Διαγώνισμα 4.26

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 144.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 128.

Α3. **i)** Λ, **ii)** Λ, **iii)** Σ, **iv)**Λ, **v)** Λ

ΘΕΜΑ Β
Λύση

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'\left(e^x+e^{-x}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)'}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}>0,$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x)=\frac{-8\left(e^x+e^{-x}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)'}{\left(e^x+e^{-x}\right)^4}=-\frac{8\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^3}$$

Ισχύει ότι $e^x+e^{-x}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε και $\left(e^x+e^{-x}\right)^3>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα ο παρονομαστής είναι θετικός. Επομένως, για να προσδιορίσουμε το πρόσημο της f'', πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο του αριθμητή. Συγκεκριμένα, ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

$$f''(x)>0\Leftrightarrow -8\left(e^x-e^{-x}\right)>0\Leftrightarrow \left(e^x-e^{-x}\right)<0$$

$$\Leftrightarrow e^x<e^{-x}\overset{e^x\nearrow}{\Leftrightarrow} x<-x\Leftrightarrow 2x<0\Leftrightarrow x<0.$$

Με όμοιο τρόπο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f'' είναι αρνητική για $x>0$ και μηδενίζεται για $x=0$. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας κυρτότητας:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$		$\frown$

- Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$.
- Το μοναδικό σημείο καμπής της C_f είναι το $\Sigma(0,f(0))\equiv(0,0)$.

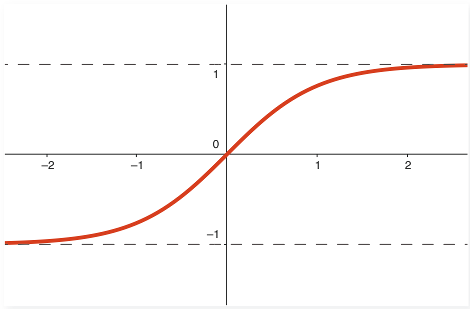
Β3. Η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, επομένως η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Θα αναζητήσουμε οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και το $-\infty$. Αναζητούμε αρχικά οριζόντιες ασύμπτωτες. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\dfrac{e^{-x}}{e^x}\right)}{e^x\left(e^x+\dfrac{e^{-x}}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-e^{-2x}\right)}{\left(1+e^{-2x}\right)}=\frac{1-0}{1+0}=1,$$

άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Επίσης,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{e^{-x}\left(e^{2x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1,$$

οπότε η ευθεία $\boxed{y=-1}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Τέλος, εφόσον η C_f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες, συμπεραίνουμε ότι δεν έχει πλάγιες. Με βάση τη μονοτονία, την κυρτότητα και τις ασύμπτωτές της που βρήκαμε παραπάνω, μπορούμε τώρα να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της C_f. Αυτή φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Β4. Αντικαθιστούμε $u=e^x+e^{-x}$, όπως υποδεικνύεται στην εκφώνηση. Τότε, ισχύει $du=\left(e^x-e^{-x}\right)dx$. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x=0$, ισχύει $u=e^0+e^{-0}=2$.
- Για $x=1$ ισχύει $u=e+e^{-1}$.

Τότε, το ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$I=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left[\frac{1}{e^x+e^{-x}}\cdot\left(e^x-e^{-x}\right)\right]dx$$

$$=\int_2^{e+e^{-1}}\frac{1}{u}du=\left[\ln|u|\right]_2^{e+e^{-1}}\ \boxed{=\ln\left(e+e^{-1}\right)-\ln 2.}$$

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Το πεδίο ορισμού της h είναι το $A_h=(0,+\infty)$ και το πεδίο ορισμού της φ είναι το $A_\varphi=\mathbb{R}-\{0\}$. Επομένως, το πεδίο ορισμού της $f=\varphi\circ h$ είναι το σύνολο

$$A_f=\{x\in A_h : h(x)\in A_\varphi\}.$$

Πρέπει λοιπόν να λύσουμε το ακόλουθο σύστημα περιορισμών:

$$\begin{cases} x\in A_h \\ h(x)\in A_\varphi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ h(x)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ \ln x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ \ln x\neq \ln 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1\end{cases}.$$

Συνδυάζοντας τους δύο περιορισμούς, παίρνουμε ότι $A_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$. Για κάθε $x\in A_f$ ισχύει

$$\boxed{f(x)=\varphi(h(x))=\frac{1}{|h(x)|}=\frac{1}{|\ln x|}.}$$

Γ2. Θα προσπαθήσουμε αρχικά να απαλείψουμε την απόλυτη τιμή, διότι με την απόλυτη τιμή είναι αδύνατο να υπολογίσουμε παραγώγους.

- Για κάθε $0<x<1$ ισχύει $\ln x<\ln 1=0$, καθώς η $g(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα $|\ln x|=-\ln x$ για κάθε $0<x<1$.
- Για κάθε $x>1$ ισχύει $\ln x>\ln 1=0$, και πάλι λόγω της μονοτονίας της λογαριθμικής συνάρτησης. Άρα για $x>1$ ισχύει $|\ln x|=\ln x$.

Συμπεραίνουμε ότι ο τύπος της συνάρτησης f γράφεται στη μορφή

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{\ln x}, & 0<x<1 \\ \dfrac{1}{\ln x}, & x>1\end{cases}.$$

Για να μελετήσουμε τη μονοτονία της f, θα προσδιορίσουμε το πρόσημο της παραγώγου της ξεχωριστά για κάθε κλάδο.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x(\ln x)^2} > 0.$$

  Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (1,+\infty)$ ισχύει

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\ln x}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2} < 0.$$

  Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Μελετάμε τώρα την f ως προς την κυρτότητα, ξεχωριστά για κάθε κλάδο της.

- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x(\ln x)^2}\right)' = \frac{-(\ln x)^2 - 2x\ln x \cdot \frac{1}{x}}{x^2(\ln x)^4} = \frac{-(\ln x)^2 - 2\ln x}{x^2(\ln x)^4}.$$

  Ο παρονομαστής είναι θετικός, οπότε το πρόσημο εξαρτάται αποκλειστικά από τον αριθμητή. Ισχύει λοιπόν η ισοδυναμία

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -(\ln x)^2 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 + 2\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x + 2) < 0.$$

Όμως, όπως είδαμε και πριν, για κάθε $0<x<1$ ισχύει $\ln x<0$. Άρα, στο διάστημα $(0,1)$, η παραπάνω ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+2>0 \Leftrightarrow \ln x>-2 \overset{e^x \nearrow}{\Leftrightarrow} x>e^{-2} \overset{x\in(0,1)}{\Leftrightarrow} x\in\left(e^{-2},1\right).$$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f''(x)=0$ για $x=e^{-2}$ και $f''(x)<0$ για $x\in\left(0,e^{-2}\right)$.

- Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ισχύει

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{x(\ln x)^2}\right)'=\frac{(\ln x)^2+2x\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{x^2(\ln x)^4}=\frac{(\ln x)^2+2\ln x}{x^2(\ln x)^4}.$$

Όπως και πριν, ο παρονομαστής είναι θετικός. Πλέον όμως, είναι και ο αριθμητής θετικός, αφού $\ln x>0$ για $x>1$.

Βάσει των παραπάνω πληροφοριών, σχεδιάζουμε τον ακόλουθο πίνακα κυρτότητας:

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖	$\frown$		$\smile$	‖	$\frown$	

- Η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left[e^{-2},1\right)$ και $(1,+\infty)$, και κοίλη στο διάστημα $\left(0,e^{-2}\right]$.
- Το μοναδικό σημείο καμπής της C_f είναι το $\mathrm{K}\left(e^{-2},f\left(e^{-2}\right)\right)$.

Γ3. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{|\ln x|}=0,$$

καθώς $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. Επομένως, η ευθεία $x=0$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Αντίθετα, ισχύει

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{|\ln x|}=+\infty,$$

αφού $\lim_{x\to 1^-} \ln x = 0$ και $|\ln x| > 0$ για $x < 1$ και κοντά στο 1. Επομένως, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f. Αναζητούμε τώρα οριζόντιες/πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$. Ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{|\ln x|} = 0,$$

αφού $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. Άρα η ευθεία $\boxed{y = 0}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Εφόσον έχει οριζόντια ασύμπτωτη, η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$.

Γ4. Για να βρούμε τα σημεία A, B, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 1$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|\ln x|} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} = 1 \quad ή \quad \frac{1}{\ln x} = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 \quad ή \quad \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e \quad ή \quad x = e^{-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, B έχουν συντεταγμένες $(e,1)$ και $(e^{-1},1)$ αντίστοιχα (για την ακρίβεια, δεν έχει τόση σημασία ποιο σημείο από τα δύο ονομάζουμε A και ποιο B). Για να αποδείξουμε ότι οι εφαπτόμενες είναι κάθετες, αρκεί να δείξουμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης τους έχουν γινόμενο ίσο με -1, αφού αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει τις κάθετες ευθείες.

Στο σημείο A η κλίση της C_f είναι ίση με

$$f'(e) = -\frac{1}{e(\ln e)^2} = -\frac{1}{e},$$

ενώ στο σημείο B η κλίση της C_f είναι ίση με

$$f'(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}(\ln e^{-1})^2} = \frac{1}{e^{-1}} = e.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι $f'(e)f'(e^{-1}) = -1$, άρα οι εφαπτομένες στα σημεία A, B είναι μεταξύ τους κάθετες.

Γ5. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ισχύει $\alpha'(t) = 5\alpha(t)\,\mathrm{cm/s}$. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $\Sigma(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 1$ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y - \frac{1}{\ln\alpha} = -\frac{1}{\alpha(\ln\alpha)^2}(x-\alpha)$$

Για να βρούμε σε ποιο σημείο τέμνει η ευθεία (ε) τον άξονα $x'x$, θέτουμε $y=0$. Τότε, προκύπτει η εξίσωση

$$-\frac{1}{\ln\alpha}=-\frac{1}{\alpha(\ln\alpha)^2}(x-\alpha)\Leftrightarrow \alpha\ln\alpha=x-\alpha$$
$$\Leftrightarrow x=\alpha+\alpha\ln\alpha.$$

Άρα η τετμημένη του Γ γράφεται συναρτήσει του χρόνου στη μορφή

$$x_\Gamma(t)=\alpha(t)+\alpha(t)\ln\alpha(t).$$

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη αυτής της ισότητας, προκύπτει ότι

$$x'(t)=\big(\alpha(t)+\alpha(t)\ln\alpha(t)\big)'=\alpha'(t)+\alpha'(t)\ln\alpha(t)+\alpha(t)\cdot\frac{1}{\alpha(t)}\alpha'(t)$$
$$=2\alpha'(t)+\alpha'(t)\ln\alpha(t)=\alpha'(t)\big(2+\ln\alpha(t)\big).$$

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $\alpha(t_0)=e^2$, ισχύει ότι

$$\alpha'(t_0)=5\alpha(t_0)=5e^2 cm/s,$$

συνεπώς

$$\boxed{x'(t_0)=5e^2\left(2+\ln e^2\right)=20e^2\ \ cm/s}$$

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Η w είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$w'(x)=2g(x)g'(x)-2xg'(x)-2g(x)$$

Όμως, επειδή $g'(x)=\dfrac{g(x)}{g(x)-x}$, η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$w'(x)=2g(x)\left(\frac{g(x)}{g(x)-x}\right)-2x\left(\frac{g(x)}{g(x)-x}\right)-2g(x)$$

$$=\frac{2g^2(x)-2xg(x)}{g(x)-x}-2g(x)=\frac{2g^2(x)-2xg(x)-2g(x)\big(g(x)-x\big)}{g(x)-x}$$

$$=\frac{2g^2(x)-2xg(x)-2g^2(x)+2xg(x)}{g(x)-x}=0$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. έπεται ότι η w είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Αφού η w είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι $w(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ισοδύναμα, ισχύει $g^2(x)-2xg(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για $x=0$, και με χρήση της υπόθεσης $g(0)=4$, προκύπτει ότι $c=16$. Έπεται λοιπόν ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει

$$g^2(x)-2xg(x)=16 \Leftrightarrow g^2(x)-2xg(x)+x^2=x^2+16$$

$$\Leftrightarrow (g(x)-x)^2=x^2+16 \Leftrightarrow |g(x)-x|=\sqrt{x^2+16}$$

$$\Leftrightarrow |h(x)|=\sqrt{x^2+16}, \qquad (1)$$

όπου ορίσαμε $h(x)=g(x)-x$. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\sqrt{x^2+16}\neq 0$, προκύπτει από την παραπάνω ισότητα ότι $|h(x)|\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, η h είναι συνεχής στο $x\in\mathbb{R}$. Αφού δεν μηδενίζεται, έπεται ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Για να βρούμε αυτό το πρόσημο, υπολογίζουμε μία τιμή της. Ισχύει

$$h(0)=g(0)=4>0,$$

άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν από τη σχέση (1) ότι

$$\boxed{h(x)=\sqrt{x^2+16} \Leftrightarrow g(x)=x+\sqrt{x^2+16} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.}$$

Δ3. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $x+\sqrt{x^2+16}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το οποίο συνεπάγεται ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\ln(g(x))=\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)$$

είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε είναι προφανής αν $x\geq 0$, καθώς τότε ισχύει

$$x+\sqrt{x^2+16}\geq 0+\sqrt{16}>0$$

Αν τώρα $x<0$, τότε ισχύει

$$x+\sqrt{x^2+16}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|=0,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $|x| = -x$ για $x < 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το πεδίο ορισμού της $f(x) = \ln(g(x))$ είναι πράγματι το $A_f = \mathbb{R}$. Για να δείξουμε ότι η f είναι αντιστρέψιμη, θα αποδείξουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{g(x)}{g(x) - x}}{g(x)} = \frac{1}{h(x)} > 0,$$

όπου στο δεύτερο βήμα χρησιμοποιήσαμε την τρίτη συνθήκη που μας έχει δοθεί στην εκφώνηση και στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπως αποδείξαμε στο Ερώτημα Δ2. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1». Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της f θα δίνεται από τον τύπο

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right). \quad (2)$$

Αυτά τα δύο όρια υπολογίζονται ως εξής:

- Το όριο της g στο $+\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 16}\right) = +\infty$$

  άρα ισχύει και

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(g(x)) \overset{u = g(x)}{=} \lim_{u \to +\infty} \ln u = +\infty. \quad (3)$$

- Το όριο της g στο $-\infty$ είναι ίσο με

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 16}\right),$$

το οποίο έχει την απροσδιόριστη μορφή $(-\infty) + (+\infty)$. Κάνουμε το γνωστό τρικ του πολλαπλασιασμού με τη συζυγή παράσταση. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 16}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 16}\right)\left(x - \sqrt{x^2 + 16}\right)}{x - \sqrt{x^2 + 16}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - \sqrt{x^2 + 16}^{\,2}}{x - \sqrt{x^2 + 16}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-16}{x - \sqrt{x^2 + 16}} = 0 \;= 0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(g(x)) \overset{u=g(x)}{=} \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (2), (3), (4), προκύπτει ότι $\boxed{f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}\,.}$

Δ4. Στο Ερώτημα Δ3 υπολογίσαμε ότι

$$f'(x) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+16}}.$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$I_1 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx = \int_0^3 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_0^3 = f(3) - f(0).$$

Ισχύει

$$f(3) = \ln g(3) = \ln\left(3 + \sqrt{3^2+16}\right) = \ln(3+5) = \ln 8$$

και $f(0) = \ln(g(0)) = \ln 4$, άρα από την παραπάνω σχέση έπεται ότι

$$\boxed{I_1 = \ln 8 - \ln 4 = \ln(8/4) = \ln 2.}$$

Δ5. i. Ισχύει

$$I_2 + 16 I_1 = \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx + \int_0^3 \frac{16}{\sqrt{x^2+16}}dx$$

$$= \int_0^3 \frac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}dx = \int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,dx = I_3.$$

Για δεύτερη ζητούμενη σχέση, θα εφαρμόσουμε παραγοντική ολοκλήρωση στο I_3:

$$I_3 = \int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,dx = \int_0^3 (x)'\sqrt{x^2+16}\,dx = \left[x\sqrt{x^2+16}\right]_0^3 - \int_0^3 x\left(\sqrt{x^2+16}\right)' dx$$

$$= 3\sqrt{25} - \int_0^3 x\frac{1}{2\sqrt{x^2+16}}\left(x^2+16\right)' dx = 15 - \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx \quad \boxed{= 15 - I_2,}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} I_2 + 16I_1 = I_3 \\ I_2 + I_3 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_2 + 16I_1 = 15 - I_2 \\ I_3 = 15 - I_2 \end{cases} \overset{I_1 = \ln 2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2I_2 = 15 - 16\ln 2 \\ I_3 = 15 - I_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_2 = 15/2 - 8\ln 2 \\ I_3 = 15 - (15/2 - 8\ln 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_2 = 15/2 - 8\ln 2 \\ I_3 = 15/2 + 8\ln 2 \end{cases}.$$