

Θέματα Γ

Κεντρικές ελαστικές κρούσεις

1.Γ.1

α. Οι ταχύτητες μετά την κεντρική ελαστική κρούση δίνονται από τις σχέσεις

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_1' = 2 \text{ m/s} , \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_2' = 8 \text{ m/s}$$

β. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας μάζας m_1 είναι

$$\Delta p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1 \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = -8 \text{ kgm/s}$$

γ. Η επί τοις % μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας με μάζα m_1 είναι

$$\frac{\Delta K_1}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} 100\% = -\frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} 100\% \Rightarrow \frac{\Delta K_1}{K_1} 100\% = -\frac{800}{9}\%$$

δ. Η μέση δύναμη που ασκήθηκε στη σφαίρα μάζας m_1 , συνδέεται με τη μεταβολή της ορμής της με τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής

$$\Sigma F_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = -800 \text{ N}$$

και έχει φορά αντίθετη της αρχικής της ταχύτητας.

1.Γ.2

α. Οι ταχύτητες μετά την κεντρική ελαστική κρούση δίνονται από τις σχέσεις

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_1' = -2 \text{ m/s} , \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_2' = 4 \text{ m/s}$$

β. Η επί τοις % μεταβολή της ορμής της σφαίρας μάζας m_1 είναι

$$\frac{\Delta p_1}{p_1} 100\% = \frac{m_1 v_1' - m_1 v_1}{m_1 v_1} 100\% = \left(\frac{v_1'}{v_1} - 1 \right) 100\% \Rightarrow \frac{\Delta p_1}{p_1} 100\% = \left(\frac{-2}{6} - 1 \right) 100\% \Rightarrow \frac{\Delta p_1}{p_1} 100\% = -\frac{400}{3}\%$$

γ. Η επί τοις % μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας με μάζα m_1 είναι

$$\frac{\Delta K_1}{K_1} 100\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1} 100\% = -\frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} 100\% \Rightarrow \frac{\Delta K_1}{K_1} 100\% = -\frac{800}{9}\%$$

δ. Οι σφαίρες κινούνται αντίρροπα. Η πρώτη διανύει απόσταση $x_1 = |v_1'| t = 6 \text{ m}$,

η δεύτερη $x_2 = v_2' t = 12 \text{ m}$.

Η απόσταση των δύο σφαιρών είναι $d = x_1 + x_2 = 18 \text{ m}$.

1.Γ.3

α. Οι ταχύτητες μετά την κεντρική ελαστική κρούση δίνονται από τις σχέσεις

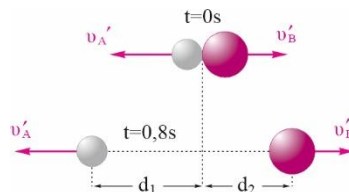
$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A \Rightarrow v'_A = -6 \text{ m/s} , \quad v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A \Rightarrow v'_B = 4 \text{ m/s}$$

β. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας μάζας m_A είναι

$$\Delta p_A = m_A v'_A - m_A v_A \quad \text{ή} \quad \Delta p_A = [0,5(-6) - 0,5 \cdot 10] \text{ kgm/s} \Rightarrow \Delta p_A = -8 \text{ kgm/s}$$

γ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της m_A που μεταφέρθηκε στην m_B είναι

$$\pi \% = \frac{K'_B}{K_A} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_B v'^2_B}{\frac{1}{2} m_A v^2_A} 100\% \Rightarrow \pi \% = 64\%$$



$$\delta. \text{ Απέχουν } d = d_1 + d_2 = |v'_A| t + v'_B t \Rightarrow d = 8 \text{ m} .$$

1.Γ.4

α. Βρίσκουμε την ταχύτητα της Σ_2 πριν την κρούση και έπειτα το μέτρο της ορμής του συστήματος

$$v'_2 = 0 \Rightarrow \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{2m_1}{m_2 - m_1} v_1 \Rightarrow v_2 = -2 \text{ m/s}$$

$$\vec{p}_{\text{ολ}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Επειδή τα δύο σώματα κινούνται στην ίδια διεύθυνση

$$p_{\text{ολ}} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 2 \text{ kg} \left(-2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \Rightarrow p_{\text{ολ}} = -3 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \Rightarrow |p_{\text{ολ}}| = 3 \text{ kgm/s}$$

β. Η ταχύτητα της Σ_1 μετά την κρούση είναι

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \Rightarrow v'_1 = -3 \text{ m/s}$$

γ. Τα μέτρα των μεταβολών των ορμών των δύο σφαιρών είναι ίσα

$$|\Delta p_1| = |\Delta p_2| = |m_1 v'_1 - m_1 v_1| \Rightarrow |\Delta p_1| = |\Delta p_2| = 4 \text{ kgm/s}$$

δ. Η επί τοις εκατό μεταβολή στην κινητική ενέργεια της Σ_1 είναι

$$\pi_i \% = \frac{\Delta K_1}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 - \frac{1}{2} m_1 v^2_1}{\frac{1}{2} m_1 v^2_1} 100\% \Rightarrow \pi_i \% = \frac{800}{9} \%$$

και της Σ_2 είναι

$$\pi_2\% = \frac{\Delta K_2}{K_2} 100\% = \frac{\frac{1}{2}m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2}{\frac{1}{2}m_2 v_2^2} 100\% \Rightarrow \pi_2\% = -100\%$$

1.Γ.5

$$\alpha. v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_1' = -\frac{v_1}{7}, \quad v_1'' = \frac{v_1}{5}$$

$$\beta. \Delta v_\alpha = v_1' - v_1 = -\frac{1}{7}v_1 - v_1 \Rightarrow \Delta v_\alpha = -\frac{8}{7}v_1 \Rightarrow |\Delta v_\alpha| = \frac{8}{7}v_1$$

$$\Delta v_\beta = v_1'' - v_1 = \frac{v_1}{5} - v_1 \Rightarrow \Delta v_\beta = -\frac{4}{5}v_1 \Rightarrow |\Delta v_\beta| = \frac{4}{5}v_1$$

$|\Delta v_\alpha| > |\Delta v_\beta|$, συμβαίνει στην κρούση με το βηρύλλιο.

$$\gamma. \Delta K_\alpha = K_1' - K_1 = \frac{1}{2}6m_p \left(-\frac{v_1}{7}\right)^2 - \frac{1}{2}6m_p v_1^2 \Rightarrow |\Delta K_\alpha| = \frac{144}{49}m_p v_1^2$$

$$\Delta K_\beta = K_1'' - K_1 = \frac{1}{2}6m_p \left(\frac{v_1}{5}\right)^2 - \frac{1}{2}6m_p v_1^2 \Rightarrow |\Delta K_\beta| = \frac{144}{50}m_p v_1^2$$

$|\Delta K_\alpha| > |\Delta K_\beta|$, συμβαίνει στην κρούση με το βηρύλλιο.

δ. Το ποσοστό μεταβολής της ορμής του πυρήνα λιθίου κατά τη δεύτερη κρούση είναι

$$\pi\% = \frac{\Delta p_{Li}}{p_{Li}} 100\% = \frac{p_{Li}' - p_{Li}}{p_{Li}} 100\% = \frac{m_{Li} \frac{v_1}{5} - m_{Li} v_1}{m_{Li} v_1} 100\% \Rightarrow \pi\% = \frac{\Delta p_{Li}}{p_{Li}} 100\% = -0,8 \cdot 100\% \Rightarrow \pi\% = -80\%$$

1.Γ.6

$$\alpha. v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_1' = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} v_1, \quad v_2' = \frac{2\lambda}{\lambda + 1} v_1$$

$$p_1' = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} p_1, \quad p_2' = m_2 \frac{2\lambda}{\lambda + 1} v_1 \Rightarrow p_2' = \frac{2}{\lambda + 1} p_1$$

$$\beta. \Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 \Rightarrow \Delta p_1 = p_1 \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} - 1 \right) \Rightarrow \Delta p_1 = \frac{-2}{\lambda + 1} p_1 \Rightarrow |\Delta p_1| = \frac{2}{\lambda + 1} p_1$$

Η παράσταση παίρνει μέγιστη τιμή όταν

$$\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0 \Rightarrow m_2 \gg m_1$$

γ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι

$$\Delta K_2 = K_2' - 0 = \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1}{\lambda} \left(\frac{2\lambda}{\lambda + 1} v_1 \right)^2 \Rightarrow \Delta K_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{4\lambda}{(\lambda + 1)^2} \Rightarrow \Delta K_2 = K_1 \frac{4\lambda}{(\lambda + 1)^2}$$

Για $\lambda=1$ προκύπτει $\Delta K_2 = K_1$.

δ. Ο λόγος των ορμών των δύο σφαιρών μετά την κρούση, αν $\lambda=3$, είναι

$$\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}p_1}{\frac{2\lambda}{\lambda+1}p_1} = \frac{\lambda-1}{2\lambda} \Rightarrow \frac{p_1'}{p_2'} = \frac{1}{3}$$

1.Γ.7

α. Οι ταχύτητες μετά την κεντρική ελαστική κρούση δίνονται από τις σχέσεις

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_1' = \frac{(1-3)6 + 2 \cdot 3 \cdot (-2)}{1+3} \text{ m/s} \Rightarrow v_1' = -6 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_2' = \frac{(3-1)(-2) + 2 \cdot 1 \cdot 6}{1+3} \text{ m/s} \Rightarrow v_2' = 2 \text{ m/s}$$

β. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας μάζας m_1 κατά την κρούση είναι

$$\Delta p_1 = p_1' - p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = -12 \text{ kgm/s}$$

γ. Εφαρμόζουμε τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα για τη σφαίρα μάζας m_1

$$F = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{m_1 v_1' - m_1 v_1}{\Delta t} \Rightarrow F = -600 \text{ N}$$

Το μείον δείχνει ότι η δύναμη F έχει φορά προς τα αριστερά.

δ. Το έργο της δύναμης που δέχτηκε η μάζα m_2 είναι

$$W_2 = K_2' - K_2 = \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \Rightarrow W_2 = 0$$

1.Γ.8

α. Δες θέμα 1.15

Στην κοντινότερη απόσταση $x_{\min}$ τα σωμάτια έχουν ταχύτητες ίδιου μέτρου. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ

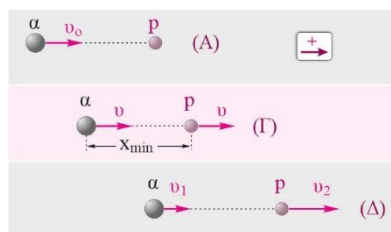
$$p_{(A)} = p_{(Γ)} \quad \text{ή} \quad m_\alpha v_\alpha = m_\alpha v + m_p v \quad \text{ή} \quad v = \frac{4v_\alpha}{5} = 8 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β. Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$K_{(Γ)} = \frac{1}{2}m_\alpha v^2 + \frac{1}{2}m_p v^2 = \frac{1}{2}4m_p v^2 + \frac{1}{2}m_p v^2 \Rightarrow$$

$$K_{(Γ)} = 5 \cdot \frac{1}{2}m_p \left(\frac{4v_\alpha}{5} \right)^2 = 1,6m_p v_\alpha^2 \Rightarrow K_{(Γ)} = 2,56 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

γ. Κατά τη διάρκεια της σκέδασης διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος



$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\eta\lambda,\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\eta\lambda,\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m_{\alpha}v_0^2 + 0 = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\eta\lambda,\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow U_{\eta\lambda,\tau\epsilon\lambda} = 6,4 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

δ. Έχουμε κρούση με το ένα σώμα ακίνητο. Οι τελικές ταχύτητες είναι

$$v_1 = \frac{m_{\alpha} - m_p}{m_{\alpha} + m_p} v_0 = 0,6 v_0 \Rightarrow v_1 = 0,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

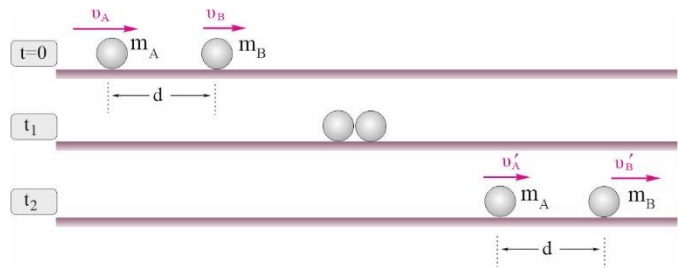
$$v_2 = \frac{2m_{\alpha}}{m_{\alpha} + m_p} v_0 = 1,6 v_0 \Rightarrow v_2 = 1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

1.Γ.9

α. Με σημείο αναφοράς τη θέση του σώματος Α, τη χρονική στιγμή $t=0s$, οι θέσεις των δύο σωμάτων δίνονται από τις σχέσεις

$$x_A = v_A t \quad (1)$$

$$x_B = d + v_B t \quad (2)$$



Τη στιγμή της σύγκρουσης $x_A = x_B$ και $t_1=6s$, οπότε από τις (1) και (2) παίρνουμε

$$d + v_B t = v_A t \Rightarrow v_A = 10 \text{ m/s}$$

β. Από τους τύπους της κεντρικής και ελαστικής κρούσης έχουμε

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_A + \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_B \Rightarrow v'_A = 9 \text{ m/s}$$

$$v'_B = \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} v_B + \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A \Rightarrow v'_B = 11 \text{ m/s}$$

γ. Κρούση ελαστική, άρα $\Delta K_A + \Delta K_B = 0$, οπότε το ποσοστό μεταφοράς ενέργειας από το σώμα Α στο σώμα Β είναι

$$\pi\% = \frac{K'_B - K_B}{K_A} 100\% = \frac{\frac{1}{2}m_B v'^2_B - \frac{1}{2}m_B v_B^2}{\frac{1}{2}m_A v_A^2} 100\% \Rightarrow \pi\% = 19\%$$

δ. Με σημείο αναφοράς τη θέση της σύγκρουσης, οι θέσεις των δύο σφαιρών δίνονται από τις σχέσεις

$$x_A = v'_A \Delta t, \quad x_B = v'_B \Delta t$$

Το χρονικό διάστημα αμέσως μετά την κρούση στο οποίο η απόσταση ανάμεσα στα σώματα γίνεται πάλι d είναι

$$x_B - x_A = d \Rightarrow v_B \Delta t - v_A \Delta t = d \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{v_B - v_A} = 6s$$

Άρα η χρονική στιγμή είναι

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 12s$$

1.Γ.10

α. Η αρχική ταχύτητα της σφαίρας Σ_1 είναι

$$\Delta p_1 = -1,8p_1 = -9kgm/s \Rightarrow -1,8m_1v_1 = -9kgm/s \Rightarrow v_1 = 5m/s$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 δίνει την τελική ταχύτητα της Σ_1

$$\Delta p_1 = -1,8p_1 \Rightarrow p'_1 - p_1 = -1,8p_1 \Rightarrow p'_1 = -0,8p_1 \Rightarrow m_1v'_1 = -0,8m_1v_1 \Rightarrow v'_1 = -0,8v_1 \Rightarrow v'_1 = -4m/s$$

β. Για την κεντρική ελαστική κρούση με ακίνητο το δεύτερο σώμα ισχύει

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow -0,8v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow m_2 = 9m_1 = 9kg$$

γ. Η ταχύτητα της δεύτερης σφαίρας μετά την κρούση είναι

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 1m/s$$

Ο λόγος των κινητικών ενεργειών μετά την κρούση είναι

$$\frac{K'_1}{K'_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1v'^2_1}{\frac{1}{2}m_2v'^2_2} = \frac{16}{9}$$

δ. Η τριβή για τις δύο σφαίρες είναι $T = \mu N = \mu mg$. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει την επιτάχυνσή τους

$$\Sigma F = ma \Rightarrow -T = ma \Rightarrow -\mu mg = ma \Rightarrow a = -\mu g = -5m/s^2$$

Η πρώτη σφαίρα θα σταματήσει όταν

$$v = |v'_1| + \alpha t_1 \Rightarrow 0 = 4 - 5t_1 \Rightarrow t_1 = 0,8s$$

Η δεύτερη σφαίρα θα σταματήσει όταν

$$v = v'_2 + \alpha t_2 \Rightarrow 0 = 1 - 5t_2 \Rightarrow t_2 = 0,2s$$

Άρα, η χρονική στιγμή που θα έχουν σταματήσει και οι δύο σφαίρες είναι η $t_1=0,8s$.

Η πρώτη μέχρι να σταματήσει διανύει ολικό διάστημα

$$s_1 = \frac{v_1'^2}{2|\alpha|} = 1,6m \text{ και η δεύτερη } s_2 = \frac{v_2'^2}{2|\alpha|} = 0,1m$$

Οι σφαίρες κινούνται αντίρροπα, άρα η απόσταση των δύο σφαιρών είναι $d=x_1+x_2=1,7m$.

1.Γ.11

α. Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = 0$$

Οι μεταβολές των ορμών των δυο σωμάτων είναι

$$\Delta p_1 = 0 - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = -2kgm/s$$

$$\Delta p_{ολ} = 0 \Rightarrow \Delta p_2 + \Delta p_1 = 0 \Rightarrow \Delta p_2 = -\Delta p_1 = 2kgm/s$$

$$\beta. v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 2m/s$$

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση μηχανικής ενέργειας μεταξύ των θέσεων αμέσως μετά την κρούση και μέγιστης συσπίρωσης του ελατηρίου

$$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} k \Delta \ell_{\max}^2 \Rightarrow \Delta \ell_{\max} = \sqrt{\frac{m_2 v_2'^2}{k}} \Rightarrow \Delta \ell_{\max} = 0,2m$$

γ. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της θέσης αμέσως μετά την πρώτη κρούση και αυτής όπου το ελατήριο έχει ξανά το φυσικό του μήκος (ίδιες θέσεις – πριν τη δεύτερη κρούση)

$$\text{ΑΔΜΕ: } \frac{1}{2} m_2 v_2''^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow |v_2'| = |v_2''| = 2m/s$$

δ. Μετά τη δεύτερη κρούση γίνεται πάλι ανταλλαγή ταχυτήτων

$$v_2''' = 0, v_1'' = 2\text{ m/s}$$

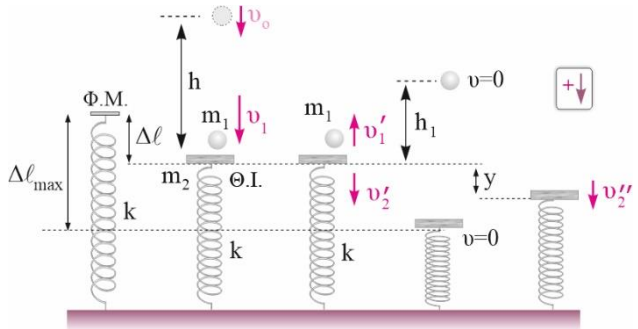
οπότε η μεταξύ τους απόσταση είναι $d = v_1'' \Delta t = 4\text{ m}$.

1.Γ.12

α. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για να βρούμε την ταχύτητα του Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση, θεωρώντας επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση της κρούσης, έχουμε

$$\frac{1}{2} m_1 v_o^2 + m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_o^2 + 2gh} = 4\text{ m/s}$$



Οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση είναι

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -2\text{ m/s}, v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 2\text{ m/s}$$

β. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για το Σ_1 μεταξύ της θέσης αμέσως μετά την κρούση και της θέσης του μέγιστου ύψους

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = m_1 g h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{v_1'^2}{2g} = 0,2\text{ m}$$

γ. Βρίσκουμε τη συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του σώματος

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g - k \Delta \ell = 0 \Rightarrow \Delta \ell = 0,1\text{ m}$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση που το σώμα ισορροπεί μέχρι τη θέση μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_B + W_{F,\text{ελ}} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = m_2 g (\Delta \ell_{\text{max}} - \Delta \ell) + \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 - \frac{1}{2} k \Delta \ell_{\text{max}}^2 \Rightarrow$$

$$150 \Delta \ell_{\text{max}}^2 - 30 \Delta \ell - 4,5 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_{\text{max}} = 0,3\text{ m}$$

Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = m_2 g - k \Delta \ell_{\text{max}} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -60 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$$

δ. Όταν το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά 0,2m το σώμα απέχει από τη θέση ισορροπίας του $y = 0,1\text{m}$. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από τη θέση ισορροπίας μέχρι τη θέση της νέας συμπίεσης και έχουμε

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_B + W_{F_{\text{ελ}}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g y + \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 - \frac{1}{2} k (\Delta \ell + y)^2 \Rightarrow v_2' = \pm \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Επειδή το σώμα κατέρχεται δεκτή είναι η λύση $v_2' = \sqrt{3} \text{ m/s}$.

Η συνισταμένη των δυνάμεων στη θέση αυτή είναι

$$\Sigma F = m_2 g - k(\Delta \ell + y) \Rightarrow \Sigma F = -30 \text{ N}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F dy}{dt} = \Sigma F v \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -30\sqrt{3} \text{ J/s}$$

Κεντρικές ανελαστικές κρούσεις

1.Γ.13

α. Από την ορμή της σώματος με μάζα m_2 μετά την κρούση έχουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος

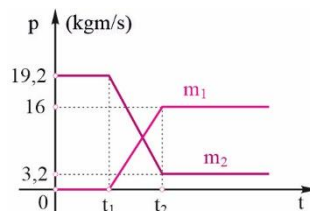
$$p_2' = m_2 V_{\kappa} \Rightarrow V_{\kappa} = \frac{p_2'}{m_2} = 2 \text{ m/s}$$

β. Για την πλαστική κρούση η ΑΔΟ δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_{\kappa} \Rightarrow v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} V_{\kappa} \Rightarrow v_1 = 12 \text{ m/s}$$

γ. Η αρχική ορμή της σώματος με μάζα m_1 είναι $p_1 = m_1 v_1 = 19,6 \text{ kgm/s}$

και η τελική $p_1' = m_1 V_{\kappa} = 3,2 \text{ kgm/s}$.

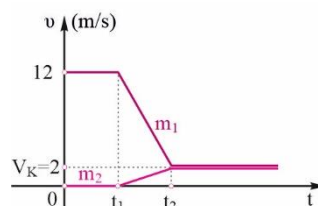


Στο διάγραμμα δείχνεται πώς μεταβάλλεται η ορμή των δύο σωμάτων με τον χρόνο.

δ. Στο διάγραμμα δείχνεται πώς μεταβάλλεται η ταχύτητα των δύο σωμάτων με τον χρόνο.

ε. Η θερμότητα που εκλύθηκε κατά την κρούση είναι

$$Q = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{\kappa}^2 \Rightarrow Q = 96 \text{ J}$$



1.Γ.14

α. Από την απώλεια της μηχανικής ενέργειας έχουμε

$$|\Delta K| = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow 3K_1 = K_1 + K_2 - 0 \Rightarrow K_2 = 2K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 2\frac{1}{2}m_1v_1^2 \Rightarrow m_2v_2^2 = 2m_1v_1^2 \quad (1)$$

Αφού το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται η αρχική ολική ορμή του συστήματος είναι μηδέν, οπότε

$$\text{έχουμε } p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_2v_2 - m_1v_1 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1v_1}{m_2} \quad (2)$$

$$\text{Από (1) και (2): } \frac{m_1}{m_2} = 2 \Rightarrow m_2 = 0,2\text{kg}$$

β. Από την ορμή της σφαίρας Σ₁, προκύπτει

$$p_1 = m_1v_1 \Rightarrow v_1 = 3\text{m/s}$$

$$\text{Από (2): } v_2 = 6\text{m/s}$$

$$\gamma. |\vec{F}| = \left| \frac{\Delta p_1}{\Delta t} \right| = \left| \frac{0 - p_1}{\Delta t} \right| \Rightarrow |\vec{F}| = 12\text{N}$$

δ. Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = 4\text{m/s}$$

Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι

$$\pi\% = \frac{\Delta K}{K_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2} 100\% \Rightarrow \pi\% = -\frac{100}{9}\%$$

1.Γ.15

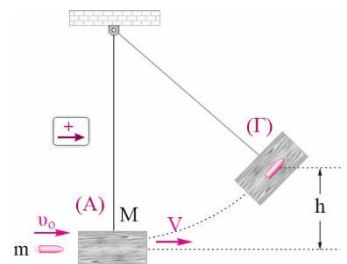
α. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση ενέργειας για το συσσωμάτωμα μεταξύ των θέσεων ελάχιστα μετά την κρούση και στο ψηλότερο σημείο

$$K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2}(m + M)V_K^2 = (m + M)gh \Rightarrow V_K = \sqrt{2gh} = 2\text{m/s}$$

β. Από την ΑΔΟ παίρνουμε

$$mv_0 = (m + M)V_K \quad \text{ή} \quad v_0 = 40\text{m/s}$$



$$\gamma. \frac{\Delta K_1}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{1}{2}mV_K^2}{\frac{1}{2}mv_o^2} = 1 - \frac{V_K^2}{v_o^2} \Rightarrow \frac{\Delta K_1}{K_1} = \frac{399}{400}$$

$$\delta. \frac{Q}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{1}{2}(m+M)V_K^2}{\frac{1}{2}mv_o^2} = 1 - \frac{m+M}{m} \frac{V_K^2}{v_o^2} \Rightarrow \frac{Q}{K_1} = \frac{M}{M+m} \Rightarrow \frac{Q}{K_1} = \frac{95}{100}$$

1.Γ.16

α. Το βλήμα θα εξέλθει από το ξύλο με ταχύτητα u και το ξύλο με αρχική ταχύτητα V θα συμπιέσει το ελατήριο μετατρέποντας τη μέγιστη κινητική του ενέργεια σε μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας για το ξύλο αμέσως μετά την έξοδο του βλήματος από αυτό και τη θέση μέγιστης συσπίρωσης του ελατηρίου

$$U_{ελ,max} = K_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}kx_{max}^2 = \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow V = x_{max} \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow V = 3 \text{ m/s}$$

β. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την κρούση

$$mv_o = mv + MV \quad \text{ή} \quad v = 50 \text{ m/s}$$

γ. Η θερμότητα Q που εκλύθηκε στο περιβάλλον είναι αριθμητικά ίση με τη διαφορά των κινητικών ενεργειών του βλήματος λίγο πριν την κρούση και του ξύλου και του βλήματος αμέσως μετά. Το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του βλήματος που μετατράπηκε σε θερμότητα είναι

$$\frac{Q}{K_{αρχ}} 100\% = \frac{\frac{1}{2}mv_o^2 - \left(\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2\right)}{\frac{1}{2}mv_o^2} = 92,625\%$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -kx_{max} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -45 \text{ kgm/s}^2 \text{ με φορά προς τα δεξιά.}$$

1.Γ.17

α. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για να βρούμε την ταχύτητα που έχει το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1v_1 = (m_1 + M)V \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ m/s}$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής του βλήματος κατά την κρούση είναι

$$|\Delta p_1| = |m_1 V - m_1 v_1| \Rightarrow |\Delta p_1| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ kg m / s}$$

β. Η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος είναι

$$\Delta K = \frac{1}{2}(M + m_1)V^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \Rightarrow \Delta K = -0,5 \text{ J}$$

γ. Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ αμέσως μετά τη σύγκρουση μέχρι τη θέση μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου

$$W_T + W_{F,ελ} = K_{τελ} - K_{αρχ} \Rightarrow -\mu(m_1 + M)gx_{\max} + 0 - \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = -\frac{1}{2}(m_1 + M)V^2 \Rightarrow k = 500 \text{ N / m}$$

δ. Η συνολική θερμότητα οφείλεται στην πλαστική κρούση και στις τριβές

$$Q_{\kappa\rho} = |\Delta K| = 0,5 \text{ J}$$

$$Q_{\tau\rho} = |W_T| = \mu(m_1 + M)gx_{\max} \Rightarrow Q_{\tau\rho} = \frac{1}{15} \text{ J}$$

$$Q = Q_{\kappa\rho} + Q_{\tau\rho} \Rightarrow Q = \frac{17}{30} \text{ J}$$

Το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του βλήματος που μετατράπηκε σε θερμότητα είναι

$$\pi\% = \frac{Q}{K_1} 100\% = \frac{Q}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2} 100\% = \frac{\frac{17}{30}}{\frac{2}{3}} 100\% \Rightarrow \pi\% = 85\%$$

1.Γ.18

α. Από τη διατήρηση της ορμής έχουμε

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow mv_0 = (m + M)V \Rightarrow V = \frac{mv_0}{m + M} = 2,5 \text{ m / s}$$

β. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της θέσης αμέσως μετά την κρούση και της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = \frac{1}{2}k\Delta\ell_{\max}^2 \Rightarrow \Delta\ell_{\max} = 0,5 \text{ m}$$

γ. Το ποσοστό μετατροπής της ενέργειας σε θερμότητα είναι

$$\pi\% = \frac{Q}{K_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m + M)V^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} 100\% \Rightarrow \pi\% = 97,5\%$$

δ. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της θέσης αμέσως μετά την κρούση και αυτής όπου το ελατήριο έχει ξανά το φυσικό του μήκος (ίδιες θέσεις) και έχουμε

$$\text{ΑΔΜΕ: } \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}(m+M)V'^2 \Rightarrow V' = \pm V \Rightarrow |V'| = 2,5 \text{ m/s}$$

ε. Βρίσκουμε τη συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση όπου ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του έχει μέτρο 50 kgm/s^2

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = \Sigma F = |F_{ελ}| = kx \Rightarrow x = 0,25 \text{ m}$$

$$\text{ΑΔΜΕ: } \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}(m+M)v^2 \Rightarrow |v| = 1,25\sqrt{3} \text{ m/s}$$

1.Γ.19

α. Το βλήμα βγαίνει από το ξύλο με ταχύτητα u και το ξύλο αμέσως μετά την κρούση έχει ταχύτητα V_1 .

Από την ΑΔΟ παίρνουμε

$$mv_0 = mv + MV_1 \quad \text{ή} \quad V_1 = \frac{m(v_0 - v)}{M} \Rightarrow V_1 = 2 \text{ m/s}$$

β. Από τη διατήρηση της ενέργειας για το σώμα μάζας M αμέσως μετά την κρούση προκύπτει

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \quad \text{ή}$$

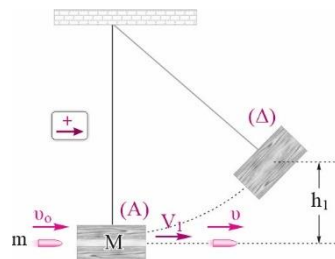
$$\frac{1}{2}MV_1^2 + 0 = 0 + Mgh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{V_1^2}{2g} = 0,2 \text{ m}$$

$$\gamma. W_F = K_{\beta}^{τελ} - K_{\beta}^{αρχ} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow W_F = -307,8 \text{ J}$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας M αμέσως μετά την κρούση είναι

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = F_{κεντρ} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = M \frac{V_1}{\ell} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 20 \text{ kgm/s}^2$$

με κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα πάνω.



1.Γ.20

α. Η μεταβολή της ορμής του σώματος μάζας m_1 είναι

$$\Delta p_1 = m_1 v'_1 - m_1 v_1 \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = m_1 (v'_1 - v_1) \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = -18 \text{ kgm/s}$$

$$\frac{\Delta p_1}{p_1} 100\% = \frac{-18}{12} 100\% \Rightarrow \frac{\Delta p_1}{p_1} 100\% = -150\%$$

$$\beta. \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0 \quad \text{ή} \quad \Delta p_2 = +18 \text{ kgm/s} \quad \text{ή} \quad m_2 v_2 - 0 = 18 \text{ kgm/s} \quad \text{ή} \quad v_2 = 3 \text{ m/s}$$

$$\gamma. Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow Q = 27 \text{ J}$$

$$\delta. \vec{F}_2 = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} \Rightarrow F_2 = 180 \text{ N}$$

1.Γ.21

$$\alpha. \frac{\Delta K}{K_1} 100\% = 40\% \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_K^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{40}{100} \quad (1)$$

$$\text{Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ παίρνουμε } m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_K \Rightarrow V_K = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

$$\text{Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει } \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{4}{10} \Rightarrow m_2 = 2 \text{ kg}$$

$$\beta. \Delta p_1 = p'_1 - p_1 \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = m_1 V_K - m_1 v_1 \quad (3)$$

Από τη (2) παίρνουμε

$$V_K = \frac{3}{2+3} 5 \text{ m/s} \Rightarrow V_K = 3 \text{ m/s}$$

Με αντικατάσταση στην (3) προκύπτει $\Delta p_1 = -6 \text{ kgm/s}$

$$\gamma. W_{\text{τριβων}} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_K^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow W_{\text{τριβων}} = -15 \text{ J}$$

δ. Από την ισορροπία στον άξονα γ προκύπτει

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = (m_1 + m_2) g \sin \varphi$$

$$\text{Η τριβή έχει μέτρο } T = \mu N = \mu (m_1 + m_2) g \sin \varphi$$

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του συσσωματώματος, μέχρι να σταματήσει, δίνει

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T + W_W \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_K^2 = -Tx - w_{\text{ολ.},x} x \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_K^2 = -\mu (m_1 + m_2) g \sin \varphi x - (m_1 + m_2) g \eta \mu \varphi x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} V_K^2 = \mu g \sin \varphi x + g \eta \mu \varphi x \Rightarrow x = \frac{V_K^2}{2g(\eta \mu \varphi + \mu \sin \varphi)} \Rightarrow x = \frac{9}{20} \text{ m}$$

1.Γ.22

$$\alpha. \frac{K_1}{K_{\text{συσ}}} = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2}{\frac{1}{2} (m + M) V_K^2} \quad (1)$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής παίρνουμε $V_K = \frac{mv_1}{m+M}$ (2)

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $\frac{K_1}{K_{\text{συσ}}} = \frac{m+M}{m} \Rightarrow \frac{K_1}{K_{\text{συσ}}} = 6$

β. $K_1 = 100\text{J} + K_{\text{συστ}} \quad \text{ή} \quad K_1 = 100\text{J} + \frac{K_1}{6} \Rightarrow K_1 = 120\text{J}$

γ. $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = 20\sqrt{3}\text{ m/s}$

Με αντικατάσταση στη (2) προκύπτει $V_K = \frac{20\sqrt{3}}{6}\text{ m/s}$.

δ. $W_F = K_{1\text{τελ}} - K_{1\text{αρχ}} = \frac{1}{2}mV_K^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow W_F = -\frac{350}{3}\text{J}$

1.Γ.23

α. Με διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το ξύλο μεταξύ των θέσεων (Α) και (Β) παίρνουμε

$$m_1 g \ell = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 \Rightarrow V_1 = 4 \frac{m}{s}$$

β. $\Delta \vec{p}_1 = \frac{75}{100} \vec{p}_1 \Rightarrow m_1 V_K - m_1 V_1 = \frac{3}{4} m_1 V_1 \Rightarrow$
 $V_K = 7\text{ m/s}$

γ. Το συσσωμάτωμα εκτελεί κυκλική τροχιά

$$\Sigma F = F_{\text{κεντρ}} \Rightarrow T - (m_1 + m_2)g = \frac{(m_1 + m_2)V_K^2}{\ell} \Rightarrow$$

$$T = (m_1 + m_2)g + \frac{(m_1 + m_2)V_K^2}{\ell} \quad (1)$$

Η μάζα m_2 βρίσκεται με διατήρηση τη ορμής για την κρούση

$$m_1 V_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V_K \quad \text{ή} \quad m_2 = 0,05\text{kg}$$

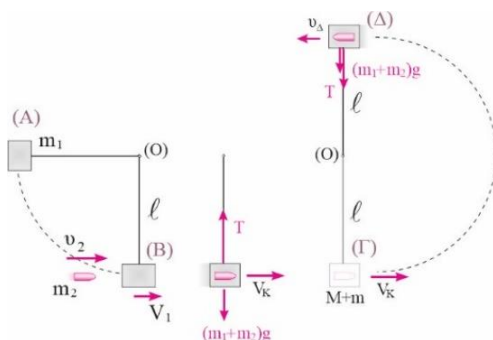
Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $T = 142,5\text{N}$

δ. Για τη διέλευση του συσσωματώματος από τη υψηλότερο σημείο της τροχιάς, ισχύει

$$\Sigma F = F_{\text{κεντρ}} \Rightarrow T + (m_1 + m_2)g = \frac{(m_1 + m_2)v_\Delta^2}{\ell} \Rightarrow T = \frac{(m_1 + m_2)v_\Delta^2}{\ell} - (m_1 + m_2)g \quad (2)$$

Για να είναι το νήμα τεντωμένο θα πρέπει να ισχύει

$$T \geq 0 \Rightarrow \frac{(m_1 + m_2)v_\Delta^2}{\ell} - (m_1 + m_2)g \geq 0 \Rightarrow v_\Delta \geq \sqrt{8}\text{ m/s}$$



Με διατήρηση της ενέργειας για το συσσωμάτωμα μεταξύ των θέσεων (Γ) και (Δ) βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος στη θέση (Δ)

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_K^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_\Delta^2 + (m_1 + m_2)g2\ell \Rightarrow v_\Delta = \sqrt{17} \text{ m/s}$$

Άρα θα γίνει ανακύκλωση με το νήμα τεντωμένο.

Σχόλιο: Με αντικατάσταση στη σχέση (2) της ταχύτητας v_Δ μπορούμε να βρούμε την τάση του νήματος στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς, $T_\Delta = 22,5 \text{ N}$.

1.Γ.24

α. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης αμέσως μετά την κρούση και της θέσης μέγιστης ανύψωσης και με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας τη χαμηλότερη θέση του ξύλου, παίρνουμε

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}(m + M)V_K^2 + 0 = 0 + (m + M)gh \Rightarrow V_K = \sqrt{2gh} \Rightarrow V_K = 2 \text{ m/s}$$

β. Η ΑΔΟ για την πλαστική κρούση δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow mv_0 = (m + M)V_K \Rightarrow v_0 = 680 \text{ m/s}$$

γ. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που έγινε θερμότητα είναι

$$\pi\% = \frac{Q}{K_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\epsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}} 100\% = 1 - \frac{\frac{1}{2}(m + M)V_K^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} 100\% = \frac{M}{m + M} 100\% \Rightarrow$$

$$\pi\% = \frac{1695}{17}\% = 99,7\%$$

δ. Μετά την κρούση η συνισταμένη δύναμη παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης

$$\Sigma F = F_K \Rightarrow T - (m + M)g = \frac{(m + M)V_K^2}{L} \Rightarrow T = 238 \text{ N}$$

Πλάγιες κρούσεις

1.Γ.25

α. Το επίπεδο είναι λείο, επομένως η γωνία πρόσπτωσης π είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης α . Επειδή $\alpha + \pi + 120^\circ = 180^\circ$ και $\pi = \alpha$ παίρνουμε $\alpha = \pi = 30^\circ$.

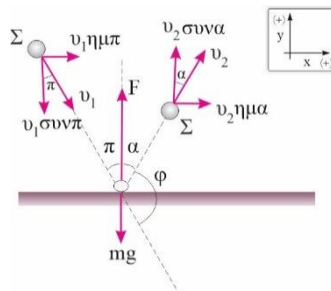
β. Η κρούση είναι ελαστική, άρα $v_1 = v_2$.

$$K = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} 0,08 \text{ kg} \cdot \left(10\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow K = 12 \text{ J}$$

γ. Η μεταβολή της ορμής οφείλεται μόνο στον άξονα y που είναι κάθετος στο δάπεδο γιατί μόνο στην άξονα αυτόν ασκείται στο σώμα ΣF . Επομένως

$$\Delta p = m v_2 \cdot \sigma \nu \alpha - (-m v_1 \cdot \sigma \nu \nu \pi) = 2 m v_2 \cdot \sigma \nu \alpha = 2 \cdot 0,08 \text{ kg} \cdot 10\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta p = 2,4 \text{ kgm/s}$$

$$\delta. \Sigma F = F - mg \Rightarrow F = \Sigma F + mg = \frac{\Delta p}{\Delta t} + mg \Rightarrow F = 240,8 \text{ N}$$



1.Γ.26

α. Από το διάγραμμα ορμών, εφαρμόζοντας το Π.Θ. έχουμε

$$(m_1 v_1)^2 = (m_1 v_1')^2 + (m_2 v_2')^2 \quad (1)$$

Η κρούση είναι ελαστική, άρα σύμφωνα με την ΑΔΜΕ

$$K_1 = K_1' + K_2' \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (2)$$

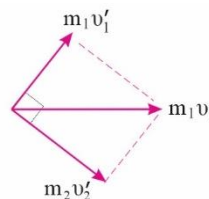
Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$.

β. Αντικαθιστώντας στη (2) τις τιμές παίρνουμε

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \Rightarrow v_2' = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 - m_1 v_1'^2}{m_2}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\gamma. \pi\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} 100\% = \frac{v_2'^2}{v_1^2} 100\% \Rightarrow \pi\% = 36\%$$

$$\delta. |\Delta p_1| = |\Delta p_2| = m_2 v_2' \Rightarrow |\Delta p_1| = 3 \text{ kgm/s}$$



1.Γ.27

α. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ σε άξονες

$$p_{αρχ,y} = p_{τελ,y} \Rightarrow$$

$$0 = m_1 v_1' \eta \mu \theta_1 - m_2 v_2' \eta \mu \theta_2 \Rightarrow v_1' = 4v_2'$$

$$p_{αρχ,x} = p_{τελ,x} \Rightarrow$$

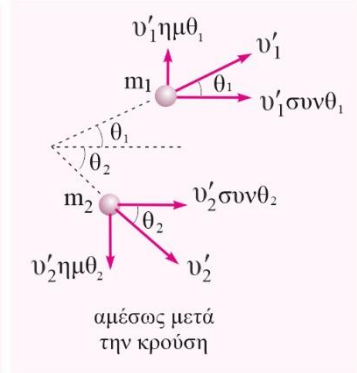
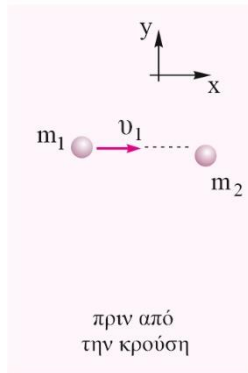
$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \sigma \upsilon \nu \theta_1 + m_2 v_2' \sigma \upsilon \nu \theta_2 \Rightarrow$$

$$2 \cdot 5 = 2v_1' \cdot 0,8 + 6v_2' \cdot 0,6 \Rightarrow$$

$$10 = 1,6v_1' + 3,6v_2' \Rightarrow$$

$$10 = 1,6 \cdot 4v_2' + 3,6v_2' \Rightarrow$$

$$v_2' = 1 \text{ m/s} , \quad v_1' = 4 \text{ m/s}$$



$$\beta. \Delta p_{ολ} = 0 \Rightarrow \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 = -m_2 v_2' \Rightarrow \Delta p_1 = -6 \text{ kgm/s}$$

σε κατεύθυνση αντίθετη της v_2' .

γ. Μετά από 1s κάθε σφαίρα έχει απομακρυνθεί από το σημείο σύγκρουσης κατά

$$d_1 = v_1' t = 4 \text{ m}, \quad d_2 = v_2' t = 1 \text{ m}$$

και επειδή οι κατευθύνσεις των ταχυτήτων είναι κάθετες, με το πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{17} \text{ m}$$

δ. Θα ελέγξουμε αν διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος

$$K_{αρχ} = K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow K_{αρχ} = 25 \text{ J}$$

$$K_{τελ} = K_1' + K_2' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow K_{τελ} = 19 \text{ J}$$

Άρα, η κρούση είναι ανελαστική και η θερμότητα που ελευθερώθηκε είναι

$$Q = K_{αρχ} - K_{τελ} = 6 \text{ J}$$

1.Γ.28

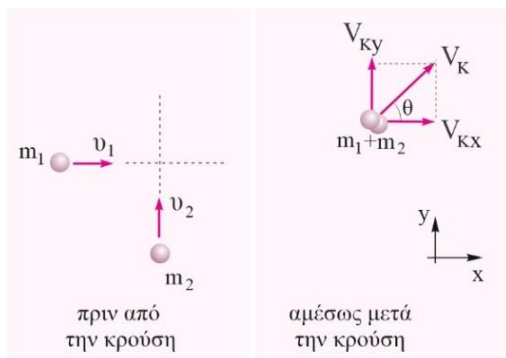
α. Σε όλες τις κρούσεις δύο σωμάτων ελεύθερων να κινηθούν, θεωρούμε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή, άρα $\Delta p_{ολ}=0$.

β. Η ΑΔΟ στον άξονα x δίνει

$$p_{αρχ,x} = p_{τελ,x} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_{κx} \Rightarrow V_{κx} = 4 \text{ m/s}$$

Για τη γωνία θ που σχηματίζει η ταχύτητα του συστήματος άνδρας – παιδί με την αρχική ταχύτητα του άνδρα ισχύει

$$\cos \theta = \frac{V_{κx}}{V_{κ}} = 2 \frac{\sqrt{5}}{5}$$



γ. Από το πυθαγόρειο θεώρημα για τις συνιστώσες της $V_{κ}$ προκύπτει

$$V_{κy} = \sqrt{V_{κ}^2 - V_{κx}^2} = 2 \text{ m/s}$$

Η ΑΔΟ στον άξονα y δίνει

$$p_{αρχ,y} = p_{τελ,y} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V_{κy} \Rightarrow v_2 = 6 \text{ m/s}$$

δ. Η θερμότητα που εκλύθηκε κατά την κρούση είναι

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{κ}^2 \Rightarrow Q = 864 \text{ J}$$

1.Γ.29

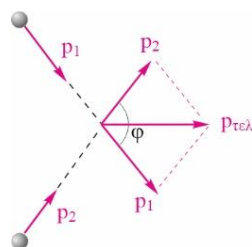
α. $K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m^2 v^2}{2m} \Rightarrow K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow m = 2 \text{ kg}$

β. Σύμφωνα με την ΑΔΟ

$$p_{τελ} = p_{αρχ} \Rightarrow p_1 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \cos \varphi} \Rightarrow$$

$$p^2 = p^2 + p^2 + 2 p^2 \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

γ. $p_{τελ} = (m_1 + m_2) V_{κ} = p_1$ ή $V_{κ} = 2,5 \text{ m/s}$



δ. $Q = K_{αρχ} - K_{τελ} = 2 \cdot 25 \text{ J} - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{κ}^2 \Rightarrow Q = 37,5 \text{ J}$

1.Γ.30

α. Άξονας x: $mv = 2mv_{2x} \Rightarrow v_{2x} = \frac{v}{2}$ (1)

Άξονας y: $0 = mv_1 - 2mv_{2y} \Rightarrow v_{2y} = \frac{v_1}{2}$ (2)

Η κρούση είναι ελαστική, άρα

$$K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}2mv_2^2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + 2v_2^2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + 2(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) \quad (3)$$

Από τις (1),(2), (3) παίρνουμε $v_1=1\text{m/s}$.

Από τη (2) έχουμε $v_{2y} = 0,5\text{m/s}$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} \Rightarrow v_2 = 1\text{m/s}$$

β. Αν ϕ η γωνία που σχηματίζει η v_2 με τον οριζόντιο άξονα x είναι

$$\epsilon\phi\phi = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = 30^\circ$$

$$\gamma. \frac{K'_2}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2}2mv_2^2}{\frac{1}{2}mv^2} 100\% \Rightarrow \frac{K'_2}{K_1} 100\% = \frac{200}{3}\%$$

$$\delta. \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0 \quad \text{ή} \quad \Delta p_1 = -\Delta p_2 \quad \text{ή} \quad |\Delta p_1| = |\Delta p_2|$$

$\Delta p_2 = p_2$ ή $\Delta p_2 = 2mv_2 = 2\text{kgm/s}$ και κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία $\phi=30^\circ$ με την αρχική διεύθυνση της ταχύτητας της σφαίρας με μάζα m.

Άρα $|\Delta p_1| = |\Delta p_2| = 2\text{kgm/s}$ με κατεύθυνση αντίθετη της p_2 .

1.Γ.31

α. Από τη διατήρηση της ορμής στον οριζόντιο άξονα έχουμε

$$m_A v_A = m_A v'_A \sin \theta_A + m_B v'_B \sin \theta_B \Rightarrow$$

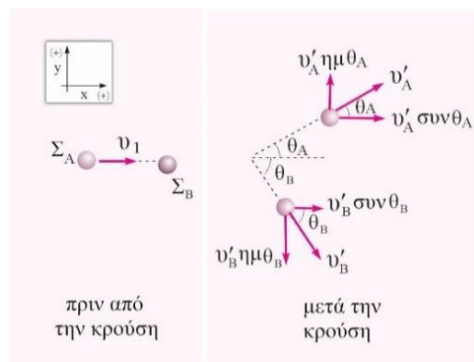
$$16 = \sqrt{3}v'_A + 2v'_B \quad (1)$$

Από τη διατήρηση της ορμής στον κατακόρυφο άξονα έχουμε

$$0 = m_A v'_A \eta \mu \theta_A - m_B v'_B \eta \mu \theta_B \Rightarrow v'_A = 2\sqrt{3}v'_B \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε

$$v'_A = 4\sqrt{3}\text{m/s}, \quad v'_B = 2\text{m/s}$$



β. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Α είναι

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}} = \vec{p}_{\text{τελ}} + (-\vec{p}_{\text{αρχ}})$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας Α και της σφαίρας Β είναι

$$|\Delta \vec{p}_A| = |\Delta \vec{p}_B| = \sqrt{p_A^2 + p_A'^2 + 2p_A p_A' \cos(180 - \theta_A)} =$$

$$\sqrt{m_A^2 v_A^2 + m_A^2 v_A'^2 + 2m_A v_A m_A v_A' \cos \frac{5\pi}{6}} \Rightarrow$$

$$|\Delta \vec{p}_A| = |\Delta \vec{p}_B| = 8 \text{ Kg m/s}$$

γ. Η οριζόντια μετατόπιση κάθε σφαίρας 2s μετά την κρούση είναι αντίστοιχα

$$\Delta x_A = v_A' \sin \theta_A t = 12 \text{ m}$$

$$\Delta x_B = v_B' \sin \theta_B t = 2 \text{ m}$$

Η κατακόρυφη μετατόπιση κάθε σφαίρας 2s μετά την κρούση είναι αντίστοιχα

$$\Delta y_A = v_A' \eta \mu \theta_A t = 4\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\Delta y_B = v_B' \eta \mu \theta_B t = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

Η οριζόντια απόσταση ανάμεσα στα δύο σώματα είναι

$$\Delta x = \Delta x_A - \Delta x_B = 10 \text{ m}$$

Η κατακόρυφη απόσταση ανάμεσα στα δύο σώματα είναι

$$\Delta y = \Delta y_A + \Delta y_B = 6\sqrt{3} \text{ m}$$

Άρα η απόσταση ανάμεσά τους είναι

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{208} \text{ m} \Rightarrow d = 14,42 \text{ m}$$

δ. Η θερμότητα που εκλύεται είναι

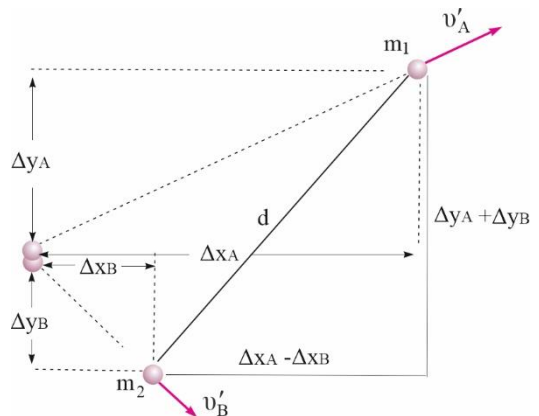
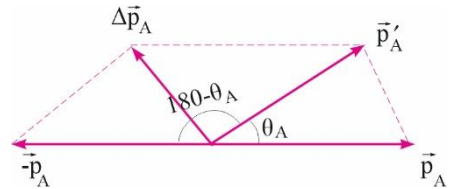
$$Q = \frac{1}{2} m_A v_A^2 - \frac{1}{2} m_A v_A'^2 - \frac{1}{2} m_B v_B'^2 = 8 \text{ J}$$

1.Γ.32

α. Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος παίρνουμε ότι

$$K_1 = K_1' + K_2' \Rightarrow \frac{p_1^2}{2m} = \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{p_2'^2}{2m} \Rightarrow p_{\text{αρχ}}^2 = p_1'^2 + p_2'^2 \quad (1)$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε



$$p_{αρχ} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\varphi} \Rightarrow p_{αρχ}^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\varphi \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε

$$2p_1p_2\cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

β. Από τη διατήρηση της ορμής στον άξονα γ' γ παίρνουμε

$$m|v_2|\eta\mu\omega = m|v_1|\eta\mu\vartheta \Rightarrow \frac{|v_1|}{\sqrt{3}}\eta\mu\omega = |v_1|\eta\mu\vartheta \Rightarrow \eta\mu\omega = \sqrt{3}\eta\mu\vartheta$$

$$\text{Όμως } \omega + \vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu\omega = \cos\vartheta$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει $\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

άρα $\vartheta = \pi/6 \text{ rad}$ και $\omega = \pi/3 \text{ rad}$.

γ. Από τη σχέση (1) προκύπτει

$$m^2v^2 = m^2v_1^2 + m^2v_2^2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad (3)$$

Όμως σύμφωνα με την εκφώνηση $|v_1| = \sqrt{3}|v_2| \quad (4)$

οπότε από τις (3) και (4) έχουμε

$$|v_1| = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m/s}, \quad |v_2| = \frac{2}{3} \text{ m/s}$$

$$\delta. \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0 \Rightarrow \Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

$$|\Delta p_2| = m|v_2| \Rightarrow |\Delta p_1| = \frac{2}{3} \text{ kgm/s}$$

Άρα η μεταβολή της ορμής της σφαίρας μάζας m_1 έχει μέτρο $\frac{2}{3} \text{ kgm/s}$ και κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία 300° σε σχέση με την αρχική της κατεύθυνση.

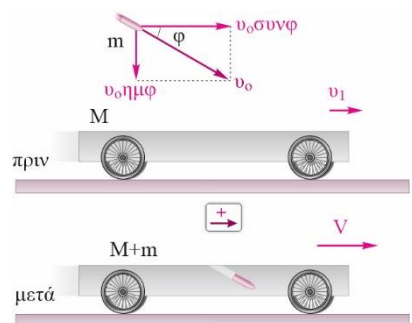
1.Γ.33

α. Το δάπεδο ασκεί στο καρότσι ισχυρότατη κατακόρυφη δύναμη προς τα πάνω με συνέπεια το ΣΦ_{εξ} στον άξονα αυτόν να μην είναι μηδέν.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ στον οριζόντιο άξονα

$$mv_0\cos\varphi + Mv_1 = (m+M)V \quad \eta$$

$$V = \frac{mv_0\cos\varphi + Mv_1}{m+M} \Rightarrow V = 1,48 \text{ m/s}$$



β. Η μεταβολή της ορμής του συστήματος ισούται με αυτήν του βλήματος στον άξονα y , γιατί στον άξονα x η ορμή του συστήματος διατηρείται. Αν θεωρήσουμε θετική φορά προς τα κάτω, είναι

$$\Delta p_{o\lambda} = \Delta p_{\beta\lambda} = 0 - mv_0 \eta \mu \varphi \Rightarrow \Delta p_{o\lambda} = -5\sqrt{3} \text{ kgm/s}$$

και αφού είναι αρνητική, έχει φορά προς τα πάνω, καθώς προς τα πάνω είναι και η δύναμη που ασκεί το δάπεδο στο σύστημα.

γ. Η μεταβολή της ορμής του βλήματος ισούται με το αντίθετο της μεταβολής του καρτσιού

$$\Delta p_{o\lambda} = 0 \Rightarrow \Delta p_{\beta\lambda} + \Delta p_{\kappa} = 0 \Rightarrow \Delta p_{\beta\lambda} = -\Delta p_{\kappa} = -(MV_{\kappa} - Mv_1) \Rightarrow \Delta p_{\beta\lambda} = -4,8 \text{ kgm/s}$$

με φορά προς τα αριστερά.

δ. Θερμότητα κατά την κρούση

$$Q = \frac{1}{2}mv_o^2 + \frac{1}{2}Mv_1^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow Q = 494 \text{ J}$$

1.Γ.34

α. Κατά τη διάρκεια μιας ελαστικής κρούσης αναπτύσσονται δυνάμεις μόνο κατά μήκος της διακέντρου.

Επειδή η σφαίρα 1 συνεχίζει την κίνησή της στην αρχική της οριζόντια κατεύθυνση, η συνολική δύναμη που δέχτηκε στον άξονα y είναι μηδέν. Άρα, λόγω της συμμετρίας πρέπει και η σφαίρα 3 να απομακρυνθεί με γωνία $\varphi_3=60^\circ$ ως προς τη διεύθυνση της u_1 . Έτσι έχουμε $\varphi_2=\varphi_3=\varphi=60^\circ$.

β. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για το σύστημα των τριών σφαιρών

$$\text{Άξονας } y: 0 = mv'_2y - mv'_3y$$

$$\text{όπου } v'_2y = v'_2 \eta \mu \varphi \text{ και } v'_3y = v'_3 \eta \mu \varphi$$

$$\text{Επομένως } v'_2 = v'_3 \quad (1)$$

$$\text{Άξονας } x: mv_1 = mv'_1 + mv'_2x + mv'_3x$$

$$\text{όπου } v'_2x = v'_2 \sigma \nu \eta \varphi \text{ και } v'_3x = v'_3 \sigma \nu \eta \varphi$$

$$\text{Επομένως } v_1 = v'_1 + 2v'_2 \sigma \nu \eta \varphi$$

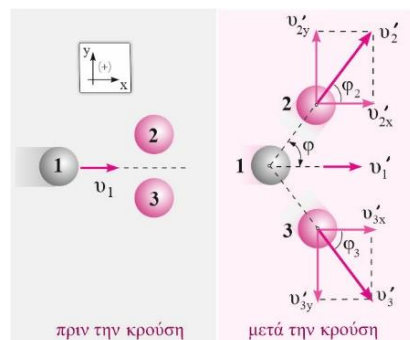
$$\text{Επειδή } \sigma \nu 60^\circ = 0,5 \text{ έχουμε}$$

$$v_1 = v'_1 + v'_2 \quad \text{ή} \quad v'_1 = v_1 - v'_2 \quad (2)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια του συστήματος των σφαιρών διατηρείται.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 + \frac{1}{2}mv_3'^2 \quad \text{ή λόγω της (1)}$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + 2v_2'^2 \quad (3)$$



Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3) έχουμε

$$v_1^2 = (v_1 - v_2')^2 + 2v_2'^2 \Rightarrow 2v_1v_2' = 3v_2'^2 \Rightarrow v_2' = \frac{2v_1}{3}$$

Άρα $v_2' = 4 \text{ m/s}$ και $v_3' = 4 \text{ m/s}$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2) έχουμε

$$v_1' = v_1 - v_2' \quad \text{ή} \quad v_1' = (6 - 4) \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v_1' = 2 \text{ m/s}$$

γ. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας 1 είναι

$$\Delta p_1 = p_1' - p_1 = mv_1' - mv_1 = -4 \text{ kg m/s}$$

δ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε από τη σφαίρα 1 στις σφαίρες 2 και 3 είναι ίσο με

$$\pi\% = \frac{K_2' + K_3'}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2}mv_2'^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} 100\% \Rightarrow \pi\% = \frac{32}{36} 100\% = \frac{800}{9}\%$$

1.Γ.35

α. Στον άξονα x η ορμή κάθε σφαίρας διατηρείται γιατί στον άξονα x δεν ασκούνται δυνάμεις

$$v_{1x} = v_{1x}' = v_1 \cos \phi_1 \quad \text{ή} \quad v_{1x}' = 0,5 \text{ m/s} \quad (1)$$

$$v_{2x} = v_{2x}' = v_2 \cos \phi_2 \quad \text{ή} \quad v_{2x}' = \sqrt{3} \text{ m/s} \quad (2)$$

β. γ-άξονας: οι μάζες των σωμάτων είναι ίδιες και η κρούση είναι ελαστική, άρα τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες

$$v_{1y}' = v_{2y} = 1 \text{ m/s} \quad \text{και} \quad v_{2y}' = v_{1y} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}$$

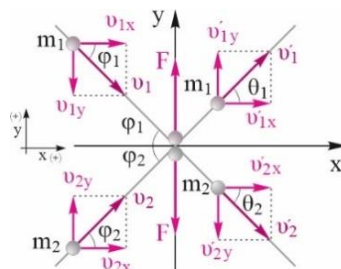
$$\gamma. v_1' = \sqrt{v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2} \Rightarrow v_1' = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ m/s}, \quad v_2' = \sqrt{v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2} \Rightarrow v_2' = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ m/s}$$

$$\varepsilon \phi_1 = \frac{v_{1y}'}{v_{1x}'} = \frac{1}{0,5} \Rightarrow \varepsilon \phi_1 = 2, \quad \varepsilon \phi_2 = \frac{v_{2y}'}{v_{2x}'} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon \phi_2 = \frac{1}{2}$$

δ. Στην ελαστική κρούση διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος και αυτό θα ελέγξουμε

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = 2,5 \text{ J}$$

$$K_{\tau\epsilon\lambda} = K_1' + K_2' = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \Rightarrow K_{\tau\epsilon\lambda} = 2,5 \text{ J} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda}$$



1.Γ.36

α. Θεωρούμε σύστημα τον αστροναύτη Α και το σφυρί (1^η φάση) και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow (M_A + m)v = 0 + mv_{\text{σφ}} \Rightarrow$$

$$v_{\text{σφ}} = \frac{(M_A + m)v}{m} = 17,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

β. Θεωρούμε σύστημα το σφυρί και τον αστροναύτη Β (2^η φάση) και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow mv_{\text{σφ}} + M_B v = (M_B + m)v'_B \Rightarrow$$

$$v'_B = \frac{mv_{\text{σφ}} + M_B v}{(M_B + m)} = \frac{70 \text{ m}}{72 \text{ s}}$$

γ. Θεωρούμε σύστημα το σφυρί και τον αστροναύτη Β (3^η φάση) και εφαρμόζουμε την ΑΔΟ

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \Rightarrow mv_{\text{σφ}} + M_B v = 0 + mv'_{\text{σφ}} \Rightarrow$$

$$v'_{\text{σφ}} = \frac{mv_{\text{σφ}} + M_B v}{(M_B + m)} = 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ. Σύμφωνα με την ΑΔΕ, η δαπάνη της ενέργειας είναι ίση με τη διαφορά της κινητικής ενέργειας του συστήματος αστροναύτες - σφυρί μετά την ακινητοποίησή τους και πριν το πέταγμα του σφυριού

$$E_{\text{δαπ}} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \quad (1)$$

$$K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2}(M_A + m)v^2 + \frac{1}{2}M_B v^2 = 17,5 \text{ J} , \quad K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}mv_{\text{σφ}}'^2 = 1225 \text{ J}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε $E_{\text{δαπ}} = 1207,5 \text{ J}$.

