

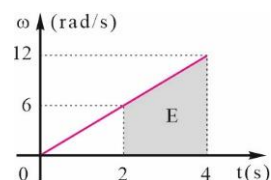
Θέματα Γ

Στροφική κίνηση στερεού γύρω από σταθερό άξονα

2.Γ.1

α. Για $t=0s$, $\omega=0\text{rad/s}$ Για $t_2=4s$, $\omega=12\text{rad/s}$

$$\beta. \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{12-0}{4-0} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\gamma\omega\nu} = 3\text{rad/s}^2$$

γ. $t_1=2s$, $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}t$ ή $\omega=6\text{rad/s}$ 

$$\Delta\theta \leftrightarrow \text{εμβαδόν} \quad \text{ή} \quad \Delta\theta = \frac{(6+12)2}{2} \text{rad} \quad \text{ή} \quad \Delta\theta=18\text{rad}$$

δ. Ο αριθμός των περιστροφών στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα είναι

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{18\text{rad}}{2\pi\text{rad/στροφή}} \Rightarrow N = \frac{9}{\pi} \text{ στροφές}$$

2.Γ.2

α. Οι γωνιακές επιταχύνσεις είναι

$$0s \leq t \leq 5s, \quad \alpha_{\gamma(1)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 1\text{rad/s}^2$$

$$5s \leq t \leq 10s, \quad \alpha_{\gamma(2)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0\text{rad/s}^2$$

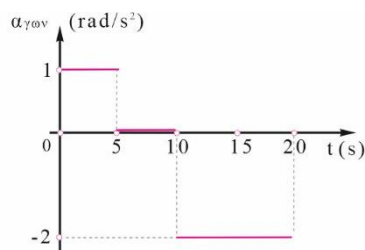
$$10s \leq t \leq 15s, \quad \alpha_{\gamma(3)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -2\text{rad/s}^2$$

Στο χρονικό διάστημα 15s-20s η κλίση της ευθείας είναι ίση με την κλίση στο χρονικό διάστημα από 10s-15s κάτι που σημαίνει ότι και η γωνιακή επιτάχυνση έχει την ίδια τιμή, άρα έχουμε

$$15s < t \leq 20s, \quad \alpha_{\gamma(4)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -2\text{rad/s}^2$$

Η γραφική παράσταση των γωνιακών επιταχύνσεων με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.

β. Η γωνιακή ταχύτητα με τον χρόνο είναι



$$0s \leq t \leq 5s, \omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma(1)}t \Rightarrow \omega = 5 + t \quad (\text{SI})$$

$$5s < t \leq 10s, \omega = 10 \text{ rad/s}$$

$$10s < t \leq 20s, \omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma(3)}\Delta t \Rightarrow \omega = 10 - 2(t - 10) \quad (\text{SI})$$

γ. Η γωνιακή ταχύτητα του στερεού τη χρονική στιγμή 20s είναι

$$\omega = 10 - 2(t - 10) = -10 \text{ rad/s}$$

Από το εμβαδό στο διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας - χρόνου βρίσκουμε τις γωνιακές μετατοπίσεις

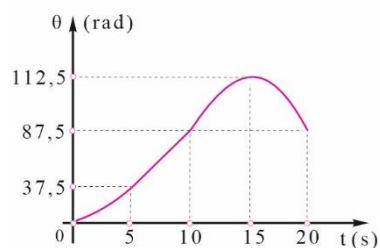
$$0s \leq t \leq 5s, \Delta\theta_1 = 37,5 \text{ rad}$$

$$5s < t \leq 10s, \Delta\theta_2 = 50 \text{ rad}$$

$$10s < t \leq 15s, \Delta\theta_3 = 25 \text{ rad}$$

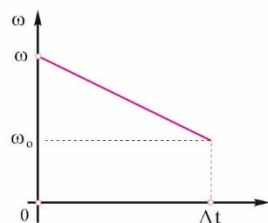
$$15s < t \leq 20s, \Delta\theta_4 = -25 \text{ rad}$$

Η γραφική παράσταση της γωνιακής μετατόπισης με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα



δ. Όταν ένα στερεό κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, τότε η γραφική παράσταση της γωνιακής του ταχύτητας με τον χρόνο έχει τη μορφή

Από το εμβαδό στην παραπάνω γραφική παράσταση βρίσκουμε τον τύπο της γωνιακής μετατόπισης



$$\Delta\theta = (\omega_0 + \omega) \cdot \frac{\Delta t}{2} = (\omega_0 + \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega v}| \Delta t) \cdot \frac{\Delta t}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta\theta = \omega_0 \Delta t - \frac{1}{2} |\alpha_{\gamma\omega v}| \Delta t^2 \quad (1)$$

Εάν το στερεό τελικά σταματάει να κινείται, τότε η τελική γωνιακή του ταχύτητα είναι μηδενική, οπότε έχουμε

$$\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega v}| \Delta t \Rightarrow 0 = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega v}| \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\omega_0}{|\alpha_{\gamma\omega v}|} \quad (3)$$

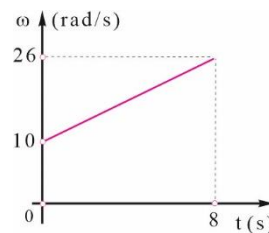
Από τις εξισώσεις (1) και (3) έχουμε
$$\Delta\theta = \frac{\omega_0^2}{2|\alpha_{\gamma\omega v}|} \quad (2)$$

2.Γ.3

α. Η γωνιακή ταχύτητα του τροχού χρονική στιγμή $t_1=8s$ είναι

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow \omega_1 = 26 \text{ rad/s}$$

β. Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.



γ. Η γωνιακή μετατόπιση στην περίπτωση της ομαλά επιταχυνόμενης περιστροφικής κίνησης είναι

$$\Delta\theta = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \Rightarrow \Delta\theta = 144 \text{ rad}$$

δ. Βρίσκουμε πρώτα τη γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή $t_2=10s$

$$\omega_2 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 \Rightarrow \omega_2 = 30 \text{ rad/s}$$

άρα η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου είναι

$$\alpha_{\kappa} = \frac{v_2^2}{R} = \omega_2^2 R = 270 \text{ m/s}^2$$

2.Γ.4

α. Η ομαλά μεταβαλλόμενη μεταφορική κίνηση περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$v = v_0 + at, \quad \Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Σε πλήρη αντιστοιχία για την ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση γράφουμε

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \quad (1), \quad \Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \quad (2)$$

Λύνουμε την (1) ως προς t και αντικαθιστούμε στη (2). Προκύπτει

$$\Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\theta} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = -1 \text{ rad/s}^2$$

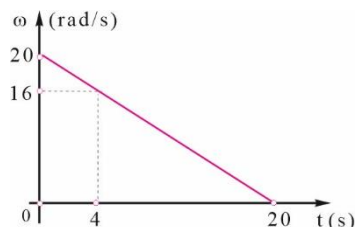
Το (-) δηλώνει ότι το διάνυσμα της $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτό του ω_0 .

$$\beta. \quad \omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}| \Delta t \Rightarrow 16 = 20 - \Delta t \text{ (SI)} \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$$

$$\gamma. \quad \omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}| \Delta t \Rightarrow \omega = 20 - t \text{ (SI)}$$

Λύσεις κεφαλαίου 2

Η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.



δ. Το χρονικό διάστημα μέχρι η μπάλα να σταματήσει να περιστρέφεται είναι

$$\Delta t = \frac{\omega_0}{|\alpha_{\gamma\omega\nu}|} = 20\text{s}$$

Η γωνία περιστροφής του στερεού σε όλο το χρονικό διάστημα κίνησης, σύμφωνα με τη σχέση (2) που βγάλαμε στην άσκηση 2.Γ.2, είναι

$$\Delta\theta_{\text{ολ}} = \frac{\omega_0^2}{2|\alpha_{\gamma\omega\nu}|} = 200\text{rad και ο αριθμός περιστροφών } \frac{100}{\pi} .$$

Το τελευταίο δευτερόλεπτο της κίνησης ξεκινά με ταχύτητα $\omega = 20 - 1 \cdot 19(\text{SI}) \Rightarrow \omega = 1\text{rad/s}$, οπότε η γωνία περιστροφής σε αυτό είναι

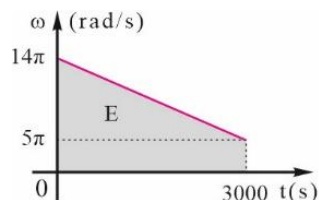
$$\Delta\theta_1 = \frac{\omega_1^2}{2|\alpha_{\gamma\omega\nu}|} = 0,5\text{rad και ο αριθμός περιστροφών } \frac{1}{4\pi} .$$

2.Γ.5

α. $\omega_1 = 2\pi f_1 = 14\pi \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 2\pi f_2 = 5\pi \text{ rad/s}$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{(5\pi - 14\pi) \text{ rad}}{50 \cdot 60 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = -0,003\pi \text{ rad/s}^2$$

β. Το διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας - χρόνου είναι όπως στο σχήμα.



γ. $\Delta\theta \leftrightarrow \text{εμβαδόν}$, $\Delta\theta = N2\pi$ ή

$$\frac{(14\pi + 5\pi) \cdot 3000}{2} = N \cdot 2\pi \Rightarrow N = 14.250 \text{ περιστροφές}$$

δ. Αφού ο δίσκος κάνει ομαλή στροφική κίνηση έχουμε ότι

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{19\pi \cdot 1500}{50 \cdot 60} \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = 9,5\pi \text{ rad/s}$$

2.Γ.6

α. $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{(60 - 20) \text{ rad}}{5 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 8 \text{ rad/s}^2$

β. $\Delta\theta \leftrightarrow \text{εμβαδόν}$

$$\Delta\theta = \frac{(60+20) \cdot 5}{2} \text{ rad} = 200 \text{ rad}$$

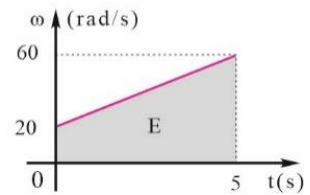
$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{100}{\pi}$$

γ. Το μήκος Δs της τροχιάς και η διαγραφόμενη γωνία $\Delta\theta$ συνδέονται με τη σχέση

$$\Delta s = r \Delta\theta = \frac{R}{2} \Delta\theta \Rightarrow \Delta s = 50 \text{ m}$$

δ. Η επιτρόχιος επιτάχυνση του σημείου είναι ίση με

$$\alpha_{\text{επιτρ}} = \alpha_{\text{γων}} \frac{R}{2} = 2 \text{ m/s}^2$$



2.Γ.7

α. $T_\delta = 60 \text{ s}$ οπότε $\omega_\delta = \frac{2\pi}{T_\delta} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s}$

$T_\lambda = 3.600 \text{ s}$ οπότε $\omega_\lambda = \frac{2\pi}{T_\lambda} = \frac{\pi}{1.800} \text{ rad/s}$

β. $v_\delta = \omega_\delta \ell_\delta = 5\pi \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$

$v_\lambda = \omega_\lambda \ell_\lambda = 5\pi \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$

γ. $\Delta\theta = \omega_\delta \Delta t$ ή $\Delta\theta = \pi \text{ rad}$

δ. Τα μήκη των τροχιών των άκρων των δεικτών βρίσκονται από τις σχέσεις

$$s_\lambda = v_\lambda t \text{ και } s_\delta = v_\delta t$$

Με απαλοιφή του t μεταξύ των δύο σχέσεων προκύπτει

$$s_\delta = \frac{v_\delta}{v_\lambda} s_\lambda = \frac{5\pi \cdot 10^{-4}}{5\pi \cdot 10^{-6}} 0,6 \text{ cm} \Rightarrow s_\delta = 60 \text{ cm}$$

2.Γ.8

α. $\alpha_{\text{γων}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 4 \text{ s}$

β. $\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\text{γων}} \Delta t^2 \Rightarrow \Delta\theta = 16 \text{ rad}$

$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{8}{\pi}$ περιστροφές

γ. $v_{\gamma p} = \omega R = 1,76 \text{ m/s}$

δ. Τη στιγμή $t=10 \text{ s}$ τα σημεία της πλευρικής επιφάνειας του κυλίνδρου περιστρέφονται με $v_{\gamma p} = 1,76 \text{ m/s}$. Άρα

$$\alpha_\kappa = \frac{v_{\gamma p}^2}{R} = \frac{1,76^2}{0,22} \text{ m/s}^2 \Rightarrow \alpha_\kappa = 14,08 \text{ m/s}^2$$

2.Γ.9

$$\alpha. \alpha_{\kappa} = \frac{v_{\gamma p}^2}{R} = \omega^2 R \Rightarrow \alpha_{\kappa} = 300 \text{ m/s}^2$$

$$\beta. \alpha_{\gamma p} = \alpha_{\gamma \omega v} R \quad (1)$$

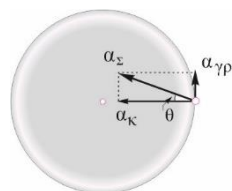
$$\alpha_{\gamma \omega v} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{20 - 0 \text{ rad}}{0,25 \text{ s}^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma \omega v} = 80 \text{ rad/s}^2$$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει $\alpha_{\gamma p} = 60 \text{ m/s}^2$.

$$\gamma. \alpha_{\Sigma} = \sqrt{\alpha_{\kappa}^2 + \alpha_{\gamma p}^2} \Rightarrow \alpha_{\Sigma} = \sqrt{300^2 + 60^2} \text{ m/s}^2 \Rightarrow$$

$$\alpha_{\Sigma} \approx 306 \text{ m/s}^2, \quad \varepsilon \phi \theta = \frac{\alpha_{\gamma p}}{\alpha_{\kappa}} \Rightarrow \varepsilon \phi \theta = \frac{1}{5}$$

$$\delta. v_{\gamma p} = \omega R \Rightarrow v_{\gamma p} = 15 \text{ m/s}$$



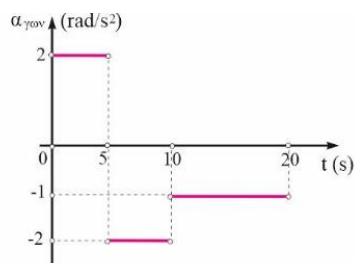
2.Γ.10

$$\alpha. \alpha_{\gamma \omega v 2} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{10 - 20 \text{ rad/s}}{10 - 5 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_{\gamma \omega v 2} = -2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\beta. \alpha_{\gamma \omega v, 1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{20 - 10 \text{ rad/s}}{5 - 0 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_{\gamma \omega v, 1} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\alpha_{\gamma \omega v, 2} = -2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\alpha_{\gamma \omega v, 3} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{0 - 10 \text{ rad/s}}{20 - 10 \text{ s}} \Rightarrow \alpha_{\gamma \omega v, 1} = -1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$



Το διάγραμμα γωνιακής επιτάχυνσης χρόνου είναι όπως στο σχήμα.

$$\gamma. \Delta \theta \leftrightarrow \varepsilon \mu \beta. = \left(\frac{10 + 20}{2} \right) 5 \text{ rad} + \left(\frac{10 + 20}{2} \right) 5 \text{ rad} + \frac{1}{2} 10 \cdot 10 \text{ rad} \Rightarrow$$

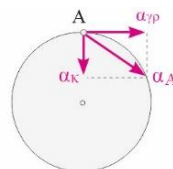
$$\Delta \theta = 200 \text{ rad}, \quad N = \frac{\Delta \theta}{2\pi} = \frac{100}{\pi} \text{ στρ.}$$

$$\delta. \omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma \omega v, 3} \Delta t \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$$

$$\alpha_{\kappa} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 4 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{\gamma p} = |\alpha_{\gamma \omega v, 3}| R \Rightarrow \alpha_{\gamma p} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_A = \sqrt{\alpha_{\kappa}^2 + \alpha_{\gamma p}^2} = \sqrt{17} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



2.Γ.11

$$\alpha. \omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu 1} \cdot t_1 = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu 2} \cdot t_1 = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\beta. \Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu 1} t_2^2 = \frac{1}{2} 1,5 \cdot 4^2 \text{ rad} \Rightarrow \Delta\theta_1 = 12 \text{ rad},$$

$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} = \frac{6}{\pi} \sigma\tau\rho.$$

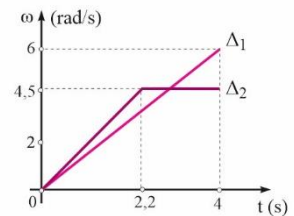
$$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu 2} \Delta t^2 + \omega_2 \Delta t = \frac{1}{2} 2 \cdot 2,2^2 \text{ rad} + 4,4 \cdot 1,8 \text{ rad} \Rightarrow$$

$$\Delta\theta_2 = 12,76 \text{ rad}, N_2 = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} = \frac{6,38}{\pi} \sigma\tau\rho$$

γ. Ο δίσκος Δ₂ που έχει μεγαλύτερη επιτάχυνση επιταχύνεται μέχρι τη στιγμή 2,2s και αποκτά τελική γωνιακή ταχύτητα 4,4rad/s, οπότε για τον δίσκο Δ₁ έχουμε

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu 1} \cdot t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{4,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{1,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}} = \frac{4,4}{1,5} \text{ s} \Rightarrow t_3 \approx 2,93 \text{ s}$$

$$\delta. \omega_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu 1} \cdot t_3 = 1,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \omega_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu 2} \cdot t_3 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



$$\frac{\alpha_{\kappa 1}}{\alpha_{\kappa 2}} = \frac{\omega_1^2 \cdot 2R}{\omega_2^2 \cdot R} = \frac{1,5^2 \cdot 2}{2^2 \cdot 1} = 1,125$$

2.Γ.12

α. Η ταχύτητα πτώσης του Σ είναι ίδια με τη γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας

Σε χρόνο $t=4\text{s}$ το σώμα έχει αποκτήσει ταχύτητα

$$v = \alpha_m t \Rightarrow v = 0,2 \text{ m/s}$$

$$\text{Όμως } v = v_{\gamma\rho} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$$

$$\beta. s = \frac{1}{2} \alpha_m t^2 \Rightarrow s = 0,4 \text{ m}$$

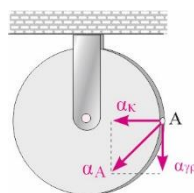
γ. Η επιτάχυνση του σώματος συμπίπτει με την επιτρόχια επιτάχυνση της τροχαλίας, οπότε

$$\alpha_{\gamma\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{\gamma\rho}}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 0,5 \text{ rad/s}^2$$

δ. Η επιτάχυνση ενός σημείου Α της περιφέρειας είναι το διανυσματικό άθροισμα της γραμμικής και της κεντρομόλου επιτάχυνσης

$$\alpha_{\kappa} = \omega^2 R = (\alpha_{\gamma\omega\nu} t)^2 R = 0,1 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_A = \sqrt{\alpha_{\kappa}^2 + \alpha_{\gamma\rho}^2} \Rightarrow \alpha_A = 0,05\sqrt{5} \text{ m/s}^2$$

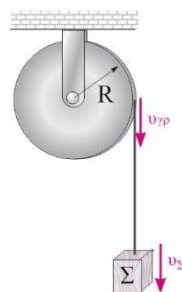


2.Γ.13

α. Η γωνιακή μετατόπιση είναι

$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} \Rightarrow \Delta\theta_1 = 2\pi N_1 = 12\pi \text{ rad}$$

Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος πρέπει σε κάθε στιγμή να είναι ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου στην περιφέρεια της τροχαλίας διότι το νήμα είναι διαρκώς τεντωμένο και δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Το σώμα κάνει ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική, οπότε η τροχαλία θα κάνει ομαλά επιταχυνόμενη στροφική και θα ισχύουν οι εξισώσεις



$$\Delta\theta_1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \quad (1)$$

$$v_{\gamma\rho} = \alpha_{\gamma\rho} t_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu} R t_1 \quad (2)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε

$$\frac{\Delta\theta_1}{v_{\gamma\rho}} = \frac{\frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2}{\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \cdot t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{2R\Delta\theta}{v} = 6\text{s}$$

β. Από τη σχέση (2) προκύπτει η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{v_{\gamma\rho}}{R \cdot t_1} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s}^2$$

γ. Ο αριθμός των περιστροφών είναι $N_2 = 4N_1 = 24$.

Η αντίστοιχη γωνιακή μετατόπιση είναι $\Delta\theta_2 = 2\pi N_2 = 48\pi \text{ rad}$.

Επομένως η χρονική στιγμή που έχει κάνει N_2 περιστροφές είναι

$$\Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2\Delta\theta_2}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}} = 12\text{s}$$

Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας την ίδια στιγμή είναι

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_2 = 8\pi \text{ rad/s}$$

δ. Το ζητούμενο χρονικό διάστημα θα είναι

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 12\text{s} - 6\text{s} \Rightarrow \Delta t = 6\text{s}$$

2.Γ.14

$$\alpha. \Delta\theta = N \cdot 2\pi = \frac{6}{\pi} 2\pi = 12 \text{ rad}$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2 \cdot \Delta\theta}{t_1^2} = 1,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\beta. \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow \omega = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\gamma. v_{\Sigma} = \omega R \Rightarrow v_{\Sigma} = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\delta. s = \Delta\theta \cdot R \Rightarrow s = 4,8\text{m}$$

Σύνθετη κίνηση στερεού σώματος

2.Γ.15

α. Η επιτάχυνση του αυτοκινήτου συμπίπτει με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας των τροχών του, δηλαδή $\alpha_{\text{cm}} = 3\text{m/s}^2$ και η γωνιακή του επιτάχυνση είναι

$$\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 10 \text{ rad/s}^2$$

$$\beta. v_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} t \Rightarrow v_{\text{cm}} = 15 \text{ m/s}$$

$$\gamma. v_{\text{cm}} = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_{\text{cm}}}{R} \Rightarrow \omega = 50 \text{ rad/s}$$

$$\delta. v = v_{\text{cm}} + \omega R \Rightarrow v = 30 \text{ m/s}$$

2.Γ.16

α. Η επιτάχυνση του αυτοκινήτου συμπίπτει με την επιτάχυνση του κέντρου μάζας των τροχών του.

Για το αυτοκίνητο

$$v = \alpha_{\text{cm}} t \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = \frac{v}{t} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = 8 \text{ rad/s}^2$$

$$\beta. \alpha_{\gamma\rho} = \alpha_{\text{cm}} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\gamma. \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Delta t^2 \Rightarrow \Delta\theta = 100 \text{ rad}$$

$$\delta. \Delta s = R \Delta \theta \Rightarrow \Delta s = 25 \text{ m}$$

2.Γ.17

α. Από την εξίσωση για την ολική μετατόπιση στην ομαλά επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση έχουμε

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \frac{v_o^2}{2|\alpha_{\text{cm}}|} \Rightarrow |\alpha_{\text{cm}}| = \frac{v_o^2}{2\Delta x_{\text{stop}}} = 5 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = -5 \text{ m/s}^2$$

β. Η γωνιακή επιτάχυνση των τροχών είναι

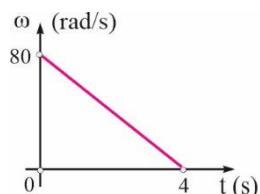
$$\alpha_{\text{γων}} = \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} = -20 \text{ rad/s}^2$$

γ. Η αρχική γωνιακή ταχύτητα των τροχών είναι

$$\omega_o = \frac{v_o}{R} = 80 \text{ rad/s}$$

δ. Η συνάρτηση που δείχνει πώς μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα των τροχών με τον χρόνο είναι

$$\omega = \omega_o - |\alpha_{\text{γων}}|t = 80 - 20t (\text{S.I.}), 0 \leq t \leq 4 \text{ s}$$



οπότε η γραφική παράσταση της γωνιακής ταχύτητας με τον χρόνο είναι η ακόλουθη.

2.Γ.18

α. Από την εξίσωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης για τη μεταφορική ταχύτητα του ποδηλάτου έχουμε ότι

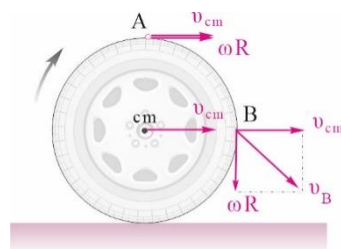
$$v_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} \Delta t = \alpha_{\text{γων}} \cdot R \cdot \Delta t \Rightarrow v_{\text{cm}} = 3,2 \text{ m/s}$$

β. Οι ταχύτητες των διαφόρων σημείων του τροχού δείχνονται στο σχήμα.

Η ταχύτητα του ανώτερου σημείου του τροχού είναι

$$v_A = 2v_{\text{cm}} = 6,4 \text{ m/s}$$

γ. Για το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B ισχύει ότι



$$v_B = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p}^2} = 3,2\sqrt{2} \text{ m/s}$$

δ. Η μετατόπιση του ποδηλάτου βρίσκεται από την εξίσωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης

$$\Delta x = \frac{1}{2} \alpha_{cm} \Delta t^2 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega v} R \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta x = 6,4 \text{ m}$$

2.Γ.19

α. $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega v} r = \frac{10}{3} \text{ m/s}^2$, $d = v_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{cm} t_1^2 = 45 \text{ m}$

β. $v_o = \omega_o r \Rightarrow \omega_o = \frac{v_o}{r} = 30 \text{ rad/s}$

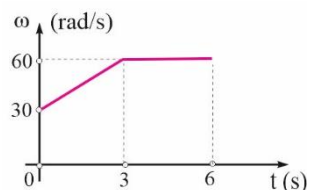
$$\omega = \omega_o + \alpha_{\gamma\omega v} t_1 = 60 \text{ rad/s}$$

γ. $\theta_1 = \frac{d}{r} = 135 \text{ rad}$, $\theta_2 = \omega \Delta t = 180 \text{ rad}$

$$\theta_{ολ} = \theta_1 + \theta_2 = N \cdot 2\pi \Rightarrow N = \frac{315}{2\pi} \text{ στροφές}$$

δ. Επειδή $v_A < v_{cm}$, το σημείο Α βρίσκεται κάτω από τον άξονα περιστροφής, οπότε

$$v_A = v_{cm} - v_{\gamma p} = \omega r - \omega x \Rightarrow 10 = 60 \frac{1}{3} - 60x \Rightarrow x = 1/6 \text{ m}, \quad y = r - x = 1/6 \text{ m}$$

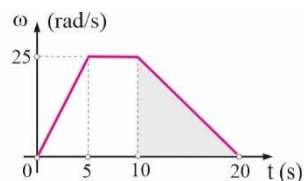


2.Γ.20

α. Βρίσκουμε πρώτα τη γωνιακή ταχύτητα του στερεού τη χρονική στιγμή 5s

$$\omega = \frac{v_{cm}}{R} = 25 \text{ rad/s}$$

άρα το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας με τον χρόνο είναι το ακόλουθο.



β. Οι γωνιακές επιταχύνσεις στα διάφορα χρονικά διαστήματα είναι

$$0 \text{ s} \leq t < 5 \text{ s}, \quad \alpha_{\gamma\omega v(1)} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = 5 \text{ rad/s}^2$$

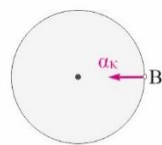
$$5 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s}, \quad \alpha_{\gamma\omega v(2)} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = 0 \text{ rad/s}^2$$

$$10 \text{ s} \leq t \leq 20 \text{ s}, \quad \alpha_{\gamma\omega v(3)} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = -2,5 \text{ rad/s}^2$$

Λύσεις κεφαλαίου 2

γ. Τη χρονική στιγμή 7s ο τροχός κάνει ομαλή στροφική κίνηση άρα το σημείο B έχει μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση, η οποία είναι ίση με

$$a_{\kappa} = \omega^2 R = 250 \text{ m/s}^2$$



δ. Ο ρυθμός μεταβολής της γραμμικής ταχύτητας του σημείου αυτού είναι η γραμμική του (επιτρόχιος) επιτάχυνση

$$a_{\gamma\rho} = a_{\gamma\omega\nu(3)} R = -1 \text{ m/s}^2$$

με φορά αντίθετη της κίνησης.

ε. Από το εμβαδό του διαγράμματος γωνιακής ταχύτητας - χρόνου βρίσκουμε τη γωνία περιστροφής

$$\Delta\theta = \frac{25 \cdot 10}{2} \text{ rad} = 125 \text{ rad}$$

οπότε ο αριθμός των περιστροφών είναι

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{62,5}{\pi}$$

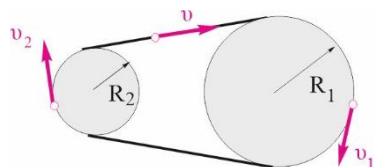
2.Γ.21

α. Η συχνότητα περιστροφής του μπροστινού δίσκου είναι

$$f_{\mu\pi\rho} = \frac{N}{t} = 2 \text{ Hz}$$

η γωνιακή ταχύτητα του μπροστινού δίσκου είναι

$$\omega_{\mu\pi\rho} = 2\pi f_{\mu\pi\rho} = 4\pi \text{ rad/s}$$



Ο μπροστινός και ο πίσω δίσκος συνδέονται με αλυσίδα, άρα τα σημεία της περιφέρειάς τους θα έχουν γραμμική ταχύτητα του ίδιου μέτρου.

Από την ισότητα των γραμμικών ταχυτήτων βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα του πίσω δίσκου

$$v_{\mu\pi\rho} = v_{\pi\sigma\omega} \Rightarrow \omega_{\mu\pi\rho} R_1 = \omega_{\pi\sigma\omega} R_2 \Rightarrow \omega_{\pi\sigma\omega} = \frac{R_1}{R_2} \omega_{\mu\pi\rho} = 16\pi \text{ rad/s}$$

β. Ο τροχός έχει την ίδια γωνιακή ταχύτητα περιστροφής με τον πίσω δίσκο αφού είναι συγκολλημένοι, άρα η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του τροχού έχει μέτρο

$$v = \omega_{\pi\sigma\omega} R = 5,6\pi \text{ m/s}$$

γ. Η ταχύτητα του ποδηλάτου είναι ίδια με αυτήν του κέντρου του τροχού

$$v_{cm} = v = \omega_{\pi\sigma\omega} R = 5,6\pi \text{ m/s}$$

δ. Η γωνιακή μετατόπιση των τροχών σε χρονικό διάστημα 10s είναι

$$\Delta\theta = \omega_{\pi\sigma\omega} \Delta t = \omega_{\pi\sigma\omega} \Delta t \Rightarrow \Delta\theta = 160\pi \text{ rad}$$

2.Γ.22

α. Η μέγιστη επιτάχυνση που μπορεί να αποκτήσει το αυτοκίνητο είναι

$$\alpha_{cm(max)} = \alpha_{\gamma\omega\nu(max)} R = 4 \text{ m/s}^2$$

β. Μετατρέπουμε πρώτα την ταχύτητα στο S.I.

$$v_{cm} = 108 \text{ Km/h} = 30 \text{ m/s},$$

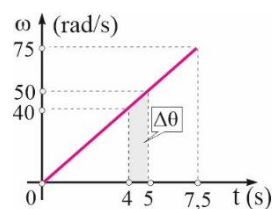
άρα το χρονικό διάστημα που απαιτείται ώστε το αυτοκίνητο να φθάσει τα 108Km/h είναι

$$v_{cm} = \alpha_{cm} \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_{cm}}{\alpha_{cm}} = 7,5 \text{ s}$$

γ. Η γωνιακή ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t = 10t \text{ (SI)}, 0 \leq t \leq 7,5 \text{ s} \quad (1)$$

και η γραφική της παράσταση δείχνεται δίπλα.



δ. Στο 5^ο δευτερόλεπτο ο χρόνος παίρνει τιμές $4 \text{ s} < t \leq 5 \text{ s}$. Με αντικατάσταση στη σχέση (1) βρίσκουμε $\omega_4 = 40 \text{ rad/s}$ και $\omega_5 = 50 \text{ rad/s}$.

Το εμβαδό του τραpezίου που σχηματίζεται μεταξύ των δύο χρονικών στιγμών αντιστοιχεί στη ζητούμενη γωνία στροφής

$$\Delta\theta = \frac{\omega_4 + \omega_5}{2} \Delta t = 45 \text{ rad}$$

και ο αριθμός των περιστροφών είναι $N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{22,5}{\pi}$

2.Γ.23

α. Μετατρέπουμε πρώτα την ταχύτητα στο S.I, η ταχύτητα του τρακτέρ τη στιγμή 5s είναι

Λύσεις κεφαλαίου 2

$$v_{cm} = 27 \text{ Km/h} = 7,5 \text{ m/s}$$

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας των τροχών είναι

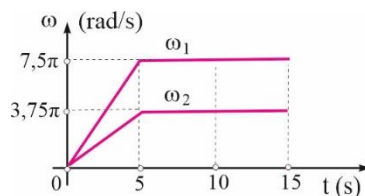
$$v_{cm} = \alpha_{cm} t \Rightarrow \alpha_{cm} = 1,5 \text{ m/s}^2$$

β. Για τον τροχό 1 η συνάρτηση της γωνιακής του ταχύτητας με τον χρόνο είναι

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{v_{cm}}{R_1} = \frac{\alpha_{cm}}{R_1} t \Rightarrow \omega_1 = 1,5\pi \text{ (S.I.)}, 0 \leq t \leq 5\text{s} \\ \omega_1 = 7,5\pi \text{ rad/s}, 5\text{s} < t \leq 15\text{s} \end{cases}$$

Για τον τροχό 2 η συνάρτηση της γωνιακής του ταχύτητας με τον χρόνο είναι

$$\begin{cases} \omega_2 = \frac{v_{cm}}{R_2} = \frac{\alpha_{cm}}{R_2} t \Rightarrow \omega_2 = 0,75\pi \text{ (S.I.)}, 0 \leq t \leq 5\text{s} \\ \omega_2 = 3,75\pi \text{ rad/s}, 5\text{s} < t \leq 15\text{s} \end{cases}$$

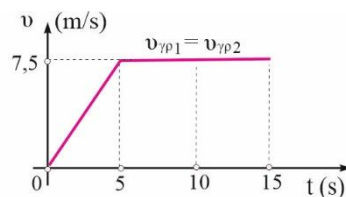


γ. Το διάγραμμα γωνιακής ταχύτητας - χρόνου για τους δύο τροχούς είναι όπως στο σχήμα.

δ. Οι γραμμικές ταχύτητες των τροχών σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} v = v_{\pi p1} = v_{\pi p2} = \alpha_{cm} t = 1,5t \text{ (S.I.)}, 0 \leq t \leq 5\text{s} \\ v = 7,5 \text{ m/s}, t > 5\text{s} \end{cases}$$

άρα οι γραφικές παραστάσεις τους είναι όπως στο σχήμα.



ε. Οι περιστροφές που έκαναν οι τροχοί στο χρονικό διάστημα από 0s έως 5s είναι

$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu(1)}\Delta t^2}{4\pi} = \frac{1,5\pi \cdot 5^2}{4\pi} \Rightarrow N_1 = 9,375$$

$$N_2 = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} = \frac{\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}\Delta t^2}{4\pi} = \frac{0,75\pi \cdot 5^2}{4\pi} \Rightarrow N_2 = 4,6875$$

Οι περιστροφές που έκαναν οι τροχοί στο χρονικό διάστημα από 5s έως 15s είναι

$$N'_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} = \frac{\omega_1\Delta t}{2\pi} = \frac{7,5\pi \cdot 10}{2\pi} \Rightarrow N'_1 = 37,5$$

$$N'_2 = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} = \frac{\omega_2\Delta t}{2\pi} = \frac{3,75\pi \cdot 10}{2\pi} \Rightarrow N'_2 = 18,75$$

άρα οι περιστροφές από 0s έως 15s είναι

$$N_{\text{ολ}(1)} = N_1 + N'_1 = 9,375 + 37,5 \Rightarrow N_{\text{ολ}(1)} = 46,875$$

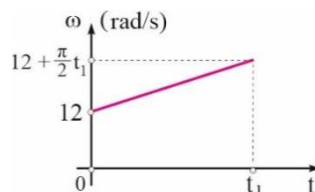
$$N_{\text{ολ}(2)} = N_2 + N'_2 = 4,6875 + 18,75 \Rightarrow N_{\text{ολ}(2)} = 23,4375$$

2.Γ.24

α. Η γωνιακή ταχύτητα με τον χρόνο αλλάζει σύμφωνα με τη σχέση

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu}\Delta t \Rightarrow \omega = 12 + \frac{2}{\pi}t \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας χρόνου είναι η ακόλουθη.



β. Βρίσκουμε τη γωνιακή μετατόπιση των τροχών

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow \Delta\theta = 2\pi N = 28\pi \text{ rad}$$

Βρίσκουμε το χρονικό διάστημα στο οποίο ολοκληρώνονται οι 14 περιστροφές

$$\Delta\theta = \omega_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\Delta t^2 \Rightarrow \frac{1}{\pi}t^2 + 12t - 28\pi = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 256$$

$$t = \frac{-12 \pm 16}{\frac{2}{\pi}} \text{ s} \Rightarrow t = 2\pi \text{ s}$$

Άρα η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή αυτή είναι

$$\omega = 12 + \frac{2}{\pi}t = 16 \text{ rad/s}$$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της γραμμικής ταχύτητας είναι η γραμμική επιτάχυνση

$$\alpha_{\gamma\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu}R = \frac{0,8}{\pi} \text{ m/s}^2$$

δ. Επειδή ο τροχός κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει η επιτρόχιος επιτάχυνση του κατώτερου σημείου και η μεταφορική του επιτάχυνση είναι αντίθετες, άρα η ολική επιτάχυνση είναι ίση με την κεντρομόλο

$$\alpha_{\text{ολ}} = \alpha_{\kappa} = \omega^2 R \Rightarrow \alpha_{\text{ολ}} = 102,4 \text{ m/s}^2$$

2.Γ.25

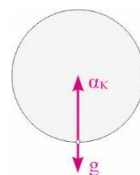
$$\alpha. v_{cm} = v_{\pi\rho} = 3\text{ m/s} , v_{cm} = \omega R \Rightarrow \omega = 30\text{ rad/s}$$

β. Στον κατακόρυφο άξονα η μπάλα εκτελεί ελεύθερη πτώση

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t = 0,4\text{ s}$$

$$\gamma. \Delta\theta = \omega\Delta t \Rightarrow \Delta\theta = 12\text{ rad}$$

δ. Το κατώτερο σημείο του τροχού έχει κεντρομόλο επιτάχυνση εξαιτίας της περιστροφής και μεταφορική επιτάχυνση που είναι κατακόρυφη και ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας, όπως δείχνεται στο σχήμα.



Άρα η επιτάχυνση του σημείου αυτού είναι

$$\vec{\alpha}_{ολ} = \vec{\alpha}_κ + \vec{g} \Rightarrow |\alpha_{ολ}| = \alpha_κ - g = \omega^2 R - g = 80\text{ m/s}^2$$

με φορά προς τα πάνω αφού το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της μεταφορικής επιτάχυνσης.

Η τιμή της επιτάχυνσης δεν εξαρτάται από τη φορά περιστροφής του στερεού αφού οι δύο επιταχύνσεις έχουν σταθερή κατεύθυνση είτε ο τροχός περιστρέφεται δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα.

2.Γ.26

$$\alpha. \omega_o = \frac{v_o}{R} = \frac{10\text{ m/s}}{0,5\text{ m}} \Rightarrow \omega_o = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\beta. |\alpha_{\gamma\omega\nu}| = \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right| = \frac{20 \text{ rad/s}}{5 \text{ s}} \Rightarrow |\alpha_{\gamma\omega\nu}| = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

$$\gamma. \Delta\vartheta = \omega_o t - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \Rightarrow \Delta\vartheta = 50\text{ rad}$$

$$N = \frac{\Delta\vartheta}{2\pi} = \frac{25}{\pi} \sigma\tau\rho.$$

$$\delta. \Delta\vartheta_1 = \omega_o t_1 - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \Rightarrow \Delta\vartheta_1 = 18\text{ rad}$$

$$N_1 = \frac{\Delta\vartheta_1}{2\pi} = \frac{9}{\pi} \sigma\tau\rho.$$