

Θέματα Β

Στροφική κίνηση στερεού γύρω από σταθερό άξονα

2.B.1 γ.

Όλα τα σημεία του δίσκου έχουν ίδια γωνιακή ταχύτητα ω . Το μήκος τόξου που διαγράφει το σημείο Α είναι

$$s_A = v_{\gamma p} t = (\omega r) t = \omega \cdot \frac{R}{3} \cdot \frac{12\pi}{\omega} \Rightarrow s_A = 4\pi R$$

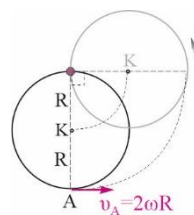
2.B.2 γ.

Από τη γραμμική ταχύτητα του Α βρίσκουμε την απόστασή του από τον άξονα περιστροφής

$$v_A = 2\omega R \Rightarrow \omega r = 2\omega R \Rightarrow r = 2R$$

Άρα, ο άξονας περιστροφής διέρχεται από το αντιδιαμετρικό σημείο του Α. Το κέντρο του δίσκου Κ απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση R. Το χρονικό διάστημα για να διαγράψει το Κ γωνία 90° είναι

$$\theta = \omega t \Rightarrow t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\pi/2}{v_A / 2R} \Rightarrow t = \frac{\pi R}{v_A}$$



2.B.3 γ.

Α' Τρόπος

Το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $\omega - t$, τον άξονα του χρόνου και τις χρονικές στιγμές $0s$ και t_2 , αντιστοιχεί στη γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ του δίσκου

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = \frac{\omega_0 + 2\omega_0}{2} t_1 + 2\omega_0 (t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta\theta = \frac{7}{2} \omega_0 t_1$$

Β' Τρόπος

Στην πρώτη φάση η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη στροφική με γωνιακή επιτάχυνση

$$\alpha_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\omega_0 - \omega_0}{t_1 - 0} \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{\omega_0}{t_1}$$

Η γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta_1$ σ' αυτή τη φάση είναι

$$\Delta\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\omega} t_1^2 \Rightarrow \Delta\theta_1 = \frac{3}{2} \omega_0 t_1$$

Στη δεύτερη φάση η κίνηση είναι ομαλή στροφική και η γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta_2$ είναι

$$\Delta\theta_2 = 2\omega_0 (t_2 - t_1) = 2\omega_0 t_1$$

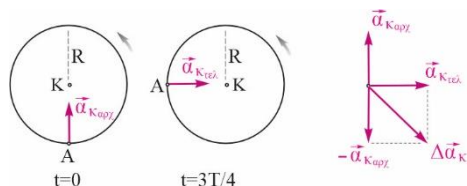
Άρα, η συνολική γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ του δίσκου είναι

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = \frac{7}{2}\omega_0 t_1$$

2.B.4 α.

Η μεταβολή της κεντρομόλου επιτάχυνσης ενός σημείου της περιφέρειας του δίσκου, είναι ίση με

$$\Delta\vec{a}_K = \vec{a}_{K,τελ} - \vec{a}_{K,αρχ} = \vec{a}_{K,τελ} + (-\vec{a}_{K,αρχ})$$



Το μέτρο της μεταβολής της κεντρομόλου επιτάχυνσης, Δa_K , είναι

$$|\Delta a_K| = \sqrt{a_{K,αρχ}^2 + a_{K,τελ}^2} \quad (1)$$

Επειδή η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή, η κεντρομόλος επιτάχυνση έχει σταθερό μέτρο και δίνεται από τη σχέση

$$a_K = \frac{v_p^2}{R} = \omega^2 R \Rightarrow a_K = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

Η σχέση (1) δίνει $|\Delta a_K| = \sqrt{a_{K,αρχ}^2 + a_{K,τελ}^2} = a_K \sqrt{2} \Rightarrow |\Delta a_K| = \frac{4\pi^2 R \sqrt{2}}{T^2}$

2.B.5 α.

Η γωνία που έχει διαγράψει το σημείο A δίνει τη στιγμή t_1

$$\theta_A = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \Rightarrow 5\pi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{10\pi}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}}$$

Τη χρονική στιγμή $2t_1$, το σημείο B έχει διαγράψει μήκος τόξου

$$s_B = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} (2t_1)^2 = \frac{1}{2}(\alpha_{\gamma\omega\nu} r) 4t_1^2 = 2\alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{R}{2} \sqrt{\left(\frac{10\pi}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}\right)^2} \Rightarrow s_B = 10\pi R$$

2.B.6 γ.

Η κίνηση του δίσκου είναι ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική και για να σταματήσει ο δίσκος θα περάσει χρονικό διάστημα $t_{ολ}$ που ισούται με

$$\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}| t_{ολ} \Rightarrow 0 = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega\nu}| t_{ολ} \Rightarrow t_{ολ} = \frac{\omega_0}{|\alpha_{\gamma\omega\nu}|}$$

Η γωνία που έχει διαγράψει μέχρι να σταματήσει είναι

$$\theta_{ολ} = \omega_0 t_{ολ} - \frac{1}{2} |\alpha_{\gamma\omega\nu}| t_{ολ}^2 \Rightarrow \theta_{ολ} = \frac{\omega_0^2}{2 |\alpha_{\gamma\omega\nu}|}$$

Η γωνία που έχει διαγράψει σε χρονικό διάστημα t_1 είναι

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2} |\alpha_{\gamma\omega\gamma}| t_1^2 = \omega_0 \frac{t_{\omega\lambda}}{3} - \frac{1}{2} |\alpha_{\gamma\omega\gamma}| \left(\frac{t_{\omega\lambda}}{3} \right)^2 = \frac{5\omega_0^2}{18 |\alpha_{\gamma\omega\gamma}|} \Rightarrow \theta_1 = \frac{5\theta_{\omega\lambda}}{9}$$

2.B.7 γ.

Για τις απομακρύνσεις y_1, y_2 ισχύει

$$y_1 = \Delta\theta R, \quad y_2 = \Delta\theta r$$

Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{R}{r} = 2 \Rightarrow y_2 = \frac{y_1}{2}$$

2.B.8 β.

Το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $\omega - t$, τον άξονα του χρόνου και τις χρονικές στιγμές 0 και t_3 , αντιστοιχεί στη συνολική γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ του δίσκου. Μέχρι τη στιγμή t_1 η γωνιακή ταχύτητα είναι θετική και η περιστροφή αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού, άρα η γωνιακή μετατόπιση είναι θετική

$$\Delta\theta_1 = \frac{\omega_0 t_1}{2}$$

Από τη στιγμή t_1 μέχρι τη στιγμή t_3 η γωνιακή ταχύτητα είναι αρνητική και η περιστροφή ίδια αυτής των δεικτών του ρολογιού, άρα η γωνιακή μετατόπιση είναι αρνητική

$$\Delta\theta_2 = -\frac{\omega_0 (t_2 - t_1)}{2} - \frac{\omega_0 (t_3 - t_2)}{2} = -\frac{3}{8} \omega_0 t_1 \Rightarrow \Delta\theta_2 = -\frac{3}{8} \omega_0 t_1$$

Η συνολική γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ του δίσκου είναι

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = \frac{1}{8} \omega_0 t_1$$

και αφού είναι θετική, ο δίσκος από τη χρονική στιγμή $t=0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_3 έχει περιστραφεί κατ' αντίθετη φορά από αυτή των δεικτών του ρολογιού.

2.B.9 γ.

Για να έχουν δύο σημεία ενός στερεού ίδιες γραμμικές ταχύτητες θα πρέπει να διαγράφουν κυκλικές τροχιές στην ίδια φορά και με την ίδια ακτίνα. Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει ο άξονας περιστροφής να είναι παράλληλος στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο σημεία.

2.B.10 α.

Για τις γραμμικές ταχύτητες του ωροδείκτη και του λεπτοδείκτη ισχύει

$$v_{\omega} = \omega_{\omega} \ell_{\omega} , \quad v_{\lambda} = \omega_{\lambda} \ell_{\lambda}$$

Εφόσον θα έχουν ίδια γραμμική ταχύτητα

$$\omega_{\omega} \ell_{\omega} = \omega_{\lambda} \ell_{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{T_{\omega}} \ell_{\omega} = \frac{2\pi}{T_{\lambda}} \ell_{\lambda} \Rightarrow \frac{2\pi}{12h} \ell_{\omega} = \frac{2\pi}{1h} \ell_{\lambda} \Rightarrow \frac{\ell_{\omega}}{\ell_{\lambda}} = 12$$

2.B.11 α.

$$\alpha_{\gamma p A} = 2\alpha_{\gamma p B} \Rightarrow \alpha_{\gamma \omega v} \cdot (KA) = 2\alpha_{\gamma \omega v} \cdot (KB) \Rightarrow$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 2\beta \Rightarrow \alpha^2 = 3\beta^2 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{3}$$

2.B.12 β.

Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του Α είναι R και του Β είναι $r_B = R \sin 60^\circ = R/2$. Η γωνιακή ταχύτητα είναι ίδια και για τους δύο παρατηρητές. Η κεντρομόλος επιτάχυνση για τους δύο παρατηρητές έχει μέτρο

$$\alpha_{\kappa(A)} = \frac{v_A^2}{R} = \omega^2 R , \quad \alpha_{\kappa(B)} = \frac{v_B^2}{r} = \omega^2 r_B \Rightarrow \alpha_{\kappa(B)} = \frac{\omega^2 R}{2}$$

$$\text{Ο λόγος τους είναι } \frac{\alpha_{\kappa(A)}}{\alpha_{\kappa(B)}} = \frac{\omega^2 R}{\frac{\omega^2 R}{2}} = 2 .$$

2.B.13 γ.

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

Αρκεί να βρούμε τη σχέση των $\Delta\theta$.

Η γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ βρίσκεται από το εμβαδό

$$0s \rightarrow t_1 : \Delta\theta_1 = \frac{\omega_o + \omega_o / 2}{2} \cdot t_1 \Rightarrow \Delta\theta_1 = \frac{3\omega_o}{4} t_1$$

$$t_1 \rightarrow t_2 : \Delta\theta_2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_o}{2} \cdot t_1 \Rightarrow \Delta\theta_2 = \frac{\omega_o}{4} t_1$$

$$\frac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_2} = 3 \quad \text{άρα} \quad \frac{N_1 \cdot 2\pi}{N_2 \cdot 2\pi} = 3 \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = 3$$

2.B.14 β.

$$0s \rightarrow t_1 : \Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega v}t_1^2$$

$$N_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi}$$

$$0s \rightarrow 2t_1 : \Delta\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega v}(2t_1)^2 = 4\Delta\theta_1$$

$$t_1 \rightarrow 2t_1 : \Delta\theta = \Delta\theta_2 - \Delta\theta_1 = 3\Delta\theta_1$$

$$N_2 = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{3\Delta\theta_1}{2\pi} \Rightarrow N_2 = 3N_1$$

2.B.15 γ.

Η κίνηση του δίσκου είναι ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική και για να σταματήσει ο δίσκος θα περάσουν 4s, άρα

$$\omega = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega v}|t \Rightarrow 0 = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega v}|4 \Rightarrow \omega_0 = 4|\alpha_{\gamma\omega v}|$$

Τη χρονική στιγμή $t=3s$, δηλαδή πριν αρχίσει το τελευταίο δευτερόλεπτο κίνησης, η γωνιακή ταχύτητα είναι

$$\omega_3 = \omega_0 - |\alpha_{\gamma\omega v}|3 = 4|\alpha_{\gamma\omega v}| - |\alpha_{\gamma\omega v}|3 \Rightarrow \omega_3 = |\alpha_{\gamma\omega v}|$$

Η γωνία που διαγράφει ο δίσκος το τελευταίο δευτερόλεπτο είναι

$$\Delta\theta = \omega_3\Delta t - \frac{1}{2}|\alpha_{\gamma\omega v}|\Delta t^2 = \omega_3 1 - \frac{1}{2}|\alpha_{\gamma\omega v}|1^2 \Rightarrow \Delta\theta = 0,5|\alpha_{\gamma\omega v}|$$

Το μήκος του τόξου s_B που διαγράφει το σημείο B ισούται με

$$s_B = \Delta\theta \cdot r = 0,5|\alpha_{\gamma\omega v}|\frac{R}{2} \Rightarrow s_B = |\alpha_{\gamma\omega v}|\frac{R}{4}$$

2.B.16 β.

Η γωνιακή επιτάχυνση του πρώτου στερεού είναι $\alpha_{\gamma\omega v,A} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\omega_0}{t_1}$.

Η γωνιακή μετατόπισή του μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1/2$ είναι

$$\theta_A = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega v,A}\left(\frac{t_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{2\omega_0}{t_1}\left(\frac{t_1}{2}\right)^2 \Rightarrow \theta_A = \frac{\omega_0 t_1}{4}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση του δεύτερου στερεού είναι

$$\alpha_{\gamma\omega v,B} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\omega_0 - \omega_0}{t_1 - 0} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega v,B} = \frac{\omega_0}{t_1}$$

Η γωνιακή μετατόπισή του μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1/2$ είναι

$$\theta_B = \omega_0 \frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega v,B}\left(\frac{t_1}{2}\right)^2 = \omega_0 \frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{t_1}\left(\frac{t_1}{2}\right)^2 \Rightarrow \theta_B = \frac{5\omega_0 t_1}{8}$$

Ο λόγος των περιστροφών N_B/N_A είναι ίσος με

$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{\theta_B/2\pi}{\theta_A/2\pi} = \frac{\frac{5\omega_0 t_1}{16\pi}}{\frac{\omega_0 t_1}{8\pi}} \Rightarrow \frac{N_B}{N_A} = 2,5$$

2.B.17 γ.

Οι γραμμικές ταχύτητες των σημείων Α και Β είναι ίσες, άρα

$$v_{\gamma p, A} = v_{\gamma p, B} \Rightarrow \omega_A R_A = \omega_B R_B \Rightarrow 2\pi f_A R_A = 2\pi f_B R_B \Rightarrow \frac{f_A}{f_B} = \frac{R_B}{R_A} = 2$$

2.B.18 β.

Οι γραμμικές ταχύτητες των σημείων επαφής των τροχών Α και Β είναι ίσες, $v_{\gamma p, A} = v_{\gamma p, B}$.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση για τα δύο σημεία είναι

$$\alpha_{\kappa(A)} = \frac{v_{\gamma p, A}^2}{r_A}, \quad \alpha_{\kappa(B)} = \frac{v_{\gamma p, B}^2}{r_B}$$

και ο λόγος τους είναι

$$\frac{\alpha_{\kappa(A)}}{\alpha_{\kappa(B)}} = \frac{\frac{v_{\gamma p, A}^2}{r_A}}{\frac{v_{\gamma p, B}^2}{r_B}} = \frac{r_B}{r_A} \Rightarrow \frac{\alpha_{\kappa(A)}}{\alpha_{\kappa(B)}} = \frac{1}{2}.$$

2.B.19 α

$$t = 2t_o : |\alpha_{\gamma\omega\nu}| = \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right| = \frac{2\omega_o - 0}{3t_o - t_o} = \frac{\omega_o}{t_o}$$

2.B.20 α

$$\Delta_1 : \Delta\theta_1 \leftrightarrow \text{εμβαδον} = \frac{t_o \cdot 2\omega_o}{2} + (2t_o - t_o) \cdot 2\omega_o = 3\omega_o t_o$$

$$\Delta_2 : \Delta\theta_2 \leftrightarrow \text{εμβαδον} = \frac{1}{2} 2t_o \cdot 3\omega_o = 3\omega_o t_o$$

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 \Rightarrow \frac{\Delta\theta_1}{2\pi} = \frac{\Delta\theta_2}{2\pi} \Rightarrow N_1 = N_2$$

2.B.21 γ

Επειδή η γωνιακή επιτάχυνση είναι ίδια για όλα τα σημεία, η σχέση των γραμμικών επιταχύνσεων δίνει

$$\alpha_{\gamma p, A} = 2\alpha_{\gamma p, B} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} r_A = 2\alpha_{\gamma\omega\nu} r_B \Rightarrow r_A = 2r_B$$

$$\text{Όμως } r_A - r_B = R / 3 \Rightarrow 2r_B - r_B = R / 3 \Rightarrow r_B = R / 3 \Rightarrow r_A = 2r_B = 2R / 3$$

2.B.22 β.

Τη χρονική στιγμή t το πηλίκο του μέτρου της κεντρομόλου επιτάχυνσης του άκρου του έλικα, α_κ προς το μέτρο της γραμμικής του επιτάχυνσης, $\alpha_{\gamma\rho}$ είναι

$$\frac{\alpha_\kappa}{\alpha_{\gamma\rho}} = \frac{\omega^2 R}{\alpha_{\gamma\omega\nu} R} = \frac{(\alpha_{\gamma\omega\nu} t)^2}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \quad (1)$$

Όμως η γωνία που διέγραψε είναι

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 = 2$$

και η (1) δίνει

$$\frac{\alpha_\kappa}{\alpha_{\gamma\rho}} = \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 = 2$$

2.B.23 α.

Στην πρώτη φάση η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη στροφική, άρα η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή $t=1s$ είναι

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu,1} \Delta t = 12 \text{ rad / s}$$

Στη δεύτερη φάση η κίνηση είναι ομαλή στροφική και η γωνιακή ταχύτητα μένει σταθερή.

Στην τρίτη φάση η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη στροφική, άρα η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή $t=3s$ είναι

$$\omega = \omega_1 + \alpha_{\gamma\omega\nu,3} \Delta t = 16 \text{ rad / s}$$

2.B.24 α.

Η ισότητα των μέτρων των δύο επιταχύνσεων δίνει

$$\alpha_\kappa = \alpha_{\gamma\rho} \Rightarrow \omega^2 R = \alpha_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow (\alpha_{\gamma\omega\nu} t)^2 = \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 = 1 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}}$$

2.B.25 β.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση του σημείου A, που απέχει $r=2R$ από τον άξονα περιστροφής, τη χρονική στιγμή $t=0$ έχει μέτρο

$$\alpha_{\kappa,1} = \frac{v_{\eta\rho,0}^2}{r} = \omega_0^2 2R$$

και όταν διπλασιαστεί η γωνιακή ταχύτητα

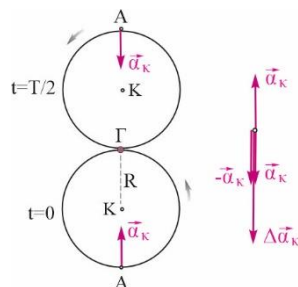
$$\alpha_{\kappa,2} = \frac{v_{\eta\rho}^2}{r} = (2\omega_0)^2 2R = 8\omega_0^2 R$$

Επειδή ο δίσκος έκανε μισή περιστροφή, η κεντρομόλος επιτάχυνση έγινε αντίρροπη της αρχικής, άρα η μεταβολή της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου A, είναι ίση με

$$\Delta \vec{a}_\kappa = \vec{a}_{\kappa,2} - \vec{a}_{\kappa,1} = \vec{a}_{\kappa,2} + (-\vec{a}_{\kappa,1})$$

και το μέτρο της μεταβολής της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι

$$|\Delta a_\kappa| = \alpha_{\kappa, \alpha\rho\chi} + \alpha_{\kappa, \tau\epsilon\lambda} = 10\omega_0^2 R$$



2.B.26 α.

Οι δύο σχέσεις της ομαλά επιταχυνόμενης στροφικής κίνησης με απαλοιφή του χρόνου δίνουν

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t \Rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 = \omega_0 \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} \right)^2 \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}}$$

Μετά από μία περιστροφή, δηλαδή γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta=2\pi$ rad, η γωνιακή ταχύτητα τριπλασιάζεται, άρα η προηγούμενη σχέση δίνει

$$\Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow 2\pi = \frac{(3\omega_0)^2 - \omega_0^2}{2\alpha_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2\omega_0^2}{\pi}$$

και η γραμμική επιτάχυνση του σημείου A, που απέχει $r=2R$ από τον άξονα περιστροφής, είναι

$$\alpha_{\eta\rho} = \alpha_{\gamma\omega\nu} r = \frac{2\omega_0^2}{\pi} 2R \Rightarrow \alpha_{\eta\rho} = \frac{4\omega_0^2 R}{\pi}$$

2.B.27 β.

Στον κατακόρυφο άξονα η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν. Άρα

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y - mg = 0 \Rightarrow T \sin\varphi = mg \quad (1)$$

Η συνισταμένη δύναμη στο οριζόντιο επίπεδο παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης

$$\Sigma F = F_k \Rightarrow T_x = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow T\eta\mu\phi = \frac{mv^2}{r} \quad (2)$$

Η γραμμική ταχύτητα είναι $v = \omega r$ και αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (1) έχουμε

$$\varepsilon\phi\phi = \frac{v^2}{gr} \Rightarrow \varepsilon\phi\phi = \frac{(\omega r)^2}{gr} \Rightarrow \varepsilon\phi\phi = \frac{\omega^2 r}{g} \Rightarrow \frac{\eta\mu\phi}{\sigma\upsilon\nu\phi} = \frac{\omega^2 R\eta\mu\phi}{g} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R\sigma\upsilon\nu\phi}}$$

2.B.28 γ.

Η σχέση της ομαλά επιταχυνόμενης στροφικής κίνησης για την πρώτη περιστροφή και για γωνιακή μετατόπιση $\theta_1 = 2\pi$ rad, δίνει το χρονικό διάστημα Δt_1

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\Delta t_1^2 \Rightarrow 2\pi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\Delta t_1^2 \Rightarrow \Delta t_1 = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}}$$

Οι δύο περιστροφές, δηλαδή $\theta_2 = 4\pi$ rad, ολοκληρώνονται τη στιγμή t_2

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_2^2 \Rightarrow 4\pi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}}$$

Άρα η δεύτερη περιστροφή γίνεται σε χρονικό διάστημα

$$\Delta t_2 = t_2 - \Delta t_1 = \sqrt{\frac{8\pi}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}} - \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}} \Rightarrow \Delta t_2 = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\frac{4\pi}{\alpha_{\gamma\omega\nu}}} \Rightarrow \Delta t_2 = (\sqrt{2} - 1)\Delta t_1 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \sqrt{2} + 1$$

2.B.29 γ

Το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $\alpha_{\gamma\omega\nu} - t$, τον άξονα του χρόνου και τις χρονικές στιγμές που μας ενδιαφέρουν, αντιστοιχεί στη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας κι αυτό προκύπτει από τη σχέση

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu}\Delta t$$

Στο διάγραμμα του ερωτήματος υπάρχουν 3 φάσεις. Στις δύο τελευταίες τα δύο εμβαδά είναι ίσα και αλληλοαναιρούνται. Στη 2^η φάση η κίνηση είναι επιταχυνόμενη και η γωνιακή ταχύτητα αυξάνεται, ενώ στη 3^η φάση η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη και η γωνιακή ταχύτητα μειώνεται κατά την ίδια ποσότητα. Κατά συνέπεια, τη χρονική στιγμή $3t_1$, η γωνιακή ταχύτητα παραμένει όση απέκτησε ο δίσκος τη χρονική στιγμή t_1 και είναι

$$\alpha_{\gamma\omega\nu,0} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,0} = \frac{\omega}{t_1} \Rightarrow \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu,0}t_1$$

2.B.30 γ.

Για τη χρονική στιγμή $t_0=0s$ και για το σημείο A έχουμε

$$\alpha_{κ,0} = 4\alpha_{\gamma p} \Rightarrow \omega_0^2 R = 4\alpha_{\gamma\omega v} R \Rightarrow \omega_0 = 2\sqrt{\alpha_{\gamma\omega v}}$$

Η γραμμική ταχύτητα του σημείου A θα τετραπλασιαστεί όταν

$$v_{\gamma p} = 4v_0 \Rightarrow \omega R = 4\omega_0 R \Rightarrow \omega = 4\omega_0 \Rightarrow \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega v} t = 4\omega_0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{3\omega_0}{\alpha_{\gamma\omega v}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{\alpha_{\gamma\omega v}}}{\alpha_{\gamma\omega v}} \Rightarrow t = \frac{6}{\sqrt{\alpha_{\gamma\omega v}}}$$

2.B.31 α.

Η σανίδα κάθε στιγμή έχει την ίδια ταχύτητα με τα σημεία των κυλίνδρων που εφάπτεται. Άρα

$$v = v_{\gamma p,1} = v_{\gamma p,2} \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow \lambda \omega_1 = \omega_2$$

Σε χρόνο Δt , οι κύλινδροι K_1 και K_2 έχουν εκτελέσει N_1 και N_2 περιστροφές για τις οποίες ο λόγος είναι

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\frac{\theta_2}{2\pi}}{\frac{\theta_1}{2\pi}} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\omega_2 \Delta t}{\omega_1 \Delta t} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \lambda$$

2.B.32 β.

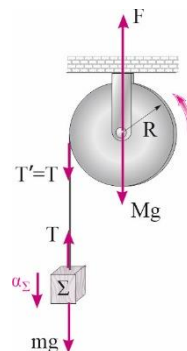
Το σώμα Σ έχει την ίδια επιτάχυνση με τη γραμμική επιτάχυνση του σημείου της τροχαλίας στο οποίο εφάπτεται το νήμα. Άρα $\alpha_\Sigma = \alpha_{\gamma p} = \alpha_{\gamma\omega v} R = \frac{g}{2R} R \Rightarrow \alpha_\Sigma = \frac{g}{2}$

Για το σώμα Σ, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\Sigma F = m\alpha_\Sigma \Rightarrow mg - T = m\frac{g}{2} \Rightarrow T = \frac{mg}{2}$$

Για τη μεταφορική ισορροπία της τροχαλίας, ο 1ος νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - Mg - T = 0 \Rightarrow F = T + Mg = \frac{mg}{2} + 2mg \Rightarrow F = 2,5mg$$



2.B.33 α.

Τα δύο σώματα έχουν την ίδια επιτάχυνση με τις γραμμικές επιταχύνσεις των σημείων της τροχαλίας στα οποία εφάπτονται τα νήματα. Άρα

$$\alpha_{\Sigma_1} = \alpha_{\gamma p,1} = \alpha_{\gamma \omega v} R = \frac{g}{3R} R \Rightarrow \alpha_{\Sigma_1} = \frac{g}{3}$$

$$\alpha_{\Sigma_2} = \alpha_{\gamma p,2} = \alpha_{\gamma \omega v} r = \frac{g}{3R} \frac{R}{2} \Rightarrow \alpha_{\Sigma_2} = \frac{g}{6}$$

Για το σώμα Σ_1 , που κατεβαίνει, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\Sigma F_1 = m_1 \alpha_{\Sigma_1} \Rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 \frac{g}{3} \Rightarrow T_1 = \frac{2mg}{3} \quad (1)$$

Για το σώμα Σ_2 , που ανεβαίνει, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\Sigma F_2 = m_2 \alpha_{\Sigma_2} \Rightarrow T_2 - m_2 g = m_2 \frac{g}{6} \Rightarrow T_2 = \frac{7mg}{6} \quad (2)$$

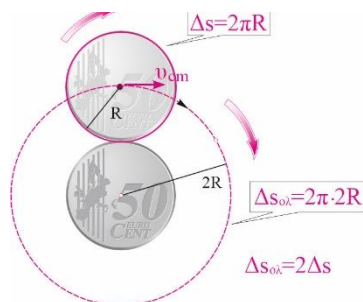
Από τις σχέσεις (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$T_2 - T_1 = \frac{7mg}{6} - \frac{2mg}{3} = \frac{3mg}{6} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{mg}{2}$$

Σύνθετη κίνηση στερεού σώματος

2.B.34 γ.

Στην κύλιση, η μετατόπιση του κέντρου μάζας είναι ίση με το μήκος του τόξου της περιφέρειας του κυλιόμενου σώματος που ήρθε σε επαφή με την επιφάνεια κύλισης. Εδώ, το κέντρο μάζας του κινούμενου νομίσματος διέγραψε κύκλο ακτίνας $2R$ και μήκος τροχιάς $s = 2\pi R = 4\pi R$. Το ίδιο μήκος τροχιάς διέτρεξε και ένα σημείο της περιφέρειας του κέρματος, άρα εκτέλεσε $N = 4\pi R / 2\pi R = 2$ περιστροφές γύρω από τον εαυτό του.



2.B.35 γ.

$$\frac{\Delta v_{cm(1)}}{\Delta t} = 2 \frac{\Delta v_{cm(2)}}{\Delta t} \Rightarrow \alpha_{cm(1)} = 2\alpha_{cm(2)}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\alpha_{γων(1)} \cdot t}{\alpha_{γων(2)} \cdot t} = \frac{\frac{\alpha_{cm(1)}}{R}}{\frac{\alpha_{cm(2)}}{2R}} = 4$$

2.B.36 β.

$$v_{cm(1)} = v_{cm(2)} \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \Rightarrow 2\pi f_1 R_1 = 2\pi f_2 R_2 \Rightarrow 3f_1 = f_2 \Rightarrow$$

$$\frac{3N_1}{\Delta t} = \frac{N_2}{\Delta t} \Rightarrow N_2 = 3N_1$$

2.B.37 α.

$$v_{ογκ} = v_{ανωτ} = 2v_{cmκυλ} \Rightarrow v_{cmκυλ} = \frac{v_{ογκ}}{2}$$

$$\text{Άρα } \Delta x_{cmκυλ} = v_{cmκυλ} \Delta t = \frac{v_{ογκ}}{2} \Delta t = \frac{1}{2} \Delta x_{ογκ} \Rightarrow \Delta x_{cmκυλ} = 5m$$

2.B.38 β.

$$\left. \begin{array}{l} v_A = v_{cm} + \omega \ell \\ v_\Gamma = v_{cm} - \omega \ell \end{array} \right\} \Rightarrow v_A + v_\Gamma = 2v_{cm} \Rightarrow v_A + v_\Gamma = 2v$$

2.B.39 i. β. ii. γ.

i. Τα σημεία A και Γ έχουν ίσες γραμμικές ταχύτητες, άρα απέχουν το ίδιο από το κέντρο του τροχού.

Επειδή $v_{\gamma\phi} = \frac{v_{cm}}{4}$ έχουμε

$$v_{\gamma\phi,A} = v_{\gamma\phi,\Gamma} = \frac{v_{cm}}{4} \Rightarrow \omega r_A = \omega r_B = \frac{\omega R}{4} \Rightarrow r_A = r_B = \frac{R}{4}$$

Άρα τα δύο σημεία απέχουν $d=r_A+r_B=R/2$.

ii. Η συνολική ταχύτητα του σημείου A είναι

$$v_A = v_{cm} + v_{\gamma\phi,A} = v_{cm} + \frac{v_{cm}}{4} \Rightarrow v_A = \frac{5v_{cm}}{4}$$

Η συνολική ταχύτητα του σημείου Γ είναι

$$v_\Gamma = v_{cm} - v_{\gamma\phi,\Gamma} = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{4} \Rightarrow v_\Gamma = \frac{3v_{cm}}{4}$$

και ο λόγος τους είναι $\frac{v_A}{v_\Gamma} = \frac{5}{3}$.

2.B.40 i. β. ii. β.

i.

Έστω σημείο A που απέχει r πάνω από το κέντρο του δίσκου που κάνει κύλιση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω .

Η συνολική ταχύτητα του σημείου A είναι

$$v_A = v_{cm} + v_{\gamma p, A} = \omega R + \omega r = \omega(R + r) = \omega d \Rightarrow v_A = \frac{v_{cm}}{R} d$$

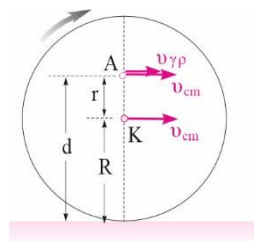
Έστω σημείο Γ που απέχει r κάτω από το κέντρο του δίσκου που κάνει κύλιση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω .

Η συνολική ταχύτητα του σημείου Γ είναι

$$v_{\Gamma} = v_{cm} - v_{\gamma p, A} = \omega R - \omega r = \omega(R - r) = \omega d \Rightarrow v_{\Gamma} = \frac{v_{cm}}{R} d$$

ii.

Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του σημείου έχει μέτρο ανάλογο της απόστασης d του σημείου από το δάπεδο και ο συντελεστής αναλογίας, δηλαδή η κλίση του διαγράμματος $u - d$ είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας ω του δίσκου, $u = \omega d$, αφού $\omega = v_{cm}/R$.

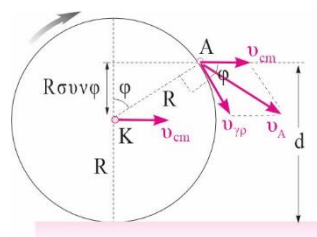


2.B.41 β.

Το σημείο της περιφέρειας του δίσκου που απέχει $d = 3R/2$ από το δάπεδο βρίσκεται σε επιβατική ακτίνα που σχηματίζει γωνία ϕ με την κατακόρυφη και για τη γωνία αυτή ισχύει

$$d = R + R \sin \phi \Rightarrow \frac{3R}{2} = R + R \sin \phi \Rightarrow \sin \phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 60^\circ$$

Η ταχύτητα του σημείου έχει μέτρο



$$v = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p}^2 + 2v_{cm}v_{\gamma p}\sin \phi} = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{cm}^2 + 2v_{cm}v_{cm}\sin 60^\circ} \Rightarrow v = v_{cm}\sqrt{3}$$

2.B.42 α.

$$\left. \begin{aligned} v_A &= v_{cm} + \omega r \\ v_{\Gamma} &= v_{cm} - \omega r \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{cm} + \omega r = 3v_{cm} - 3\omega r \Rightarrow$$

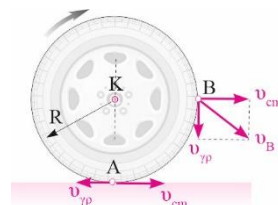
$$4\omega r = 2\omega R \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$$

2.B.43 β.

$$v_{cm} = 4 \frac{m}{s},$$

$$v_B = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p}^2} \Rightarrow v_{\gamma p} = 3 \frac{m}{s}$$

$$v_A = v_{cm} - v_{\gamma p} = 1 \frac{m}{s}$$



2.B.44 α.

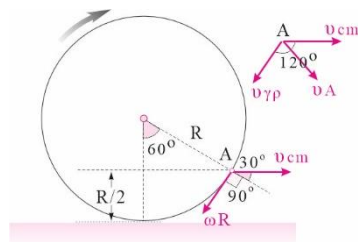
$$\sin \varphi = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

Εύκολα προκύπτει ότι η v_{cm} και η $v_{\gamma p} = \omega R$ σχηματίζουν γωνία 120° .

Άρα η συνισταμένη τους έχει μέτρο

$$v_A = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p}^2 + 2v_{cm}v_{\gamma p}\sin 120^\circ} = v_{cm}$$

$$v_A = v_{cm} = \omega R = v_{\gamma p}$$



2.B.45 β.

Η συνολική ταχύτητα του A έχει μέτρο $v_A = v_{cm} + v_{\gamma p, A} = 2v_{cm}$.

Η γραμμική ταχύτητα του B έχει μέτρο

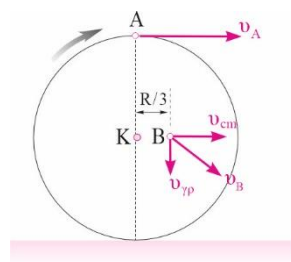
$$v_{\gamma p, B} = \omega r = \frac{\omega R}{3} \Rightarrow v_{\gamma p, B} = \frac{v_{cm}}{3}$$

Η συνολική ταχύτητα του B έχει μέτρο

$$v_B = \sqrt{v_{cm}^2 + (v_{\gamma p, B})^2} = \sqrt{v_{cm}^2 + \left(\frac{v_{cm}}{3}\right)^2} \Rightarrow v_B = \frac{v_{cm}\sqrt{10}}{3}$$

Άρα, ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων των σημείων B και A είναι ίσος με

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\frac{v_{cm}\sqrt{10}}{3}}{2v_{cm}} = \frac{\sqrt{10}}{6}$$



2.B.46 α.

Η κίνηση του δίσκου στροφικά είναι ομαλά επιβραδυνόμενη και για να σταματήσει ο δίσκος θα περάσει χρονικό διάστημα t που ισούται με

$$\omega = \omega_o - |\alpha_{\gamma\omega v}|t \Rightarrow 0 = \omega_o - |\alpha_{\gamma\omega v}|t \Rightarrow t = \frac{\omega_o}{|\alpha_{\gamma\omega v}|}$$

Η γωνία που έχει διαγράψει μέχρι να σταματήσει είναι

$$\theta = \omega_o t - \frac{1}{2}|\alpha_{\gamma\omega v}|t^2 \Rightarrow \theta = \frac{\omega_o^2}{2|\alpha_{\gamma\omega v}|}$$

και οι περιστροφές που διέγραψε

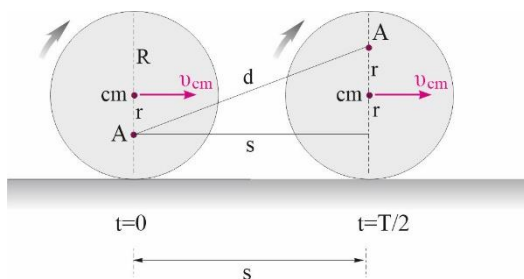
$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\frac{\omega_o^2}{2|\alpha_{\gamma\omega v}|}}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\omega_o^2}{4\pi|\alpha_{\gamma\omega v}|} \text{ στροφές}$$

2.B.47 α.

Εφόσον το σημείο A του δίσκου βρίσκεται στην κατακόρυφη διάμετρο και έχει ταχύτητα μέτρου $u_A = 0,5u_{cm}$, βρίσκεται χαμηλότερα από το κέντρο του δίσκου και απέχει από αυτό r που ισούται με

$$v_A = v_{cm} - v_{\gamma\rho} \Rightarrow 0,5u_{cm} = v_{cm} - v_{\gamma\rho} \Rightarrow$$

$$v_{\gamma\rho} = 0,5u_{cm} \Rightarrow \omega r = 0,5\omega R \Rightarrow r = R/2$$



Στο χρονικό διάστημα που ο δίσκος εκτέλεσε μισή περιστροφή, μετατόπιστηκε κατά

$$S = v_{cm}t = \omega R \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{T} R \frac{T}{2} = \pi R$$

και η μετατόπιση d του σημείου A είναι

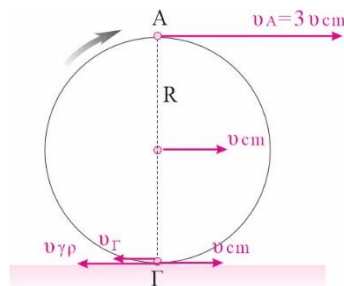
$$d = \sqrt{s^2 + (2r)^2} = \sqrt{(\pi R)^2 + \left(2\frac{R}{2}\right)^2} \Rightarrow d = R\sqrt{\pi^2 + 1}$$

2.B.48 γ.

Η κίνηση του δίσκου δεν είναι κύλιση, γιατί τότε θα έπρεπε να είναι $u_A = 2u_{cm}$. Άρα η κίνηση είναι σύνθετη με τον δίσκο να εκτελεί δύο κινήσεις, μεταφορική και στροφική, ομαλές και οι δύο αλλά χωρίς να ισχύει η σχέση $u_{cm} = u_{\gamma\rho}$. Το ανώτερο σημείο του δίσκου, A, έχει ταχύτητα μέτρου $u_A = 3u_{cm}$, άρα

$$v_A = 3u_{cm} \Rightarrow v_{cm} + v_{\gamma\rho, A} = 3u_{cm} \Rightarrow v_{\gamma\rho, A} = 2u_{cm}$$

Το κατώτερο σημείο του δίσκου Γ έχει γραμμική ταχύτητα με μέτρο ίσο με αυτή του σημείου A, γιατί ισαπέχουν κατά μια ακτίνα R , από το κέντρο του δίσκου, $v_{\gamma\rho, \Gamma} = v_{\gamma\rho, A} = 2u_{cm}$



Το κατώτερο σημείο του δίσκου, Γ έχει ταχύτητα

$$v_{\Gamma} = v_{cm} - v_{\gamma\rho, \Gamma} = v_{cm} - 2u_{cm} \Rightarrow v_{\Gamma} = -u_{cm}$$

δηλαδή το μέτρο της είναι u_{cm} και η φορά της είναι προς τα αριστερά.

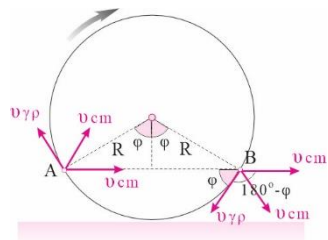
2.B.49 α.

Η ταχύτητα των σημείων που ζητούμε έχει μέτρο ίσο με v_{cm} . Έστω ότι η επιβατική ακτίνα των σημείων σχηματίζει γωνία ϕ με την κατακόρυφο. Άρα

$$v = v_{cm} \Rightarrow \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p}^2 + 2v_{cm}v_{\gamma p}\cos(180 - \phi)} = v_{cm} \Rightarrow$$

$$v_{cm}^2 + v_{cm}^2 + 2v_{cm}v_{cm}\cos(180 - \phi) = v_{cm}^2 \Rightarrow$$

$$\cos(180 - \phi) = -0,5 \Rightarrow 180 - \phi = 120^\circ \Rightarrow \phi = 60^\circ$$



Τα σημεία είναι δύο, ένα αριστερά και ένα δεξιά της κατακόρυφης ακτίνας, γιατί και τα δύο σχηματίζουν γωνία 60° με την κατακόρυφο.

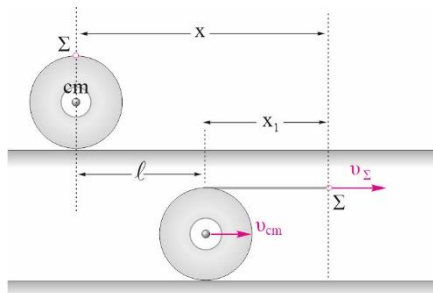
Να τονίσουμε ότι δεν υπάρχουν σημεία με ταχύτητα ίση διανυσματικά με τη v_{cm} , γιατί τότε το σώμα θα έπρεπε να εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση, ενώ τώρα εκτελεί σύνθετη.

2.B.50 α.

Για το κέντρο μάζας cm : $\ell = v_{cm} \cdot t$

Για το Σ: $v_\Sigma = v_{cm} + \omega R = 2v_{cm}$

Άρα $x = 2v_{cm} \cdot t = 2\ell$, $x_1 = x - \ell = \ell$



2.B.51 α.

Για το σημείο Σ έχουμε

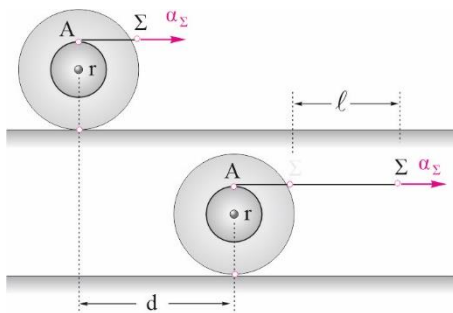
$$\alpha_\Sigma = \alpha_{cm} + \alpha_{\gamma p} = \alpha_{\gamma_{\text{ων}}}R + \alpha_{\gamma_{\text{ων}}}r \Rightarrow \alpha_\Sigma = \frac{5}{3}\alpha_{cm}$$

Άρα η μετατόπιση του Σ, Δx_Σ , συνδέεται με τη μετατόπιση του κέντρου μάζας $\Delta x_{cm} = d$, με τη σχέση

$$\Delta x_\Sigma = \frac{1}{2}\alpha_\Sigma \Delta t^2 = \frac{1}{2} \frac{5}{3}\alpha_{cm} \Delta t^2 = \frac{5}{3}\Delta x_{cm} \Rightarrow \Delta x_\Sigma = \frac{5}{3}d$$

Το χρονικό διάστημα Δt ισούται με

$$\Delta x_\Sigma = \frac{5}{3}d \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha_\Sigma \Delta t^2 = \frac{5}{3}d \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{10d}{3\alpha_\Sigma}}$$



2.B.52 β.

$$\Delta x_{\Sigma} = \Delta x_{cm} + \Delta s$$

όπου Δs το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται. Άρα

$$\Delta x_{\Sigma} = R \cdot \Delta \theta + r \cdot \Delta \theta$$

$$\frac{\Delta x_{\Sigma}}{\Delta x_{cm}} = \frac{R \cdot \Delta \theta + r \cdot \Delta \theta}{R \cdot \Delta \theta} \Rightarrow \frac{\Delta x_{\Sigma}}{\Delta x_{cm}} = \frac{R+r}{R}$$

2.B.53 β.

$$v_{\Sigma} = v_A = v_{cm} - \omega r \Rightarrow v_{\Sigma} = \omega R - \omega r$$

$$\frac{v_{\Sigma}}{v_{cm}} = \frac{\omega R - \omega r}{\omega R} \Rightarrow \frac{v_{\Sigma}}{v_{cm}} = \frac{R-r}{R}$$

2.B.54 γ.

Ο δίσκος ακτίνας r εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση, άρα ισχύει η σχέση $v_{cm} = \omega r$, όπου ω η σταθερή γωνιακή ταχύτητα του συστήματος.

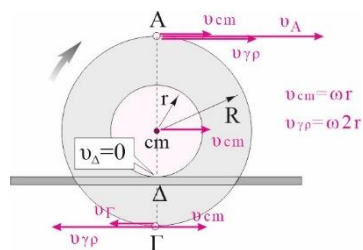
Η συνολική ταχύτητα του ανώτερου σημείου A είναι

$$v_A = v_{cm} + v_{\gamma p, A} = \omega r + \omega R \Rightarrow v_A = 3\omega r$$

Η συνολική ταχύτητα του κατώτερου σημείου Γ είναι

$$v_{\Gamma} = v_{cm} - v_{\gamma p, \Gamma} = \omega r - \omega R \Rightarrow v_{\Gamma} = -\omega r$$

Άρα, ο λόγος των ταχυτήτων του ανώτερου σημείου A του συστήματος προς το κατώτερο, Γ είναι $v_A/v_{\Gamma} = -3$.



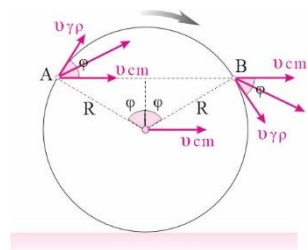
2.B.55 α.

Τα δύο σημεία A και B της περιφέρειας του τροχού ισαπέχουν από το δάπεδο, άρα η επιβατική ακτίνα των δύο σημείων σχηματίζει με την πάνω κατακόρυφη ακτίνα την ίδια γωνία ϕ . Την ίδια γωνία ϕ σχηματίζει και για τα δύο σημεία η κατεύθυνση της μεταφορικής ταχύτητας v_{cm} και της γραμμικής τους ταχύτητας $v_{\gamma p}$.

Επίσης τα δύο σημεία ισαπέχουν από το κέντρο του δίσκου κατά R και έχουν γραμμικές ταχύτητες ίδιων μέτρων

$$v_{\gamma p, A} = v_{\gamma p, B} = v_{cm} = \omega R$$

Άρα και τα δύο σημεία έχουν ταχύτητα ίδιου μέτρου, $v_A = v_B = v$ με



$$v = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\gamma p}^2 + 2v_{cm}v_{\gamma p}\cos\varphi} = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{cm}^2 + 2v_{cm}v_{cm}\cos\varphi} \Rightarrow v = v_{cm}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}$$

2.B.56 γ.

Η κίνηση του δίσκου δεν είναι κύλιση, γιατί η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας είναι

$$v_{\gamma p} = \omega R = \frac{3v_{cm}}{R} R = 3v_{cm} \neq v_{cm}$$

Το σημείο Α που βρίσκεται στην κατακόρυφη διάμετρο και απέχει $d=R/3$ από το έδαφος έχει γραμμική ταχύτητα

$$v_{\gamma p,A} = \omega r = \omega \left(R - \frac{R}{3} \right) = 2\omega \frac{R}{3} \Rightarrow v_{\gamma p,A} = 2 \frac{3v_{cm}}{R} \frac{R}{3} = 2v_{cm}$$

και φορά προς τα αριστερά, άρα η συνολική του ταχύτητα είναι

$$v_A = v_{cm} - v_{\gamma p,A} = v_{cm} - 2v_{cm} \Rightarrow v_A = -v_{cm}$$

δηλαδή το μέτρο της είναι v_{cm} και η φορά της είναι προς τα αριστερά.

2.B.57 β.

Η σανίδα κάθε στιγμή έχει την ίδια ταχύτητα με τα σημεία των κυλίνδρων στα οποία εφάπτεται. Ο τροχός (1) εκτελεί μόνο στροφική κίνηση και το σημείο επαφής έχει μόνο γραμμική ταχύτητα. Ο τροχός (2) εκτελεί κύλιση και το σημείο επαφής έχει ταχύτητα διπλάσια από τη μεταφορική ταχύτητα v_{cm} και τη γραμμική ταχύτητα $v_{\gamma p}$, δηλαδή $v_2 = 2v_{cm} = 2v_{\gamma p,2}$. Έστω ω_1 και ω_2 , οι γωνιακές ταχύτητες των δύο τροχών, αντίστοιχα. Άρα

$$v = v_{\gamma p,1} = v_2 = 2v_{\gamma p,2} \Rightarrow \omega_1 R_1 = 2\omega_2 R_2 \Rightarrow \omega_1 = 2\omega_2$$

Σε χρόνο t , οι τροχοί (1) και (2) έχουν εκτελέσει N_1 και N_2 περιστροφές για τις οποίες ο λόγος είναι

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{\theta_1}{2\pi}}{\frac{\theta_2}{2\pi}} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\omega_1 t}{\omega_2 t} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = 2$$

2.B.58 β.

Το χρονικό διάστημα για να βρεθεί το σημείο A από την κατώτερη για πρώτη φορά στην ανώτερη θέση αντιστοιχεί σε μισή περιστροφή του δίσκου, $t=T/2$, οπότε από τη σχέση της μετατόπισης του κέντρου μάζας στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα παίρνουμε

$$x = v_{cm} t = 2\pi R \Rightarrow v_{cm} = \frac{2\pi R}{\frac{T}{2}} = \frac{4\pi R}{2\pi \omega} \Rightarrow$$

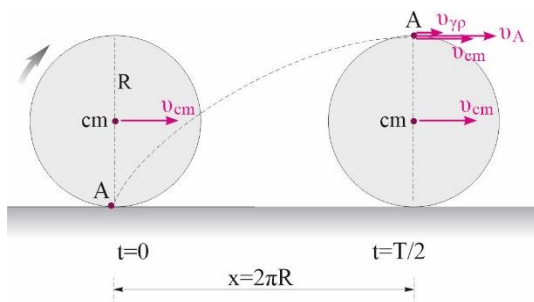
$$v_{cm} = 2\omega R = 2v_{\gamma\pi}$$

Άρα κίνηση του δίσκου δεν είναι κύλιση, γιατί η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας

$$\text{είναι } v_{\gamma\pi} = \frac{v_{cm}}{2} \neq v_{cm}$$

Η ταχύτητα του A στη ανώτερη θέση έχει μέτρο

$$v_A = v_{cm} + v_{\gamma\pi, A} = v_{cm} + \frac{v_{cm}}{2} \Rightarrow v_A = \frac{3v_{cm}}{2}$$



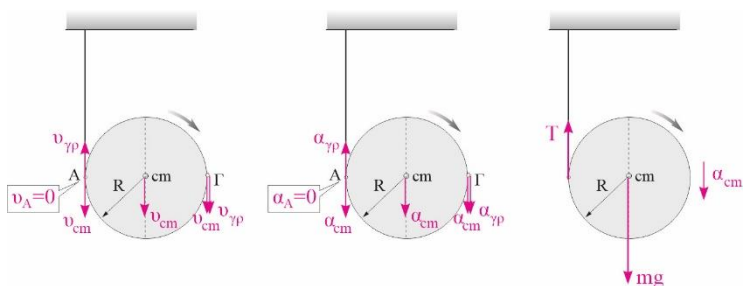
2.B.59 γ.

Η κίνηση του γιο-γιο είναι παρόμοια με την κύλιση χωρίς ολίσθηση και για το γιο-γιο και τα σημεία της περιφέρειας ισχύουν οι ίδιες σχέσεις:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\pi} = \alpha_{\gamma\omega\pi} R \quad (1),$$

$$v_{cm} = v_{\gamma\pi} = \omega R \quad (2),$$

$$x_{cm} = s = \theta R \quad (3)$$



Επίσης το σημείο που εφάπτεται με το νήμα έχει συνολική ταχύτητα μηδέν και το αντιδιαμετρικό του, Γ, έχει $u=2v_{cm}$. Για την επιτάχυνση του ίδιου σημείου ισχύει

$$v_{cm} = v_{\gamma\pi} \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{dv_{\gamma\pi}}{dt} \Rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\pi} \Rightarrow \alpha_{\Gamma} = \alpha_{cm} + \alpha_{\gamma\pi} = 2\alpha_{cm}$$

Για την επιταχυνόμενη κίνηση του γιο-γιο, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\Sigma F = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg - T = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg - 0,5m\alpha_{cm} = m\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2g}{3}$$

Και από τη σχέση των επιταχύνσεων (1) προκύπτει

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\pi} R \Rightarrow \frac{2g}{3} = \alpha_{\gamma\omega\pi} R \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\pi} = \frac{2g}{3R}$$

2.B.60 α

Το νόμισμα εκτελεί σύνθετη κίνηση: μεταφορικά εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω, δηλαδή επιβραδυνόμενη κίνηση και στροφικά εκτελεί ομαλή κίνηση. Για το άκρο Α της διαμέτρου που έχει συνολική ταχύτητα $3v_0$, ισχύει

$$v_A = v_{cm} + v_{\gamma p, A} \Rightarrow 3v_0 = v_0 + v_{\gamma p, A} \Rightarrow v_{\gamma p, A} = 2v_0 \Rightarrow \omega r = 2v_0 \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{2v_0}{r} \quad (1)$$

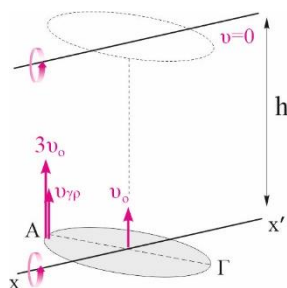
Ο χρόνος κίνησης μέχρι να σταματήσει στιγμιαία και το μέγιστο ύψος h που θα φτάσει είναι

$$v = v_0 - gt_{av} \Rightarrow 0 = v_0 - gt_{av} \Rightarrow t_{av} = \frac{v_0}{g} \quad (2)$$

$$h = v_0 t_{av} - \frac{1}{2} g t_{av}^2 \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} \quad (3)$$

και οι περιστροφές που θα εκτελέσει σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\omega t_{av}}{2\pi} = \frac{\frac{2v_0}{r} \frac{v_0}{g}}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow N = \frac{2h}{\pi r} \text{ στροφές}$$



2.B.61 β.

Το ανώτερο σημείο Σ του κυλίνδρου έχει διαρκώς διπλάσια ταχύτητα από τη v_{cm} . Άρα για τις επιτα-

$$\chiύνσεις του Σ ισχύει $v_{cm} = v_{\gamma p, \Sigma} \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{dv_{\gamma p, \Sigma}}{dt} \Rightarrow \alpha_{cm} = \alpha_{\gamma p, \Sigma} \Rightarrow \alpha_{\Sigma} = \alpha_{cm} + \alpha_{\gamma p, \Sigma} = 2\alpha_{cm}$$$

Η κίνηση του κυλίνδρου είναι ομαλά επιταχυνόμενη και για τη μετατόπιση του σημείου Σ, Δx_{Σ} και τη μετατόπιση του κέντρου μάζας, Δx_{cm} σε κάποιο χρονικό διάστημα t , ισχύει

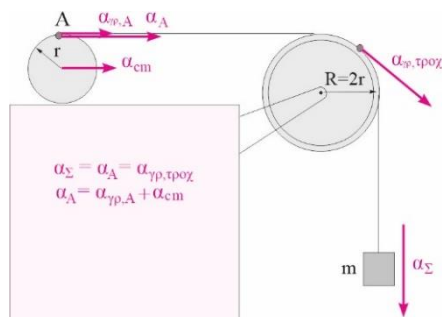
$$\Delta x_{\Sigma} = \frac{1}{2} \alpha_{\Sigma} t^2 = \frac{1}{2} 2\alpha_{cm} t^2 = 2\Delta x_{cm}$$

2.B.62 α.

Το ανώτερο σημείο Α του κυλίνδρου έχει διαρκώς διπλάσια ταχύτητα από τη v_{cm} . Άρα για τις επιταχύνσεις του Α ισχύει

$$v_{cm} = v_{\gamma p, A} \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{dv_{\gamma p, A}}{dt} \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma p, A} \Rightarrow \alpha_A = \alpha_{cm} + \alpha_{\gamma p, A} = 2\alpha_{cm}$$



Λύσεις κεφαλαίου 2

Το σώμα Σ έχει την ίδια επιτάχυνση με τη γραμμική επιτάχυνση του σημείου της τροχαλίας στο οποίο εφάπτεται το νήμα και την ίδια επιτάχυνση με το ανώτερο σημείο Α του κυλίνδρου. Άρα

$$\alpha_{\gamma\rho, \text{τροχ}} = \alpha_A \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu, 1} R = 2\alpha_{\text{cm}} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu, 1} R = 2\alpha_{\gamma\omega\nu, 2} r \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu, 1} = \alpha_{\gamma\omega\nu, 2}$$

2.B.63 α.

$$\Delta y = R_1 \Delta \theta_1 + R_2 \Delta \theta_2.$$

Παίρνοντας τους χρονικούς ρυθμούς μεταβολής προκύπτει

$$v_{\text{cm}} = R_1 \omega_1 + R_2 \omega_2 \quad (1)$$

Παίρνοντας τους χρονικούς ρυθμούς μεταβολής της (1) προκύπτει

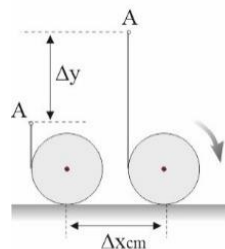
$$\alpha_{\text{cm}} = R_1 \alpha_{\gamma\omega\nu 1} + R_2 \alpha_{\gamma\omega\nu 2} \quad \text{ή} \quad \alpha_{\text{cm}} = \alpha_1 + \alpha_2$$

2.B.64 α.

$$\Delta y = R \cdot \Delta \theta,$$

$$\Delta x_{\text{cm}} = R \cdot \Delta \theta \Rightarrow$$

$$\Delta y = \Delta x_{\text{cm}}$$



2.B.65 γ.

$$v_A = \sqrt{v_{\text{cm}}^2 + v_{\gamma\rho}^2} \Rightarrow$$

$$v_A = v_{\text{cm}} \sqrt{2}, \quad v_{\Gamma} = 2v_{\text{cm}}$$

$$\frac{v_A}{v_{\Gamma}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

