

Θέματα Β

Ροπή δύναμης

3.B.1 β.

Αναλύουμε τη δύναμη σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μία παράλληλη στη ράβδο. Είναι

$$F_x = F \sin \theta \quad \text{και} \quad F_y = F \eta \mu \theta$$

Η F_x δεν προκαλεί ροπή, γιατί ο φορέας της διέρχεται και από το Κ και από το Α.

Η ροπή της F ισούται με τη ροπή της F_y ως προς το Κ, είναι αρνητική, γιατί τείνει να περιστρέψει τη ράβδο κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού και είναι ίση με

$$\tau_{F(K)} = \tau_{F_y(K)} = -F_y(BK) = -F_y \frac{L}{4} \Rightarrow \tau_{F(K)} = -F \eta \mu \theta \frac{L}{4} \quad (1)$$

Η ροπή της F ισούται με τη ροπή της F_y ως προς το Α και είναι ίση με

$$\tau_{F(A)} = \tau_{F_y(A)} = -F_y(BA) = -F_y \frac{3L}{4} \Rightarrow \tau_{F(A)} = -F \eta \mu \theta \frac{3L}{4} \quad (2)$$

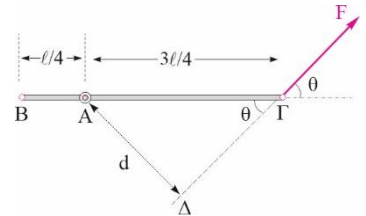
Ο λόγος της ροπής της δύναμης ως προς το κέντρο Κ της ράβδου και της ροπής ως προς το άκρο Α, προκύπτει με διαίρεση των σχέσεων (1) και (2) και είναι

$$\frac{\tau_{F(K)}}{\tau_{F(A)}} = \frac{-F \eta \mu \theta \frac{L}{4}}{-F \eta \mu \theta \frac{3L}{4}} = \frac{1}{3}$$

3.B.2 α.

Φέρνουμε τον φορέα της δύναμης και σ' αυτόν φέρνουμε την κάθετη που διέρχεται από το σημείο Α. Έτσι δημιουργείται το τρίγωνο ΑΓΔ, που από το ημίτονο της γωνίας θ και τον μοχλοβραχίονα d της ροπής της δύναμης προκύπτει η θ

$$\eta \mu \theta = \frac{d}{\frac{3L}{4}} \Rightarrow d = \frac{3L}{4} \eta \mu \theta \Rightarrow \frac{3L}{8} = \frac{3L}{4} \eta \mu \theta \Rightarrow \eta \mu \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$



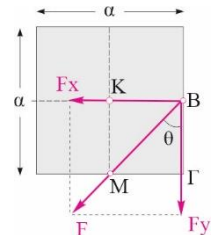
3.B.3 γ.

Αναλύουμε τη δύναμη σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μία παράλληλη στην πλευρά που εφαρμόζεται. Το τρίγωνο ΒΓΜ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, άρα η γωνία θ είναι 45° . Είναι

$$F_x = F \eta \mu \theta = F \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad F_y = F \sin \theta = F \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Η F_x δεν προκαλεί ροπή, γιατί ο φορέας της διέρχεται από το Κ.

Η ροπή της F ισούται με τη ροπή της F_y ως προς το Κ, είναι αρνητική, γιατί τείνει να περιστρέψει την πλάκα κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού και είναι ίση με



$$\tau_{F(K)} = \tau_{F_y(K)} = -F_y(BK) = -F_y \frac{\alpha}{2} = -F \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \tau_{F(K)} = -F\alpha \frac{\sqrt{2}}{4}$$

3.B.4 α.

Ως προς το Μ οι δυνάμεις F_1 και F_3 δεν δημιουργούν ροπή διότι οι φορείς τους διέρχονται από το Μ, ενώ

για τα μέτρα των ροπών των F_2 , F_4 και F_5 ισχύει :

$$\tau_2 = F_2(KM) \text{ και } \tau_4 = F_4(M\Lambda) \text{ άρα } \tau_2 = 2\tau_4$$

$$\tau_5 = F_5(MB) = F_5 \cdot 2(M\Lambda) \text{ άρα } \tau_5 = 2\tau_4.$$

Επομένως $\tau_5 = \tau_2 > \tau_4 > \tau_1 = \tau_3$.

3.B.5 α.

Ο φορέας της δύναμης ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ, άρα η ροπή της δύναμης ως προς αυτά τα σημεία έχει τον ίδιο μοχλοβραχίονα d που είναι ίσος με $\alpha/2$ και την ίδια ροπή που ισούται με

$$\tau_{F,B} = \tau_{F,\Gamma} = -F \frac{\alpha}{2}$$

Ο φορέας της δύναμης τέμνει την πλευρά ΑΓ στο μέσο της, άρα η ροπή της δύναμης ως προς το Α έχει μοχλοβραχίονα που είναι ίσος με $\alpha/2$ και η ροπή της είναι $\tau_{F,A} = F \frac{\alpha}{2}$.

Άρα, όλες οι ροπές έχουν το ίδιο μέτρο.

3.B.6 β.

Ροπή ως προς το Α δημιουργεί μόνο η F_3 με μέτρο

$$\tau_A = F_3(A\Delta) = F(A\Delta)$$

Ροπή ως προς το Γ δημιουργεί μόνο η F_2 με μέτρο

$$\tau_\Gamma = F_2(A\Gamma) = F(A\Gamma)$$

Ροπή ως προς το Β δημιουργεί μόνο η F_1 με μέτρο

$$\tau_B = F_1(AB) = F(AB)$$

Από το σχήμα προκύπτει $(AB) > (A\Gamma) > (A\Delta)$ επομένως η ροπή με το μεγαλύτερο μέτρο είναι η τ_B .

3.B.7 γ.

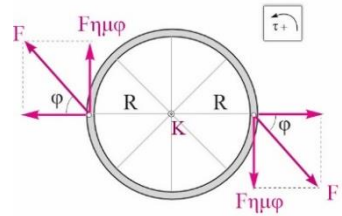
$$\tau_\Gamma = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = F_1(d+x) - F_2x + 0 \text{ Nm} \quad \text{ή} \quad \tau_\Gamma = F \cdot d$$

Το διάνυσμα της συνολικής ροπής έχει σημείο εφαρμογής το σημείο Γ, από το οποίο διέρχεται ο άξονας περιστροφής.

3.B.8 β.

$$\tau = F \cdot \eta \mu \phi \cdot R + F \cdot \eta \mu \phi \cdot R \Rightarrow$$

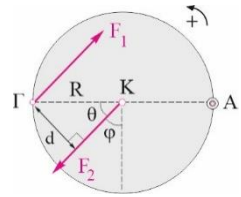
$$\tau = 2FR \cdot \eta \mu \phi$$



3.B.9 β.

Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων έχει ίδιο μέτρο ως προς οποιοδήποτε σημείο. Φέρουμε την απόσταση των φορέων των δυνάμεων που ισούται με $d=R\eta\mu\theta$. Από τη ροπή του ζεύγους προκύπτει η γωνία θ

$$\tau = -FR\eta\mu\theta \Rightarrow -\frac{FR}{2} = -FR\eta\mu\theta \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$



Άρα, η δύναμη F_2 σχηματίζει με την κάθετο στη διάμετρο ΑΓ, γωνία ϕ , που είναι συμπληρωματική της θ και είναι $\phi=60^\circ$.

3.β.10 β.

Για τα μέτρα των ροπών των δυνάμεων ισχύει

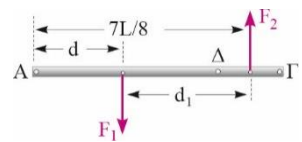
$$\tau_{F(A)} > \tau_{w(A)} \Rightarrow F \cdot \alpha > w \frac{\alpha}{2} \Rightarrow F > \frac{w}{2}$$

3.B.11 γ.

Η ροπή του ζεύγους είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο και είναι ίση με $\tau = F_1 d_1$, οπότε έχουμε

$$\tau = F_1 d_1 \Rightarrow F_1 \frac{L}{2} = F_1 d_1 \Rightarrow d_1 = \frac{L}{2}$$

$$d + d_1 = \frac{7L}{8} \Rightarrow d = \frac{7L}{8} - \frac{L}{2} = \frac{3L}{8}$$



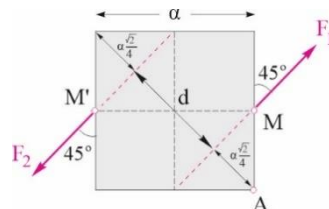
3.B.12 α.

$$\tau_{o\lambda(A)} = \tau_{o\lambda(K)} \Rightarrow F \cdot \alpha + F_T \cdot \alpha = 3F \cdot \frac{\alpha}{2} + F_T \cdot \frac{\alpha}{2} \Rightarrow F_T = F$$

3.B.13 α.

Η ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων έχει ίδιο μέτρο ως προς οποιοδήποτε σημείο. Οι φορείς των δυνάμεων τέμνουν τη διαγώνιο του τετραγώνου σε σημεία που απέχουν από τις κορυφές κατά

$$\frac{\alpha}{2} \eta \mu 45^\circ = \frac{\alpha}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha \frac{\sqrt{2}}{4}$$



Άρα, η απόσταση των φορέων των δυνάμεων ισούται με d , που προκύπτει αν από τη διαγώνιο αφαιρέσουμε δύο φορές την προηγούμενη απόσταση

$$d = \alpha\sqrt{2} - 2\alpha \frac{\sqrt{2}}{4} = \alpha \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και η ροπή του ζεύγους, που είναι θετική, γιατί τείνει να περιστρέψει την πλάκα αντίθετα από την ωρολογιακή φορά, είναι

$$\tau = Fd = F\alpha \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Σχόλιο: Αν για την ροπή ενός ζεύγους δυνάμεων μας δυσκολεύει να υπολογίσουμε την απόσταση των φορέων τους, μπορούμε να βρούμε τη ροπή της κάθε δύναμης ξεχωριστά και μετά να τις προσθέσουμε αλγεβρικά.

3.B.14 β.

Από τη συνολική ροπή των δύο δυνάμεων έχουμε

$$\tau_{\text{ολ},O} = -F_1 R - F_2 r \Rightarrow -5Fr = -2FR - Fr \Rightarrow 4Fr = 2FR \Rightarrow R = 2r$$

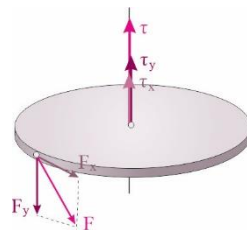
3.B.15 β.

Ένα αρχικά ακίνητο ελεύθερο στερεό όταν δεχθεί τη δράση μιας δύναμης F που ο φορέας της δεν περνά από το κέντρο μάζας, εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και στροφική κίνηση γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας. Άρα, η ροπή της F είναι $\tau = Fd$ και από τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα είναι $\Sigma F = m a_{\text{cm}}$ ή $a_{\text{cm}} = F/m$.

3.B.16 γ.

Λύσεις κεφαλαίου 3

Οι αλγεβρικές τιμές των ροπών των F_x και F_y είναι θετικές. Επειδή τα διανύσματα τους βρίσκονται στον ίδιο φορέα και έχουν την ίδια κατεύθυνση, το διανυσματικό τους άθροισμα συμπίπτει με το άθροισμα των μέτρων τους, δηλαδή $\tau_F = \tau_{F_x} + \tau_{F_y}$.

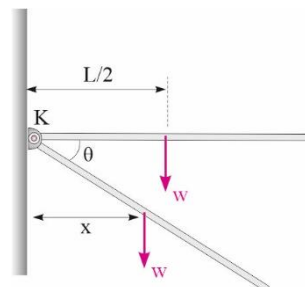


3.B.17 β.

$\tau_w = w \cdot x = w \cdot \frac{L}{2} \sin \theta$. Η συνάρτηση είναι συνημιτονοειδής.

$$\theta = 0 \text{ rad}, \quad \tau_w = w \cdot \frac{L}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \quad \tau_w = 0 \text{ Nm}$$



3.B.18 β.

Η συνολική ροπή των δύο βαρών είναι

$$\tau_{\text{ολ},A} = -Mgd_1 - mgd_2 = -Mg \frac{L}{2} \eta \mu \theta - mgL \eta \mu \theta = -2mg \frac{L}{2} \eta \mu \theta - mgL \eta \mu \theta \Rightarrow \tau_{\text{ολ},A} = -2mgL \eta \mu \theta$$

3.B.19 β.

Ο μοχλοβραχίονας της ροπής της F_1 ισούται με το ύψος d_1 του τριγώνου, που προκύπτει με το πυθαγόρειο θεώρημα

$$d_1 = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} \Rightarrow d_1 = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η ροπή της F_1 ως προς το Γ , είναι θετική, γιατί τείνει να περιστρέψει την πλάκα κατ' αντίθετη φορά από αυτή των δεικτών του ρολογιού και είναι ίση με

$$\tau_{F_1(\Gamma)} = F_1 d_1 \Rightarrow \tau_1 = F \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Ο μοχλοβραχίονας d_2 της ροπής της F_2 ισούται με $\alpha/2$, γιατί το ύψος του τριγώνου είναι και διάμεσος.

Η ροπή της F_2 ως προς το Γ , είναι αρνητική, γιατί τείνει να περιστρέψει την πλάκα κατά την ωρολογιακή φορά και είναι ίση με

$$\tau_{F_2(\Gamma)} = -F_2 d_2 \Rightarrow \tau_2 = -F \frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

Ο λόγος των ροπών των δυνάμεων, τ_1/τ_2 , ως προς την κορυφή Γ είναι

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{F\alpha \frac{\sqrt{3}}{2}}{-F\frac{\alpha}{2}} = -\sqrt{3}$$

3.B.20 α.

Μας δίνεται ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα πάνω, παράλληλα στο πλάγιο επίπεδο, οπότε ο 2ος νόμος του Νεύτωνα θα μας δώσει το μέτρο της

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow w_x - T_\sigma = m \frac{g}{3} \Rightarrow mg\mu 30^\circ - T_\sigma = m \frac{g}{3} \Rightarrow T_\sigma = m \frac{g}{6}$$

Η ροπή της T_σ ως προς το K, έχει μέτρο

$$|\tau_{T_\sigma(K)}| = T_\sigma R = \frac{mgR}{6}$$

3.B.21 γ.

Στην πρώτη περίπτωση, για να γίνει η ανατροπή πρέπει το μέτρο της ροπής της δύναμης ως προς το σημείο A, που λειτουργεί ως άξονας περιστροφής, να είναι μεγαλύτερο από τη ροπή του βάρους. Ο μοχλοβραχίονας της F ισούται με α . Για να βρούμε τον μοχλοβραχίονα d_1 του βάρους, φέρουμε από το A την απόσταση στον φορέα του βάρους, που τον τέμνει στο Δ. Η γωνία KAD είναι 30° , η πλευρά AK είναι μισή διαγώνιος, άρα

ισούται με $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ και το

$$d_1 = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \sin 30^\circ = \alpha \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Για την ανατροπή πρέπει

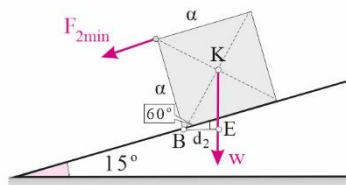
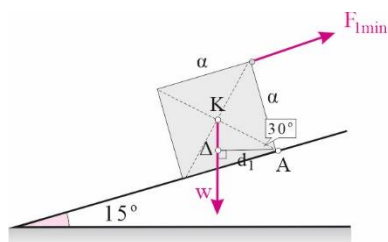
$$|\tau_{F(A)}| > \tau_{w(A)} \Rightarrow F_1 \alpha > w \alpha \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow F_1 > w \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow F_{1\min} = w \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Στη δεύτερη περίπτωση, ο μοχλοβραχίονας της F ισούται πάλι με α . Για να βρούμε τον μοχλοβραχίονα d_2 του βάρους, φέρουμε από το B την απόσταση στον φορέα του βάρους, που τον τέμνει στο E. Η γωνία KBE είναι 60° , η πλευρά BK είναι

μισή διαγώνιος, άρα ισούται με $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ και το

$$d_2 = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \sin 60^\circ = \alpha \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Για την ανατροπή πρέπει



$$|\tau_{F_2(B)}| > \tau_{w(B)} \Rightarrow F_2 \alpha > w \alpha \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow F_2 > w \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow F_{2min} = w \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ο λόγος F_{1min}/F_{2min} είναι ίσος με $\frac{F_{1min}}{F_{2min}} = \frac{w \frac{\sqrt{6}}{4}}{w \frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{3}$

3.B.22 γ.

Η συνολική ροπή των δύο τάσεων ως προς το O, είναι

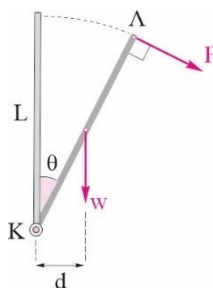
$$\tau_{ολ, O} = T_1 r - T_2 R = F \frac{R}{3} - 2FR \Rightarrow \tau_{ολ, O} = -5F \frac{R}{3}$$

3.B.23 α.

Σε μια τυχαία θέση της ράβδου κατά την κίνησή της, όταν σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο, η συνολική ροπή ως προς το K, της δύναμης F και του βάρους έχει μέτρο

$$|\tau_{ολ, K}| = FL + wd = FL + w \frac{L}{2} \eta \mu \theta = \frac{w}{2} L + w \frac{L}{2} \eta \mu \theta \Rightarrow |\tau_{ολ, K}| = \frac{wL}{2} (1 + \eta \mu \theta)$$

Το διάγραμμα είναι ημιτονοειδούς μορφής, που εναλλάσσεται γύρω από την τιμή $wL/2$, με μέγιστη τιμή wL , όταν $\theta=90^\circ$ και ελάχιστη τιμή μηδέν, όταν $\theta=270^\circ$. Όταν η ράβδος είναι κατακόρυφη, δηλαδή $\theta=0^\circ$ ή $\theta=180^\circ$, τότε η ροπή του βάρους μηδενίζεται και η συνολική ροπή ισούται με τη ροπή της F, $\tau_F = wL/2$.



Ισορροπία στερεού σώματος

3.B.24 γ.

Πρέπει $\Sigma \tau = 0$. Επειδή η ροπή του βάρους w είναι θετική, πρέπει η ροπή της F να είναι αρνητική, άρα έχει κατεύθυνση προς τα πάνω (αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν του βάρους).

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow w \frac{\ell}{2} - F \ell = 0 \Rightarrow F = \frac{w}{2}$$

3.B.25 β.

Επειδή η ροπή της F_1 είναι αρνητική, πρέπει η ροπή της F_2 να είναι θετική, άρα πρέπει να έχει κατεύθυνση προς τα κάτω, ίδια με αυτή της F_1 .

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow F_2 \frac{3\ell}{4} - F_1 \frac{\ell}{4} = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{F_1}{3}$$

3.B.26 α.

$$\Sigma \tau_{(O)} = F_1 \frac{\ell}{2} + F_2 \eta \mu 30^\circ \ell - F_3 \ell = 0 \Rightarrow \Sigma \tau_{(O)} = 0$$

και η ράβδος θα ισορροπεί.

3.B.27 α.

Από τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών, $\Sigma \tau_{(P)} = 0$, ως προς το σημείο στήριξης προκύπτει

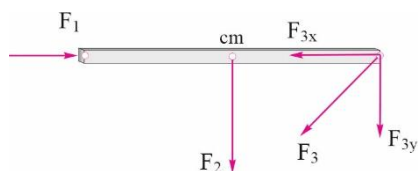
$$\Sigma \tau_{(P)} = 0 \Rightarrow w_1 x_1 - w_2 x_2 = 0 \Rightarrow w_2 = 2w_1$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων στον άξονα γ προκύπτει

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow N = 3w_1$$

3.B.28 γ.

Οι δυνάμεις F_2 και F_{3y} έχουν την ίδια φορά, οπότε στον άξονα γ υπάρχει σίγουρα δύναμη, άρα η ράβδος κάνει μεταφορική κίνηση, ανεξάρτητα από το αν οι συνιστώσες στον άξονα x αλληλοαναιρούνται ή όχι.



Αφού η ράβδος είναι ελεύθερο στερεό, αν περιστραφεί, θα περιστραφεί γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Οι ροπές των F_1 , F_2 και F_{3x} ως προς το B είναι μηδέν, άρα η συνολική ροπή που δημιουργείται στη ράβδο είναι της συνιστώσας F_{3y} που τείνει να περιστρέψει τη ράβδο όπως στρέφονται οι δείκτες του ρολογιού.

3.B.29 β.

Από τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων στον άξονα γ προκύπτει,

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow 3w_1 - w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = 2w_1$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών, ως προς το σημείο στήριξης K προκύπτει

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow w_1 \ell_1 - w_2 \ell_2 = 0 \Rightarrow \ell_2 = 2\ell_1$$

$$d = \ell_1 + \ell_2 = 3\ell_2$$

3.B.30 γ.

Από τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών, ως προς το σημείο στήριξης K των δακτύλων προκύπτει

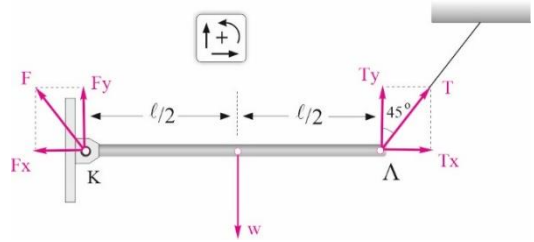
$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow F_1 \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{8} \right) - w \frac{\alpha}{4} = 0 \Rightarrow F_1 = 2w$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων στον άξονα γ προκύπτει

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_2 - F_1 - w = 0 \Rightarrow F_2 = 3w$$

3.B.31 α.

Σχεδιάζουμε τη δύναμη στην άρθρωση Κ γνωρίζοντας ότι όταν αναλύσουμε τις δυνάμεις T και F σε δύο άξονες, λόγω της T_x , για να υπάρχει ισορροπία στη ράβδο, θα πρέπει η F_x να είναι προς τα αριστερά.



Παίρνουμε ροπές ως προς το Λ

$$\Sigma \tau_{(\Lambda)} = 0 \Rightarrow w \cdot \frac{\ell}{2} - F_y \cdot \ell = 0 \Rightarrow F_y = \frac{w}{2} > 0 \quad (1)$$

Άρα η F_y έχει φορά προς τα πάνω.

Η ράβδος ισορροπεί, επομένως στον άξονα y έχουμε

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + T_y = w \Rightarrow F_y + T \frac{\sqrt{2}}{2} = w \xrightarrow{(1)} T = w \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

Στον άξονα x έχουμε

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x - T_x = 0 \Rightarrow F_x = T \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{(2)} F_x = w \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{w}{2}$$

Το μέτρο της δύναμης F είναι

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2} \Rightarrow F = \frac{w\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως η δύναμη F έχει μέτρο $F = \frac{w\sqrt{2}}{2}$ και κατεύθυνση προς τα πάνω και αριστερά.

3.B.32 γ.

Η σανίδα θα ανατραπεί στη θέση που οριακά παύει να ισχύει η σχέση ισορροπίας $\Sigma \tau = 0$. Εκείνη τη στιγμή χάνεται η επαφή από το στήριγμα Β, οπότε ασκούνται στη ράβδο τρεις δυνάμεις: το βάρος της, η δύναμη εξαιτίας του βάρους του κύβου και η δύναμη από την άρθρωση Γ. Έστω x η μετατόπιση του κύβου, που σίγουρα πρέπει να βρεθεί δεξιά του σημείου Γ για να προκληθεί η ανατροπή. Παίρνουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τις ροπές ως προς το Γ και βρίσκουμε τη μετατόπιση x του κύβου

$$\Sigma \tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow w_{\sigma} \frac{L}{4} - w_{\kappa} \left(x - \frac{L}{2} \right) = 0 \Rightarrow Mg \frac{L}{4} = mg \left(x - \frac{L}{2} \right) \Rightarrow$$

$$Mg \frac{L}{4} = 2Mg \left(x - \frac{L}{2} \right) \Rightarrow x = \frac{5L}{8}$$

Αφού ο κύβος κινείται με σταθερή ταχύτητα, θα κινηθεί για χρόνο

$$t = \frac{x}{v} = \frac{5L}{8v}$$

3.B.33 γ.

Αναλύουμε τη δύναμη σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μία παράλληλη στη ράβδο. Είναι

$$F_x = F \sin \varphi \quad \text{και} \quad F_y = F \eta \mu \varphi$$

Η F_x δεν προκαλεί ροπή, γιατί ο φορέας της διέρχεται από το Ο. Η ροπή της F ισούται με τη ροπή της F_y ως προς το Ο. Η ροπή του βάρους της ράβδου, αφού αυτό εφαρμόζεται στο κέντρο της Ο, είναι μηδέν. Το βάρος του σώματος μεταφέρεται στη ράβδο, αφού αυτό ισορροπεί.

Η ράβδος ισορροπεί, άρα η σχέση ισορροπίας για τις ροπές ως προς το Ο δίνει

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow w_{\sigma} \frac{L}{4} - F_y \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{4} = F \eta \mu \varphi \frac{L}{2} \Rightarrow F = \frac{mg}{2 \eta \mu \varphi}$$

3.B.34 β.

Στη σκάλα, έστω μήκους L , ασκούνται τέσσερις δυνάμεις: το βάρος της στο μέσο της, οι δύο κάθετες δυνάμεις από τοίχο και δάπεδο και η δύναμη της στατικής τριβής στο δάπεδο προς τα αριστερά.

Από την ισορροπία των δυνάμεων στον άξονα x έχουμε

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 - T_{\sigma} = 0 \Rightarrow N_1 = T_{\sigma}$$

Από την ισορροπία των δυνάμεων στον άξονα y έχουμε

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = w$$

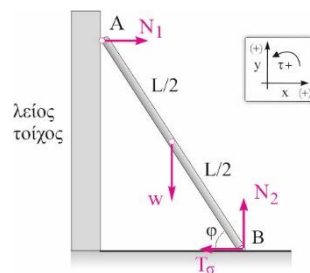
Παίρνουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τις ροπές ως προς το Γ και βρίσκουμε

$$\Sigma \tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow w \frac{L}{2} \sin \varphi - N_1 L \eta \mu \varphi = 0 \Rightarrow w = 2 N_1 \epsilon \varphi = 2 T_{\sigma} \epsilon \varphi \Rightarrow T_{\sigma} = \frac{w}{2 \epsilon \varphi}$$

Για τη στατική τριβή ισχύει

$$T_{\sigma} \leq T_{\sigma, \max} \Rightarrow \frac{w}{2 \epsilon \varphi} \leq \mu_{\sigma} N_2 \Rightarrow \frac{w}{2 \epsilon \varphi} \leq \mu_{\sigma} w \Rightarrow \epsilon \varphi \geq \frac{1}{2 \mu_{\sigma}} \Rightarrow \epsilon \varphi_{\min} = \frac{1}{2 \mu_{\sigma}}$$

3.B.35 γ.

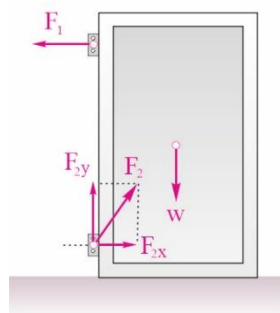


Αφού όλο το βάρος της πόρτας συγκρατείται από τον κάτω μεντεσέ, από τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων στον άξονα y έχουμε

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{2y} - w = 0 \Rightarrow F_{2y} = w \text{ με φορά προς τα πάνω.}$$

Η πόρτα λόγω της ροπής του βάρους πάει να περιστραφεί ως προς το σημείο στήριξης (κάτω μεντεσέ). Τη στροφική ισορροπία την εξασφαλίζει η οριζόντια δύναμη F_1 που ασκεί ο πάνω μεντεσές στην πόρτα. Για να είναι η ροπή της F_1 αντίθετη της ροπής του βάρους θα πρέπει η F_1 να έχει φορά προς τα αριστερά.

Από τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων στον άξονα x προκύπτει ότι η οριζόντια συνιστώσα που ασκεί ο κάτω μεντεσές στην πόρτα, F_{2x} , θα πρέπει να έχει φορά προς τα δεξιά.



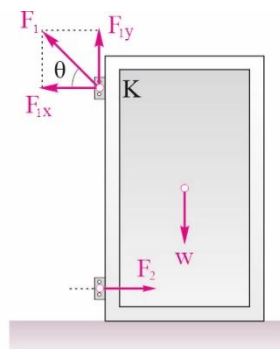
3.B.36 α.

Αφού όλο το βάρος της πόρτας συγκρατείται από τον πάνω μεντεσέ, από τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων στον άξονα y έχουμε

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{1y} - w = 0 \Rightarrow F_{1y} = w \text{ με φορά προς τα πάνω.}$$

Η πόρτα λόγω της ροπής του βάρους πάει να περιστραφεί ως προς το σημείο στήριξης (πάνω μεντεσέ). Τη στροφική ισορροπία την εξασφαλίζει η οριζόντια δύναμη F_2 που ασκεί ο κάτω μεντεσές στην πόρτα. Για να είναι η ροπή της F_2 αντίθετη της ροπής του βάρους θα πρέπει η F_2 να έχει φορά προς τα δεξιά.

Από τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων στον άξονα x προκύπτει ότι η οριζόντια συνιστώσα που ασκεί ο πάνω μεντεσές στην πόρτα, F_{1x} , θα πρέπει να έχει φορά προς τα αριστερά.



3.B.37 γ.

Εφόσον η ράβδος ισορροπεί, η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο είναι μηδέν. Παίρνουμε το άθροισμα των ροπών των τάσεων των σκοινιών, ως προς το O

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T_1 L_1 - T_2 L_2 = 0 \Rightarrow T_1 L_1 = T_2 L_2 \Rightarrow T_2 = 2T_1$$

Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 είναι σε ισορροπία οπότε $T_1 = w_1$, $T_2 = w_2$. Άρα $w_2 = 2w_1$.

Επειδή $\Sigma \tau = 0$ είναι $\tau_1 + \tau_2 = 0$, άρα, ισχύει $\tau_1 = -\tau_2$.

3.B.38 β.

Η ράβδος AB ισορροπεί. Εφαρμόζουμε ροπές ως προς το O και παίρνουμε

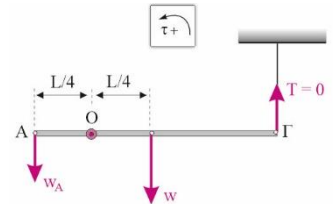
$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T \cdot \frac{3L}{4} - w \frac{L}{4} = 0 \Rightarrow T = \frac{w}{3}$$

3.B.39 γ.

Κρεμώντας το σώμα μέσω νήματος στην άκρη Α, επειδή αυτό ισορροπεί, το βάρος του w_A θα ισούται με την τάση του νήματος. Εφαρμόζουμε ροπές ως προς το Ο και παίρνουμε

$$T = 0, \Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow$$

$$w_A \frac{L}{4} - w \frac{L}{4} = 0 \Rightarrow w_A = w$$



3.B.40 α.

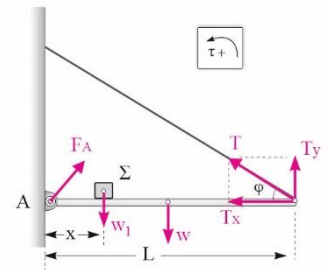
Τοποθετούμε το σώμα σε απόσταση x από το Α. Η ράβδος ισορροπεί, επομένως

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T_y \cdot L - w \frac{L}{2} - w_1 x = 0 \Rightarrow$$

$$T \cdot \eta \mu \phi \cdot L = w \frac{L}{2} + w_1 x \Rightarrow$$

$$T = \frac{w}{2 \eta \mu \phi} + \frac{w_1}{L \eta \mu \phi} x$$

Η συνάρτηση $T=f(x)$ είναι αύξουσα 1^{ου} βαθμού, αφού ο συντελεστής του x είναι θετικός.



3.B.41 γ.

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow F \cdot R - F_1 \cdot R - F_2 \cdot 2R = 0$$

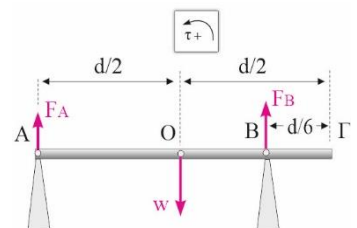
Επειδή τα σώματα Σ_1 και Σ_2 είναι σε ισορροπία $F_1=w_1$ και $F_2=w_2$ επομένως

$$F = w + 4w = 5w$$

3.B.42 α.

Η ράβδος ισορροπεί. Εφαρμόζουμε ροπές ως προς το Ο

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow F_B \left(\frac{d}{2} - \frac{d}{6} \right) - F_A \cdot \frac{d}{2} = 0 \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{2}{3}$$



3.B.43 β.

Αναλύουμε τη δύναμη σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μία παράλληλη στη ράβδο. Είναι

$$F_x = F \sin \varphi \quad \text{και} \quad F_y = F \eta \mu \varphi$$

Η F_x δεν προκαλεί ροπή, γιατί ο φορέας της διέρχεται από το Κ. Η ροπή της F ισούται με τη ροπή της F_y ως προς το Κ. Η ράβδος ισορροπεί, άρα η σχέση ισορροπίας για τις ροπές ως προς το Κ δίνει

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow -w \frac{L}{2} + F_y \frac{2L}{3} = 0 \Rightarrow Mg \frac{L}{2} = F \eta \mu \varphi \frac{2L}{3} \Rightarrow F = \frac{3Mg}{4 \eta \mu 30^\circ} = \frac{3Mg}{2}$$

3.B.44 α.

Για να ισορροπήσει ο τροχός, θα ασκήσουμε σε αυτόν μια πρόσθετη ροπή τ . Εφαρμόζουμε ροπές ως προς το Κ

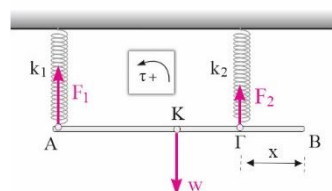
$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow F_2 \cdot \frac{R}{2} + F_1 \cdot R + \tau = 0 \Rightarrow \tau = -2FR$$

3.B.45 β.

Τα ελατήρια έχουν το ίδιο φυσικό μήκος και η ράβδος είναι οριζόντια. Αυτά έχουν επιμηκυνθεί κατά $\Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y$ δεχόμενα από τη ράβδο κατακόρυφες δυνάμεις προς τα κάτω $F_1 = k_1 \Delta y_1$, $F_2 = k_2 \Delta y_2$.

Από τον 3^ο νόμο του Νεύτωνα και τα ελατήρια ασκούν δυνάμεις ίσου μέτρου στη ράβδο. Υπολογίζουμε τις ροπές ως προς το Κ και έχουμε

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_{(K)} = 0 &\Rightarrow F_2 \cdot \left(\frac{L}{2} - x \right) - F_1 \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \\ \left(\frac{L}{2} - x \right) k_2 \cdot \Delta y &= \frac{L}{2} k_1 \cdot \Delta y \Rightarrow x = \frac{L}{4} \end{aligned}$$



3.B.46 γ.

Το σώμα Σ κρέμεται από το άκρο Α (σχήμα α) και η αβαρής ράβδος ισορροπεί οριζόντια αν στο άκρο Β τοποθετηθεί σώμα βάρους w_1 . Λόγω ισορροπίας έχουμε

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T \cdot L_1 - T_1 \cdot L_2 = 0 \Rightarrow w \cdot L_1 = w_1 \cdot L_2, \quad (1)$$

Το σώμα Σ κρέμεται από το άκρο Β (σχήμα β) και η αβαρής ράβδος ισορροπεί οριζόντια αν στο άκρο Α τοποθετηθεί σώμα βάρους w_2 . Λόγω ισορροπίας έχουμε

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow T_2 \cdot L_1 - T \cdot L_2 = 0 \Rightarrow w_2 \cdot L_1 = w \cdot L_2, \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1),(2) παίρνουμε

$$\frac{w \cdot L_1}{w_2 \cdot L_1} = \frac{w_1 \cdot L_2}{w \cdot L_2} \Rightarrow w = \sqrt{w_1 \cdot w_2}$$

3.B.47 β.

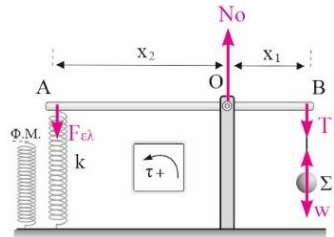
Το σώμα Σ ισορροπεί, επομένως $T=w$.

Έστω ότι η δύναμη του ελατηρίου είναι προς τα κάτω. Από την

ισορροπία της ράβδου παίρνουμε

$$\Sigma \tau_{(O)} = 0 \Rightarrow F_{ελ} \cdot x_2 - T \cdot x_1 = 0 \Rightarrow$$

$$F_{ελ} = \frac{T \cdot x_1}{x_2} > 0 \Rightarrow F_{ελ} > 0$$



Αφού η δύναμη του ελατηρίου προέκυψε θετική, σχεδιάσαμε σωστά τη φορά της, άρα το ελατήριο είναι επιμηκυμένο.

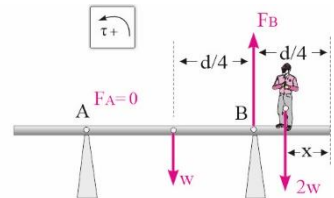
Αντικαθιστώντας όπου $x_1=d/3$ και $x_2=2d/3$, προκύπτει

$$F_{ελ} = \frac{T \cdot x_1}{x_2} \Rightarrow kx = \frac{wd/3}{2d/3} \Rightarrow x = \frac{w}{2k}.$$

3.B.48 β.

Όταν το δοκάρι είναι έτοιμο να ανατραπεί, η δύναμη που ασκείται σε αυτό από το στήριγμα A μηδενίζεται και το δοκάρι ισορροπεί οριακά. Επομένως, η συνισταμένη των ροπών ως προς οποιοδήποτε σημείο παραμένει μηδέν και έχουμε ως προς το B

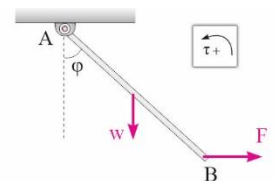
$$\Sigma \tau_{(B)} = 0 \Rightarrow w \frac{d}{4} - 2w \left(\frac{d}{4} - x \right) = 0 \Rightarrow x = \frac{d}{8}$$



3.B.49 α.

Η ράβδος AB ισορροπεί. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας ως προς το A

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F \cdot L \sin \varphi - w \frac{L}{2} \eta \mu \varphi = 0 \Rightarrow \varepsilon \varphi \varphi = \frac{2F}{w}$$



3.B.50 γ.

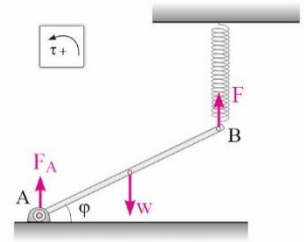
Λύσεις κεφαλαίου 3

Η ράβδος AB ισορροπεί. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας ως προς το A

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F \cdot L \sin \varphi - w \frac{L}{2} \sin \varphi = 0 \Rightarrow$$

$$F \cdot L - w \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow kx = \frac{w}{2} \Rightarrow x = \frac{w}{2k}$$

Παρατηρούμε ότι η επιμήκυνση x του ελατηρίου είναι ανεξάρτητη της γωνίας φ .



3.B.51 β.

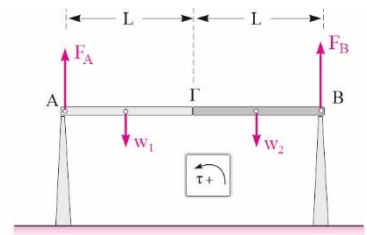
$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow F_B \cdot 2L - w_2 \frac{3L}{2} - w_1 \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{7w_1}{2} = \frac{3w_2}{2} + \frac{w_1}{2} \Rightarrow w_2 = 2w_1, \quad (1)$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{m_1}{\rho_1} = \frac{m_2}{\rho_2} \Rightarrow \frac{m_1 g}{\rho_1} = \frac{m_2 g}{\rho_2} \Rightarrow$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{w_1 \rho_2}{\rho_1} = 2w_1 \Rightarrow \rho_2 = 2\rho_1$$



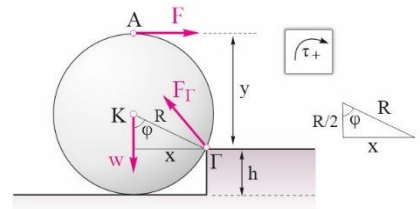
3.B.52 β.

Για να περιστραφεί ως προς το Γ πρέπει

$$\Sigma \tau_{(G)} \geq 0 \Rightarrow F \cdot y - w \cdot x \geq 0 \Rightarrow$$

$$F_{\min} \cdot \frac{3R}{2} = w \cdot R \eta \mu \varphi \Rightarrow F_{\min} \cdot \frac{3}{2} = w \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$F_{\min} = w \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

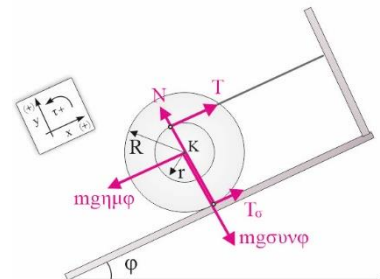


3.B.53 γ.

Η διπλή τροχαλία ισορροπεί. Αναλύουμε τις δυνάμεις στον άξονα x που είναι παράλληλος στο πλάγιο επίπεδο και στον άξονα y που είναι κάθετος στο επίπεδο. Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας παίρνουμε

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T + T_\sigma - m g \eta \mu \varphi = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow T_\sigma \cdot R - T \cdot r = 0 \Rightarrow T = 2T_\sigma, \quad (2)$$



$$\xrightarrow{(1),(2)} T + \frac{T}{2} = mg\eta\mu\varphi \Rightarrow T = \frac{w}{3}$$

3.B.54 α.

Η διπλή τροχαλία ισορροπεί, επομένως εφαρμόζοντας ροπές ως προς το Κ έχουμε

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \Rightarrow T_2 \cdot 2R - F_{ελ} \cdot R - T_1 \cdot R = 0, \quad (1)$$

$$T_2 = w, \quad T_1 = w, \quad F_{ελ} = kx$$

$$(1) \Rightarrow 2w = kx + w \Rightarrow x = \frac{w}{k}$$

3.B.55 γ.

Η σανίδα δεν πρέπει να ανατραπεί ακόμα κι αν ο άνθρωπος πατήσει στα άκρα της. Τότε η σανίδα ισορροπεί οριακά και εκείνη τη στιγμή χάνεται η επαφή από το ένα στήριγμα, οπότε η δύναμη από αυτό μηδενίζεται.

Αν ο άνθρωπος βρεθεί στο δεξιό άκρο, στη ράβδο ασκούνται τρεις δυνάμεις: το βάρος της, το βάρος του ανθρώπου που μεταφέρεται στη ράβδο, αφού ο άνθρωπος ισορροπεί και η δύναμη από το στήριγμα Δ. Παίρνουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τις ροπές ως προς το Δ

$$\Sigma\tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow w_{\sigma} \frac{L}{4} - w_{\alpha} \frac{L}{4} = 0 \Rightarrow m = M$$

Άρα, ο άνθρωπος πρέπει να έχει μάζα το πολύ όσο η σανίδα, για να μπορεί να πατήσει στο δεξιό άκρο.

Αν ο άνθρωπος βρεθεί στο αριστερό άκρο, χάνεται η επαφή στο στήριγμα Δ και παίρνουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τις ροπές ως προς το Γ

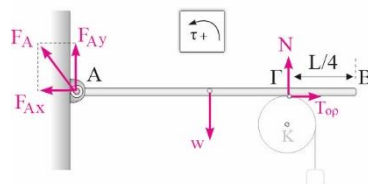
$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \Rightarrow -w_{\sigma} \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) + w_{\alpha} \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow \frac{mg}{3} = \frac{Mg}{6} \Rightarrow m = \frac{M}{2}$$

Άρα, ο άνθρωπος πρέπει να έχει μάζα το πολύ όσο το μισό της σανίδας και αυτή η περίπτωση καλύπτει και την προηγούμενη, δηλαδή πρέπει $m \leq M/2$.

3.B.56 γ.

Για τη ράβδο που ισορροπεί εφαρμόζοντας ροπές ως προς το Α έχουμε

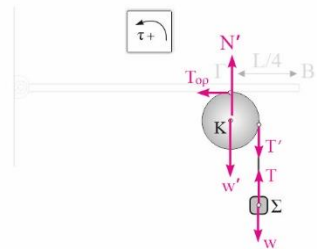
$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \Rightarrow N \frac{3L}{4} - 2w \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow N = \frac{4w}{3}, \quad (1)$$



Για τον δίσκο που ισορροπεί εφαρμόζοντας ροπές ως προς το Κ έχουμε

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow T_{op} \cdot R - w \cdot R = 0 \Rightarrow T_{op} = w, (2)$$

$$T_{op} = \mu N \xrightarrow{(1),(2)} w = \mu \frac{4w}{3} \Rightarrow \mu = \frac{3}{4}$$



3.B.57 α.

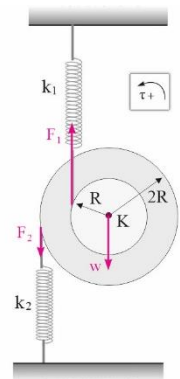
Για να ικανοποιείται η σχέση $\Sigma \tau_{(K)} = 0$ πρέπει το ελατήριο σταθεράς k_2 να ασκεί δύναμη προς τα κάτω, δηλαδή να είναι επιμηκνυμένο.

Εφαρμόζουμε ροπές ως προς το Κ και έχουμε

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow F_2 \cdot 2R - F_1 \cdot R = 0 \Rightarrow F_1 = 2F_2, (1)$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_2 + w - F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 + w, (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} 2F_2 = F_2 + w \Rightarrow F_2 = w$$



3.B.58 γ.

Από τις συνθήκες ισορροπίας για τη ράβδο παίρνουμε

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T \cdot L - w_1 \cdot L - w \cdot \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow$$

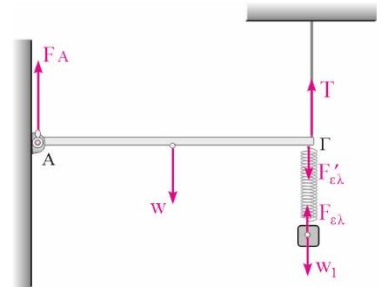
$$T = w_1 + \frac{w}{2}, (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_A + T - w_1 - w = 0 \Rightarrow$$

$$F_A = w + w_1 - T, (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε $F_A = w/2$.

Από τον 3ο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει ότι η και ράβδος ασκεί στην άρθρωση δύναμη μέτρου $w/2$.



3.B.59 i. β. ii. α.

i. Στη ράβδο, ασκούνται τέσσερις κατακόρυφες δυνάμεις: το βάρος της, τα βάρη από τα τρία βαρίδια, που μεταφέρονται στη ράβδο επειδή ισορροπούν και η δύναμη F από την άρθρωση στο Κ. Η ροπή του βάρους της ράβδου, αφού αυτό εφαρμόζεται στο κέντρο της Κ, είναι μηδέν.

Λύσεις κεφαλαίου 3

Η ράβδος ισορροπεί, άρα η σχέση ισορροπίας για τις ροπές ως προς το Κ δίνει

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{4} + mg \frac{L}{2} - Mg d = 0 \Rightarrow d = \frac{3L}{8}$$

ii. Από την ισορροπία των δυνάμεων στον κατακόρυφο άξονα έχουμε

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F = mg + mg + M_1 g + Mg \Rightarrow F = 9mg$$

3.B.60 α.

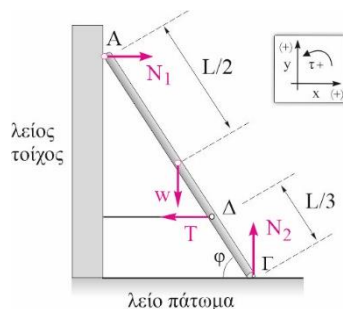
Στη σκάλα, ασκούνται τέσσερις δυνάμεις: το βάρος της στο μέσο της, οι δύο κάθετες δυνάμεις από τοίχο και δάπεδο και η δύναμη της τάσης του νήματος προς τα αριστερά.

Από την ισορροπία των δυνάμεων στον άξονα x έχουμε

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_1 - T = 0 \Rightarrow N_1 = T$$

Παίρνουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τις ροπές ως προς το Γ και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \Sigma \tau_{(\Gamma)} = 0 &\Rightarrow w \frac{L}{2} \sin \varphi - N_1 L \eta \mu \varphi + T \frac{L}{3} \eta \mu \varphi = 0 \Rightarrow \\ w \frac{1}{2} \frac{1}{2} - T \frac{\sqrt{3}}{2} + T \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0 \Rightarrow T = w \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



3.B.61 γ.

Στην οριακή κατάσταση της υπερπήδησης του εμποδίου χάνεται η επαφή από το πλάγιο επίπεδο και μηδενίζεται η δύναμη στήριξης από αυτό.

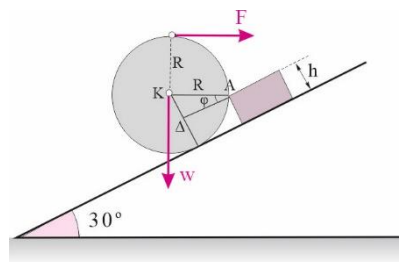
Θα δείξουμε ότι αν φέρουμε από το σημείο Α που ακουμπάει η σφαίρα στο εμπόδιο, μια οριζόντια ευθεία, αυτή τέμνει την κατακόρυφο διάμετρο στο κέντρο της.

Φέρουμε την ακτίνα της σφαίρας προς το σημείο επαφής με το πλάγιο επίπεδο και την κάθετη σ' αυτή από το Α που την τέμνει στο Δ. Στο τρίγωνο ΑΚΔ είναι

$$\eta \mu \varphi = \frac{R - h}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

Άρα, η ΑΚ είναι οριζόντια, αφού η γωνία φ είναι ίση με τη γωνία του πλάγιου επιπέδου και ισούται με τον μοχλοβραχίονα του βάρους.

Ο μοχλοβραχίονας της δύναμης F ως προς το σημείο επαφής της σφαίρας με το εμπόδιο είναι ίσος κι αυτός με R.



Παίρνουμε την οριακή συνθήκη ισορροπίας για τις ροπές ως προς το Α

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow wR - FR = 0 \Rightarrow F = w$$

Άρα, για να ξεκινήσει η σφαίρα την υπερπήδηση του εμποδίου πρέπει η δύναμη να γίνει μεγαλύτερη από το βάρος της σφαίρας.

3.B.62 γ.

Στη ράβδο, ασκούνται τρεις οριζόντιες δυνάμεις: η τάση του νήματος, η δύναμη του ελατηρίου και η δύναμη στην άρθρωση F.

Παίρνουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τις ροπές ως προς το Κ

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} \frac{L}{3} - T \frac{2L}{3} = 0 \Rightarrow T = \frac{F_{\varepsilon\lambda}}{2} = \frac{kd}{2}$$

Από την ισορροπία των δυνάμεων στον άξονα x έχουμε

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F = F_{\varepsilon\lambda} + T = kd + \frac{kd}{2} \Rightarrow F = \frac{3kd}{2}$$

3.B.63 A. β . B. α .

A. Λίγο πριν την ανατροπή, η N_2 μηδενίζεται, η σανίδα οριακά ισορροπεί και το Σ βρίσκεται σε απόσταση x από το υποστήριγμα 1. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη ισορροπίας ως προς το Z

$$\Sigma \tau_{(z)} = 0 \Rightarrow mgx - Mg \frac{\ell}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{\ell}{8}$$

Η απόσταση s που έχει διανύσει το Σ είναι

$$s = \frac{\ell}{4} + x = \frac{3\ell}{8}$$

Β. Η ταχύτητα του Σ είναι ίδια με αυτήν της σανίδας και του ανώτατου σημείου του δίσκου. Επειδή ο δίσκος κυλάει και δεν ολισθαίνει ως προς τη σανίδα ισχύει $v = 2u_{cm}$. Επομένως

$$S_{cm} = v_{cm} \cdot t_1 \quad (1)$$

όπου $t_1 = \frac{s}{v} = \frac{3\ell}{8v}$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε $s_{cm} = \frac{v}{2} \cdot \frac{3\ell}{8v} = \frac{3\ell}{16}$.

