rightarrow|x_1|=|x_2|.$$

Ισχύει όμως $x_1,x_2\geq 0$, οπότε η τελευταία ισότητα συνεπάγεται ότι $x_1=x_2$. Από εδώ, έπεται ότι η f είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο τιμών της f. Δίνεται στην εκφώνηση ότι αυτό είναι το σύνολο $(-\infty,0]$. Για να προσδιορίσουμε τον τύπο της αντίστροφης, πρέπει να λύσουμε την ισότητα $y=f(x)$ ως προς x. Αντικαθιστώντας $y=f(x)$ στη δοσμένη σχέση, παίρνουμε ότι

$$y^2-e^y=x^2-1\Rightarrow x^2=y^2-e^y+1.\quad (1)$$

Θα θέλαμε να πάρουμε τετραγωνικές ρίζες και στα δύο μέλη, όμως δεν γνωρίζουμε αν το δεύτερο μέλος είναι μη αρνητικός αριθμός. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν πρώτα να το αποδείξουμε. Ισχύει $y=f(x)\in f([0,+\infty))=(-\infty,0]$, άρα $y\leq 0$. Από αυτό έπεται ότι $e^y\leq 1$, άρα

$$y^2-e^y+1\geq y^2\geq 0,$$

όπως θέλαμε. Επομένως, στη σχέση (1) μπορούμε να θεωρήσουμε τις τετραγωνικές ρίζες των δύο μελών. Προκύπτει ότι

$$|x|=\sqrt{y^2-e^y+1}\overset{x\geq 0}{\Rightarrow} x=\sqrt{y^2-e^y+1}.$$

Η σχέση $x\geq 0$ ισχύει επειδή το x ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. Προκύπτει από την παραπάνω ισότητα ότι

$$\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{x^2-e^x+1}\ \text{ για κάθε } x\leq 0.}$$

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-2x$ για $x\in\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και ισχύει

$$g'(x)=e^x-2$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της παραγώγου. Ισχύει η ισοδυναμία

$$g'(x)>0\Leftrightarrow e^x-2>0\Leftrightarrow e^x>2\Leftrightarrow x>\ln 2.$$

Με εντελώς όμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε ότι $g'(x)<0$ για $x<\ln 2$ και $g'(x)=0$ για $x=\ln 2$. Προκύπτει λοιπόν ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Έτσι, προκύπτει ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=\ln 2$. Το ολικό της ελάχιστο είναι ίσο με

$$g(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0,$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε από το γεγονός ότι $\ln 2<\ln e=1$.

Πράγματι, αν $x\in(-\infty,\ln 2]$, τότε $g(x)\geq g(\ln 2)$, καθώς g γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ln 2]$, ενώ, αν $x\in[\ln 2,+\infty)$, τότε $g(x)\geq g(\ln 2)$, καθώς g γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2,+\infty)$. Επομένως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $g(x)\geq g(-\ln 2)$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, αφού η ελάχιστη τιμή της είναι θετική, η g παίρνει μόνο θετικές τιμές, που είναι το ζητούμενο.

Για να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της $f'(x)$. Παραγωγίζουμε λοιπόν και τα δύο μέλη της ισότητας που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση και παίρνουμε ότι για κάθε $x\geq 0$ ισχύει

$$\left(f^2(x)-e^{f(x)}\right)'=\left(x^2-1\right)'\Rightarrow 2f(x)f'(x)-e^{f(x)}f'(x)=2x$$

$$\Rightarrow f'(x)\left(2f(x)-e^{f(x)}\right)=2x \Leftrightarrow f'(x)\left(-g\left(f(x)\right)\right)=2x. \quad (2)$$

Για κάθε $x>0$, το δεύτερο μέλος είναι θετικός αριθμός. Επίσης, ο παράγοντας $-g(f(x))$ είναι αρνητικός, διότι δείξαμε προηγουμένως ότι η g παίρνει μόνο θετικές τιμές. Έπεται λοιπόν από την παραπάνω ισότητα ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x>0$. Αφού η f είναι συνεχής στη θέση $x=0$, έπεται ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε ολόκληρο το διάστημα $[0,+\infty)=A_f$, που είναι το ζητούμενο.

Γ3. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, άρα το σύνολο τιμών της δίνεται από τον τύπο

$$f\left([0,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(0)\right].$$

Γνωρίζουμε όμως ήδη από την εκφώνηση ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty,0]$, άρα

$$\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(0)\right]=(-\infty,0].$$

Από αυτήν τη σχέση έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, όπως θέλαμε.

Γ4. Από την ισότητα

$$\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(0)\right]=(-\infty,0]$$

που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει επίσης ότι $f(0)=0$. Αντικαθιστούμε $x=0$ στη σχέση (2) και χρησιμοποιούμε τη σχέση $f(0)=0$. Προκύπτει ότι

$$f'(0)\left(2f(0)-e^{f(0)}\right)=0\Leftrightarrow f'(0)(0-1)=0 \Leftrightarrow f'(0)=0.$$

Επομένως, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ είναι η

$$\boxed{(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=0.}$$

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=0$. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη σε αυτήν τη θέση. Γνωρίζουμε ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ για κάθε $x \in A_{f^{-1}}=(-\infty,0]$. Θα παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη αυτής της σχέσης και θα θέσουμε $x=0$. Αυτό είναι κάτι που μπορούμε να κάνουμε, διότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της και επιπλέον έχουμε υποθέσει ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=0$. Προκύπτει λοιπόν από τον κανόνα της αλυσίδας ότι

$$f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x)=x=1 \overset{x=0}{\Longrightarrow} f'\left(f^{-1}(0)\right)\left(f^{-1}\right)'(0)=1.$$

Από τον τύπο της f^{-1} προκύπτει ότι $f^{-1}(0)=0$. Άρα η τελευταία ισότητα γράφεται

$$f'(0)\left(f^{-1}\right)'(0)=1 \overset{f'(0)=0}{\Rightarrow} 0\cdot\left(f^{-1}\right)'(0)=1,$$

το οποίο είναι προφανώς αδύνατο. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα συμπεραίνουμε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{xe^x+(\alpha-1)x^2+\alpha}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{e^x}{x^2+1}+\frac{(\alpha-1)x}{x^2+1}+\frac{\alpha}{x\left(x^2+1\right)}.$$

Θα δουλέψουμε με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^x+(\alpha-1)x^2+\alpha}{x\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{x^2+1}+\frac{(\alpha-1)x}{x^2+1}+\frac{\alpha}{x\left(x^2+1\right)}\right)=1+0+(+\infty)=+\infty, \quad (1)$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\left(x^2+1\right)\right]=0$, και $x\left(x^2+1\right)>0$ καθώς το x τείνει στο 0 από τα δεξιά. Από την άλλη, γνωρίζουμε από την εκφώνηση ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$f(x) \geq \frac{xe^x + (\alpha - 1)x^2 + \alpha}{x(x^2+1)},$$

άρα

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \geq \lim_{x \to 0^+} \frac{xe^x + (\alpha - 1)x^2 + \alpha}{x(x^2+1)}$$

Αυτό όμως θα σήμαινε ότι $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, το οποίο όμως είναι άτοπο διότι $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \in \mathbb{R}$, καθώς η f είναι συνεχής στο 0.

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο, υποθέτοντας ότι $\alpha \neq 0$, άρα συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 0$. Μάλιστα, σε αυτήν την περίπτωση, η σχέση που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση γράφεται στη μορφή

$$f(x) \geq \frac{e^x - x}{x^2+1}. \qquad (2)$$

Μάλιστα, αφού $f(0) = 1$, μπορούμε να ελέγξουμε ότι αυτή η σχέση ισχύει και για $x = 0$, οπότε τελικά ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \frac{e^x - x}{x^2+1}$$

για $x \in \mathbb{R}$. Από τη συνθήκη που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση και από την παρατήρηση που κάναμε στο τέλος της λύσης του Ερωτήματος Δ1, προκύπτει ότι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει όμως

$$g(0) = f(0) - \frac{e^0 - 0}{0^2+1} = 0,$$

οπότε ισχύει $g(x) \geq 0 = g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Φυσικά, η g είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ (και σε όλο το $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων) και το $x = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Συμπεραίνουμε λοιπόν από το Θεώρημα Fermat ότι $g'(0) = 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$g'(x) = f'(x) - \frac{(e^x - x)'(x^2+1) - (e^x - x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = f'(x) - \frac{(e^x - 1)(x^2+1) - 2x(e^x - x)}{(x^2+1)^2},$$

οπότε

$$g'(0)=f'(0)-\frac{(e^0-1)(0^2+1)-2\cdot 0\cdot(e^0-0)}{(0^2+1)^2}=f'(0).$$

Από τη σχέση $g'(0)=0$, έπεται λοιπόν ότι $f'(0)=0$.

Δ3. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x\geq x+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Μπορούμε να αποδείξουμε αυτήν την ανισότητα με χρήση της «γνωστής» ανισότητας $\ln x\leq x-1$, αντικαθιστώντας το x με e^x. Όπως έχουμε αναφέρει ξανά, η τελευταία ανισότητα είναι «γνωστή» διότι αποτελεί εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, και έτσι μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη.
Αντικαθιστώντας το x με $x-1$ στην ανισότητα $e^x\geq x+1$, παίρνουμε $e^{x-1}\geq(x-1)+1=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με ισότητα μόνο αν $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Επομένως, συνδυάζοντας την τελευταία ανισότητα με τη (2), παίρνουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)\geq\frac{e^x-x}{x^2+1}=\frac{e\cdot e^{x-1}-x}{x^2+1}\overset{(2)}{\geq}\frac{ex-x}{x^2+1}=\frac{ex}{x^2+1},$$

με την ισότητα στη δεύτερη ανισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα, για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, ισχύει η γνήσια ανισότητα

«Γνήσια», διότι στην παραπάνω ανισότητα η ισότητα ισχύει (ενδεχομένως) για x=1 και για καμία άλλη τιμή του x. Γράφουμε «ενδεχομένως», διότι η παραπάνω σχέση αποτελείται από 2 ανισότητες και, για να ισχύει η ισότητα, πρέπει να ισχύει η ισότητα και στις δύο αυτές επιμέρους ανισότητες.

$$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\frac{ex}{x^2+1}dx=\left[\frac{e}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1=\frac{e\ln 2}{2}.$$

Δ4. Η σχέση (2) μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί στη μορφή

$$(x^2+1)f(x)\geq e^x-x$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(x^2+1)f(x)-e^x+x$. Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, ισχύει $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι στην πραγματικότητα η h είναι η μηδενική συνάρτηση. Για να το κάνουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή σε άτοπο.

Έστω λοιπόν ότι για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $h(x_0)>0$. Επιλέγοντας το β αρκετά μεγάλο, μπορούμε να διασφαλίσουμε ότι $x_0\in[-\beta,\beta]$. Χρησιμοποιούμε τώρα για την h το θεώρημα 3 της σελ. 214 του σχολικού βιβλίου. Το διάστημα στο οποίο εφαρμόζουμε το θεώρημα είναι το $[-\beta,\beta]$. Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα, θα πρέπει να ισχύει

$$\int_{-\beta}^{\beta} h(x)dx > 0 \Rightarrow \int_{-\beta}^{\beta}(x^2+1)f(x)dx - \int_{-\beta}^{\beta}(e^x - x)dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\beta}^{\beta}(x^2+1)f(x)dx > \int_{-\beta}^{\beta}(e^x - x)dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\beta}^{\beta}(x^2+1)f(x)dx > \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_{-\beta}^{\beta} = e^{\beta} - e^{-\beta},$$

το οποίο είναι άτοπο λόγω της ισότητας που μας έχει δοθεί στην υπόθεση. Καταλήξαμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι η h δεν είναι η μηδενική συνάρτηση, οπότε συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$h(x) = 0 \Rightarrow (x^2+1)f(x) = e^x - x \quad \boxed{\Rightarrow f(x) = \frac{e^x - x}{x^2+1}.}$$