Διαγώνισμα 4.27

ΘΕΜΑ Α
Λύση

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 135.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 141.

Α3. **i)** Λ, **ii)** Σ, **iii)** Λ, **iv)**Σ, **v)** Λ

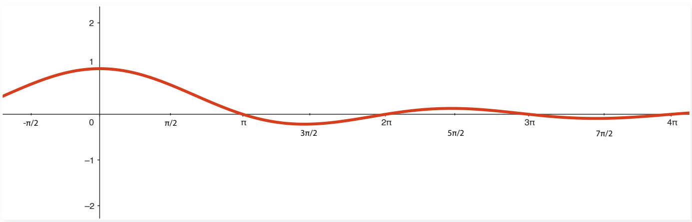
Σχόλια για τα Σ/Λ:

i. Έχουμε συναντήσει ξανά αυτό το ερώτημα στο διαγώνισμα 4.22 (ερώτημα i στα Σ/Λ). Δείτε τη λύση εκείνου του ερωτήματος, η οποία περιέχει αντιπαράδειγμα με αναλυτική εξήγηση.

ii. Προκύπτει από την ιδιότητα 5 στη σελ. 48 του σχολικού βιβλίου.

iii. Έχουμε συναντήσει ξανά αυτό το ερώτημα σε προηγούμενα διαγωνίσματα. Για περισσότερες λεπτομέρειες, δείτε, για παράδειγμα, τη λύση του ερωτήματος iv στο διαγώνισμα 4.23.

iv. Παρότι αυτό φαίνεται οξύμωρο, ο όρος «ασύμπτωτη» είναι παραπλανητικός και στην πραγματικότητα η C_f μπορεί να έχει κοινά σημεία με μια ασύμπτωτή της. Το κλασικό παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x)=ημx/x$. Με χρήση του κριτηρίου παρεμβολής, μπορούμε να δείξουμε ότι η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Παρ' όλα αυτά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η C_f τέμνει αυτήν την ευθεία, και μάλιστα σε άπειρα σημεία, αφού για κάθε $κ\in\mathbb{Z}$ ισχύει $f(κπ)=0$.



v. Έχουμε συναντήσει αυτό το ερώτημα και σε άλλα διαγωνίσματα. Δείτε, για παράδειγμα, το Ερώτημα Α3 στο Διαγώνισμα 4.25. Αυτό το ερώτημα έχει τεθεί στις εξετάσεις ως ερώτηση Σ/Λ με αιτιολόγηση, οπότε είναι καλό να θυμόμαστε ένα σχετικό αντιπαράδειγμα.

ΘΕΜΑ Β
Λύση

B1. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x<0 \\ x^2, & x>0 \end{cases}$.

Η f είναι συνεχής στο $x=0$ διότι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0$.
- $f(0)=0$.

Θα προσδιορίσουμε τώρα το πρόσημο της παραγώγου ξεχωριστά σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

- Για $x<0$ ισχύει $f'(x)=\left(-x^2\right)'=-2x>0$, όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $x<0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στη θέση $x=0$, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $(-\infty,0]$.
- Για $x>0$ ισχύει $f'(x)=\left(x^2\right)'=2x>0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στη θέση $x=0$, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $[0,+\infty)$.

Καθώς η f είναι συνεχής στο 0 και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[0,+\infty)$, έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Αυτό είναι συνέπεια του μέρους (iii) του θεωρήματος στη σελ. 144 του σχολικού βιβλίου.

B2. Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$, έπεται ότι είναι «1-1». Άρα, η f αντιστρέφεται. Θα προσδιορίσουμε τώρα την f^{-1} λύνοντας την εξίσωση $f(x)=y$. Θα διακρίνουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

- Για $x=0$: Γνωρίζουμε ότι $f(0)=0$, οπότε έπεται ότι $f^{-1}(0)=0$.
- Για $x>0$: Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{y}$$
$$\Leftrightarrow |x|=\sqrt{y} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{y}.$$

- Για $x<0$: Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow -x^2=y \Leftrightarrow x^2=-y$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{-y} \Leftrightarrow |x|=\sqrt{-y}$$

Μπορεί αρχικά να φαίνεται παράδοξο ότι εμφανίζεται το -y κάτω από τη ρίζα, καθώς το «-» μας παραπέμπει σε αρνητικό αριθμό. Εδώ όμως αυτό δεν αληθεύει: Καθώς $x^2=-y$, έπεται ότι ο -y είναι μη αρνητικός.

$$\overset{x<0}{\Leftrightarrow} -x = \sqrt{-y} \Leftrightarrow x = -\sqrt{-y}.$$

Συμπεραίνουμε από τα παραπάνω ότι

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ \sqrt{x}, & x>0 \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x<0 \\ \sqrt{x}, & x>0 \end{cases},$$

όπου η σύμπτυξη μπορεί να γίνει, αφού ο «κάτω» κλάδος ορίζεται καλά για $x=0$, και έχει την ίδια τιμή με τον μεσαίο κλάδο γι' αυτήν την τιμή του x.

B3. Λύνουμε αρχικά την εξίσωση $f(x)=x$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον αρχικό τύπο της f, αυτόν με την απόλυτη τιμή. Ισχύει η ισοδυναμία

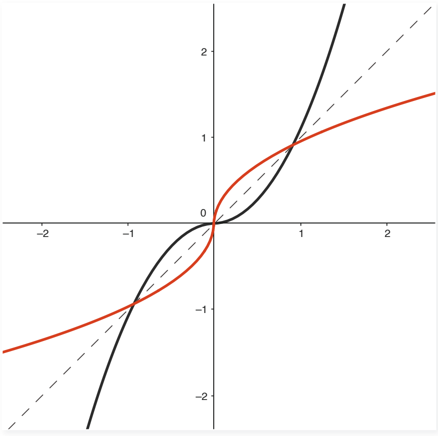
$$f(x)=x \Leftrightarrow x|x|=x \Leftrightarrow x|x|-x=0 \Leftrightarrow x(|x|-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \quad \acute{\eta} \quad |x|=1 \Leftrightarrow x=0 \quad \acute{\eta} \quad x=\pm 1.$$

Ο σχεδιασμός της C_f είναι εύκολος:

- Για $x<0$ ισχύει $f(x)=-x^2$, οπότε σχεδιάζουμε το κομμάτι της παραβολής $y=-x^2$ που αντιστοιχεί σε $x<0$.
- Για $x\geq 0$ ισχύει $f(x)=x^2$, οπότε σχεδιάζουμε το κομμάτι της παραβολής $y=x^2$ που αντιστοιχεί σε $x\geq 0$.

Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τη $C_{f^{-1}}$ ως τη συμμετρική της C_f με άξονα την ευθεία $y=x$. Όλα αυτά φαίνονται στο διπλανό σχήμα, όπου η C_f είναι σχεδιασμένη με γαλάζιο και η $C_{f^{-1}}$ με μαύρο χρώμα.



B4. Για x κοντά στο $+\infty$ ισχύει $f(x)=x^2$. Εφόσον η f/g έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=x-4$ στο $+\infty$, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{f(x)}{g(x)}}{x} = 1.$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} - x \right) = -4$.

Θέλουμε τώρα να προσδιορίσουμε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ (αν υπάρχει). Παρατηρούμε ότι για $x > 0$ ισχύει

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{x} = \frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x} = \frac{x}{g(x)},$$

οπότε, σύμφωνα με τις δύο παραπάνω παρατηρήσεις, έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{g(x)}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{f(x)/g(x)}{x} \right)} = 1. \qquad (1)$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, μένει να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x) = 4$. Όπως είδαμε, ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - x \right) = -4 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{g(x)} - x \right) = -4$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 - xg(x)}{g(x)} \right) = -4. \ \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{g(x)} (x - g(x)) = -4.$$

Πολλαπλασιάζοντας με το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$, το οποίο είδαμε στη σχέση (1) ότι ισούται με 1, παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{g(x)}{x} \cdot \frac{x}{g(x)} \cdot (x - g(x)) \right] = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} \right) \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{g(x)} \cdot (x - g(x)) \right) = -4.$$

Σημειώνουμε ότι η ανάλυση σε δύο επιμέρους όρια είναι επιτρεπτή, αφού, σύμφωνα με όσα έχουμε αποδείξει παραπάνω, και τα δύο αυτά όρια υπάρχουν (δείτε την ιδιότητα 3 στο θεώρημα της σελ. 48 του σχολικού βιβλίου). Ισχύει όμως

$$\frac{g(x)}{x}\cdot\frac{x}{g(x)}\cdot(x-g(x))=x-g(x),$$

οπότε η παραπάνω ισότητα συνεπάγεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-g(x))=-4$, δηλαδή

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x)=4, \quad (2)$$

που είναι το ζητούμενο. Οι σχέσεις (1) και (2) αποδεικνύουν ότι πράγματι η ευθεία $y=x-4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

ΘΕΜΑ Γ
Λύση

Γ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $1+e^{-x}>0$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Πρέπει επομένως να βρούμε τα όρια της f στο $-\infty$ και το $+\infty$.

- Ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^{-x})\overset{u=-x}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}(1+e^{u})=+\infty$, οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(1+e^{-x})=+\infty.$$

- Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x})\overset{u=-x}{=}\lim\limits_{u\to-\infty}(1+e^{u})=1+0=1$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=\ln(1+0)=0.$$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x)=\left(\ln(1+e^{-x})\right)'=\frac{1}{(1+e^{-x})}(1+e^{-x})'=-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}. \quad (1)$$

Ισχύει λοιπόν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων, και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f''(x)=\left(-\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)'=-\frac{(e^{-x})'(1+e^{-x})-e^{-x}(1+e^{-x})'}{(1+e^{-x})^2}$$

$$= -\frac{-e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)-e^{-x}\left(-e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^2} = -\frac{-e^{-x}-e^{-2x}+e^{-2x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση:

Προσπαθήστε να δείξετε ότι αυτή η συνάρτηση είναι η ίδια με εκείνη που είχαμε συναντήσει στο Θέμα Δ του Διαγωνίσματος 4.24. Εκεί βέβαια τα ερωτήματα ήταν διαφορετικά και δεν αφορούσαν μονοτονία/κυρτότητα. Μάλιστα, η αντίθετη αυτής της συνάρτησης είχε τεθεί στο Θέμα Γ των Μαθηματικών κατεύθυνσης στις Εξετάσεις του 2014.

Γ3. Ισχύει $f(0)=\ln\left(1+e^{-0}\right)=\ln 2$. Επίσης, από τη σχέση (1) έπεται ότι

$$f'(0) = -\frac{e^{-0}}{1+e^{-0}} = -\frac{1}{2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M\left(0,f(0)\right)$ έχει εξίσωση

$$\boxed{(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\ln 2.}$$

Στο Δ2 δείξαμε ότι η f είναι κυρτή. Αυτό σημαίνει ότι η C_f βρίσκεται «πάνω» από τις εφαπτόμενές της, με εξαίρεση τα σημεία επαφής μαζί τους. Από αυτό προκύπτει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\boxed{f(x)\geq -\frac{1}{2}x+\ln 2}$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x=0$.

Γ4. i. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$=\ln\left(1+e^x\right)-\ln e^x=\ln\left(1+e^x\right)-x. \quad (2)$$

Από τον ορισμό της f, προκύπτει επίσης ότι

$$f(-x)=\ln\left(1+e^{-(-x)}\right)=\ln\left(1+e^{x}\right).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν από αυτές τις δύο σχέσεις ότι

$$\boxed{f(x)-f(-x)=\left(\ln\left(1+e^{x}\right)-x\right)-\ln\left(1+e^{x}\right)=-x,}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

ii. Γνωρίζουμε από τα Μαθηματικά προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου ότι η κλίση μιας ευθείας που περνά από δύο σημεία $K(x_1,y_1)$ και $\Lambda(x_2,y_2)$ είναι ίση με

$$\lambda_{K\Lambda}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Άρα η κλίση της ευθείας AB είναι ίση με

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(\alpha)-f(-\alpha)}{\alpha-(-\alpha)}=-\frac{\alpha}{2\alpha}=-\frac{1}{2},$$

όπου στο τρίτο βήμα χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του Ερωτήματος i. Όμως, από την εξίσωση της (ε) που έχουμε βρει στο προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι η κλίση αυτής της ευθείας είναι επίσης ίση με $-\frac{1}{2}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ Δ
Λύση

Δ1. Επισημαίνουμε αρχικά ότι η f είναι καλά ορισμένη στο διάστημα A. Πράγματι, για κάθε $x\in A$ ισχύει

$$0\le x<\frac{\pi^2}{4}\Rightarrow 0\le\sqrt{x}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x}\right)<0,$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση συνημίτονο είναι θετικό στο διάστημα $[0,\pi/2)$. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, θα πρέπει να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Μας αρκεί το πλευρικό όριο διότι η f είναι ορισμένη μόνο από τη δεξιά πλευρά του x_0=0.

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Εφόσον $\sigma\upsilon\nu(0)=1$, έπεται ότι $f(0)=1$.

Άρα το παραπάνω όριο είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)}{x\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)}. \qquad (3)$$

Αυτό το όριο δυστυχώς έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε όμως τον κανόνα De L' Hospital, καθώς οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις (σύνθεση τριγωνομετρικών με τετράγωνο και ρίζα) έχουν ακόμη πιο περίπλοκες παραγώγους και επομένως τα πράγματα θα γίνουν ακόμη πιο δύσκολα.

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u=\sqrt{x}$, το όριο γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{1-\sigma\upsilon\nu^2(u)}{u^2\sigma\upsilon\nu^2(u)}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\big(1-\sigma\upsilon\nu(u)\big)\big(1+\sigma\upsilon\nu(u)\big)}{u^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2(u)}=\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu(u)}{u^2}\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu(u)}{\sigma\upsilon\nu^2(u)}\right) \qquad (4)$$

Σημείωση:

Στο τελευταίο βήμα επιλέξαμε αυτήν την ανάλυση σε δύο παράγοντες διότι παρατηρήσαμε ότι η απροσδιοριστία $0/0$ προέρχεται από τους όρους $1-\sigma\upsilon\nu(u)$ και u^2. Ο δεύτερος παράγοντας δεν αποτελεί πλέον πρόβλημα, καθώς δεν έχει απροσδιόριστη μορφή. Μάλιστα, το όριό του υπολογίζεται άμεσα και είναι ίσο με 2. Γενικά, όταν εμφανίζεται απροσδιόριστη μορφή, είναι καλό να κάνουμε στην άκρη τους παράγοντες που δεν προκαλούν την απροσδιοριστία, έτσι ώστε να απλοποιηθεί το κομμάτι που την προκαλεί.

Φυσικά, στην ισότητα (4), ένα ακόμη σημαντικό βήμα είναι η παραγοντοποίηση του αριθμητή.

Εστιάζουμε τώρα στον πρώτο παράγοντα. Αυτός έχει την απροσδιόριστη μορφή $0/0$, οπότε θα εφαρμόσουμε τον κανόνα De L' Hospital. Ισχύει λοιπόν

$$\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu(u)}{u^2}\right)\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu(u)}{2u}=\frac{1}{2},$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γνωστό όριο $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x/x)=1$. Πλέον, το όριο της σχέσης (4) υπολογίζεται ως εξής:

$$\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu(u)}{u^2}\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu(u)}{\sigma\upsilon\nu^2(u)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{1^2}=1.$$

Υπενθυμίζουμε ότι το όριο που μόλις υπολογίσαμε είναι (μετά από πολλά ενδιάμεσα βήματα) το

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Άρα προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύει $\boxed{f'(0)=1.}$

Σημείωση:

Ένα ακόμη σημαντικό μέρος της λύσης είναι η αλλαγή μεταβλητής $u=\sqrt{x}$. Γενικότερα, η σύνθεση της τριγωνομετρικής συνάρτησης με την τετραγωνική ρίζα περιπλέκει πολύ τα πράγματα, οπότε μια τέτοια αλλαγή μεταβλητής είναι λογική και οδηγεί σε απλοποίηση του ορίου.

Σημείωση:

Κάποιος θα μπορούσε να αναρωτηθεί γιατί δεν μπορούμε να γράψουμε την κλασική φράση «η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ ως πράξη παραγωγίσιμων» και στη συνέχεια να υπολογίσουμε την f' από τον τύπο της f. Ο λόγος είναι ότι η συνάρτηση $\sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Είναι επίσης ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι, παρότι η f είναι σύνθεση κάποιων συναρτήσεων, οι οποίες δεν είναι όλες παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ (όπως, π.χ., η τετραγωνική ρίζα), η ίδια η f είναι παραγωγίσιμη!

Για να βρούμε την εφαπτομένη της C_f, αρκεί να υπολογίσουμε το $f(0)$ και το $f'(0)$. Όμως αυτά έχουν ήδη υπολογιστεί: Είδαμε πιο πάνω ότι $f'(0)=1$ και στην αρχή της λύσης δείξαμε και ότι $f(0)=1$. Επομένως, η ζητούμενη εφαπτόμενη ευθεία είναι η

$$\boxed{(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x+1.}$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο A, ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ο υπολογισμός της παραγώγου θέλει ιδιαίτερη προσοχή, διότι η $\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)$ είναι σύνθεση τριών συναρτήσεων (ρίζα - συνημίτονο - τετράγωνο). Για κάθε $x\in\left(0,\pi^2/4\right)$ ισχύει

$$f'(x)=-\frac{\left(\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)\right)'}{\sigma\upsilon\nu^4\left(\sqrt{x}\right)}=-\frac{2\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x}\right)\left(\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{x}\right)\right)'}{\sigma\upsilon\nu^4\left(\sqrt{x}\right)}$$

$$=-\frac{2\left(-\eta\mu\left(\sqrt{x}\right)\right)\left(\sqrt{x}\right)'}{\sigma\upsilon\nu^3\left(\sqrt{x}\right)}=\frac{\eta\mu\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\sigma\upsilon\nu^3\left(\sqrt{x}\right)}.$$

Ο παράγοντας $\sqrt{x}$ που εμφανίζεται στον παρονομαστή είναι ο λόγος που υπολογίζουμε την παράγωγο στο $\left(0,\pi^2/4\right)$, εξαιρώντας το $x_0=0$. Αυτή η παρατήρηση σχετίζεται με τη σημείωση που κάναμε στο τέλος του προηγούμενου ερωτήματος.

Ο παράγοντας $\sqrt{x}$ είναι θετικός για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi^2}{2}\right)$. Επίσης, δείξαμε προηγουμένως, στην αρχή του Ερωτήματος Δ1, ότι $\sqrt{x}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ για κάθε $x\in A$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\eta\mu\left(\sqrt{x}\right)>0$ και $\sigma\upsilon\nu^3\left(\sqrt{x}\right)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi^2}{4}\right)$, αφού γνωρίζουμε ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι θετικές στο πρώτο τεταρτημόριο, με εξαίρεση πιθανά (κάποια από) τα άκρα, τα οποία εδώ όμως τα έχουμε εξαιρέσει ούτως ή άλλως, αφού δουλεύουμε στο ανοιχτό διάστημα $\left(0,\frac{\pi^2}{4}\right)$. Έπεται λοιπόν ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi^2}{4}\right)$. Λόγω συνέχειας, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το διάστημα $A=\left[0,\frac{\pi^2}{4}\right)$.

Εφόσον η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A, το σύνολο τιμών της είναι το

$$f\left(\left[0,\pi^2/4\right)\right)=\left[f(0),\lim_{x\to\left(\pi^2/4\right)^-}f(x)\right). \qquad (5)$$

Υπολογίζουμε λοιπόν το όριο της f, καθώς $x\to\frac{\pi^2}{4}^-$:

$$\lim_{x\to\left(\pi^2/4\right)^-}f(x)=\lim_{x\to\left(\pi^2/4\right)^-}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)}\overset{u=\sqrt{x}}{=}\lim_{u\to(\pi/2)^-}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(u)}. \qquad (6)$$

Ισχύει όμως

$$\lim_{u\to(\pi/2)^-}\sigma\upsilon\nu^2(u)=\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

και φυσικά $\sigma\upsilon\nu^2(u)>0$, καθώς $u\to\frac{\pi}{2}^-$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το όριο της σχέσης (6) ισούται με $+\infty$. Από την (5) έπεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι ίσο με $f(A)=\left[f(0),+\infty\right)=\left[1,+\infty\right)$.

Δ3. Η εκφώνηση του ερωτήματος μοιάζει πολύ με τη γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ., οπότε θα προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το θεώρημα. Συγκεκριμένα, θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{12}{\pi}\right)^2.$$

Ισχύει $\left[\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}\right] \subseteq A$, οπότε ισχύουν τα εξής:

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}\right]$, αφού είναι συνεχής σε όλο το A.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}\right)$, αφού είναι παραγωγίσιμη σε όλο το A.

Έπεται λοιπόν από το Θ.Μ.Τ. ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{9}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{\pi^2}{9}\right) - f\left(\frac{\pi^2}{16}\right)}{\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16}}.$$

Ισχύει όμως

$$f\left(\frac{\pi^2}{9}\right) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

και

$$f\left(\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$$

και $\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{7\pi^2}{144}$, οπότε έπεται από την παραπάνω ισότητα ότι

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{\pi^2}{9}\right) - f\left(\frac{\pi^2}{16}\right)}{\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16}} = \frac{4-2}{\frac{7\pi^2}{144}} = \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{12}{\pi}\right)^2,$$

όπως θέλαμε. Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $144 = 12^2$.

Δ4. Όπως δείξαμε στο Ερώτημα Δ3, η f παίρνει μόνο θετικές τιμές (για την ακρίβεια, μεγαλύτερες ή ίσες του 1). Επομένως, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E=\int_0^{\pi^2/9}|f(x)|dx=\int_0^{\pi^2/9}f(x)dx=\int_0^{\pi^2/9}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\sqrt{x}\right)}dx \qquad (7)$$

Κάνουμε και πάλι την αλλαγή μεταβλητής $u=\sqrt{x}$, που έχει αποδειχτεί πολύ χρήσιμη και σε προηγούμενα ερωτήματα. Ισχύει τότε

$$du=\left(\sqrt{x}\right)'dx=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2u}dx$$

άρα $dx=(2u)du$. Υπολογίζουμε τα νέα όρια ολοκλήρωσης:

- Για $x=0$ ισχύει $u=0$.
- Για $x=\dfrac{\pi^2}{9}$ ισχύει $u=\dfrac{\pi}{3}$.

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=(\varepsilon\varphi(x))'$, προκύπτει από τη σχέση (7) ότι

$$E=\int_0^{\pi/3}2u\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(u)}du=\int_0^{\pi/3}(\varepsilon\varphi(u))'\cdot 2udu=\left[2u\varepsilon\varphi(u)\right]_0^{\pi/3}-\int_0^{\pi/3}(2u)'\varepsilon\varphi(u)du$$

$$=\frac{2\pi}{3}\cdot\sqrt{3}-2\int_0^{\pi/3}\varepsilon\varphi(u)du=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}-2\int_0^{\pi/3}\frac{\eta\mu(u)}{\sigma\upsilon\nu(u)}du=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}-2\int_0^{\pi/3}-\frac{(\sigma\upsilon\nu(u))'}{\sigma\upsilon\nu(u)}du$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\int_0^{\pi/3}(\ln(\sigma\upsilon\nu(u)))'du=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+2\left[\ln(\sigma\upsilon\nu(u))\right]_0^{\pi/3}\ \boxed{=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}+2\ln\frac{1}{2},}$$

όπου ενδιάμεσα χρησιμοποιήσαμε και την ταυτότητα $\varepsilon\varphi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$.