

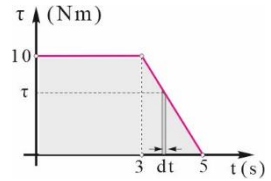
Θέματα Β

Στροφορμή και μεταβολή της στροφορμής

4.B.1 γ.

Το στοιχειώδες εμβαδό είναι αριθμητικά ίσο με $\tau dt = dL$. Άρα το άθροισμα όλων των στοιχειωδών εμβαδών μεταξύ 0-5s μας δίνει το συνολικό ΔL

$$\Delta L = 10 \cdot 3 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} + \frac{1}{2} 10 \cdot 2 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} = 40 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

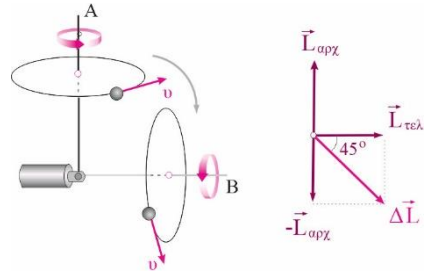


Τη χρονική στιγμή $t=5\text{s}$ η στροφορμή παίρνει τη μέγιστη τιμή της που είναι ίση με $40 \text{ kg m}^2/\text{s}$.

4.B.2 γ.

Τοποθετώντας τα διανύσματα των στροφορμών σε κοινή αρχή και αφαιρώντας τα, παρατηρούμε ότι το $\Delta \vec{L}$ σχηματίζει γωνία 45° με τον οριζόντα, καθώς $\epsilon\phi\phi = L_{\text{αρχ}}/L_{\text{τελ}} = 1$ και έχει μέτρο

$$|\Delta \vec{L}| = \sqrt{L_{\text{αρχ}}^2 + L_{\text{τελ}}^2} = L\sqrt{2}$$



4.B.3 β.

$$0 \rightarrow t_1 : \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_0 - 0}{t_1 - 0} = \frac{v_0}{t_1} > 0 = \sigma\tau\alpha\theta ,$$

$$\left(\frac{dL}{dt} \right)_1 = \frac{d(mvr)}{dt} = mr \frac{dv}{dt} = \frac{mr v_0}{t_1} > 0 = \sigma\tau\alpha\theta$$

$$t_1 \rightarrow t_2 : \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_0}{t_2 - t_1} = \frac{-v_0}{t_2 - t_1} < 0 = \sigma\tau\alpha\theta ,$$

$$\left(\frac{dL}{dt} \right)_2 = \frac{d(mvr)}{dt} = mr \frac{dv}{dt} = -\frac{mr v_0}{t_2 - t_1} < 0 = \sigma\tau\alpha\theta$$

Επίσης, επειδή $t_1 < t_2 - t_1$ είναι

$$\left(\frac{dL}{dt} \right)_1 = \frac{mr v_0}{t_1} > \left| \left(\frac{dL}{dt} \right)_2 \right| = \frac{mr v_0}{t_2 - t_1}$$

4.B.4 γ.

Σε ένα διάγραμμα ροπής – χρόνου, στο εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση, τον άξονα του χρόνου και τις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, αντιστοιχεί η μεταβολή της στροφορμής του σφαιριδίου. Αυτό προκύπτει από τη σχέση $\Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta L = \Sigma \tau \cdot \Delta t$, αν την εφαρμόσουμε για μικρά χρονικά διαστήματα Δt και αθροίσουμε τις στοιχειώδεις μεταβολές της στροφορμής. Έτσι έχουμε

$$\Delta L \leftrightarrow \text{εμβαδό} \Rightarrow L - 0 = 16 \cdot 2 + \frac{16 \cdot 3}{2} \Rightarrow L = 56 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

4.B.5 β.

Αφού η κεντρομόλος επιτάχυνση του σώματος υποτετραπλασιάζεται η γραμμική του ταχύτητα υποδιπλασιάζεται, καθώς

$$\alpha_{\kappa} = \frac{a_{\kappa,0}}{4} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{r} \Rightarrow v = \frac{v_0}{2}$$

Άρα, για την στροφορμή του ισχύει

$$L = mvr = m \frac{v_0}{2} r \Rightarrow L = \frac{L_0}{2}$$

4.B.6 β.

Οι δύο μάζες έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω , καθώς κινούνται μαζί ενσωματωμένες στη ράβδο. Οι δύο στροφορμές είναι ομόρροπες, οπότε η στροφορμή του συστήματος έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των στροφορμών των δύο μαζών. Άρα

$$L = L_1 + L_2 = m_1 v_1 \frac{d}{3} + m_2 v_2 \frac{2d}{3} = m\omega \left(\frac{d}{3}\right)^2 + 3m\omega \left(\frac{2d}{3}\right)^2 \Rightarrow L = \frac{13m\omega d^2}{9} \Rightarrow L = \frac{13mv_1 d}{3}$$

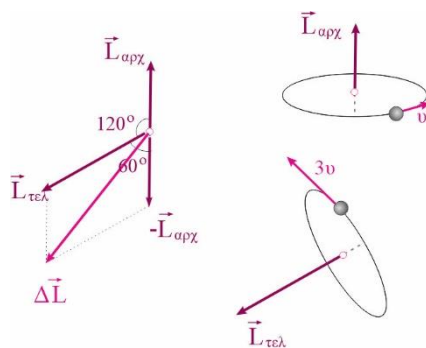
4.B.7 γ.

Το μέτρο της αρχικής στροφορμής είναι $L_{\text{αρχ}}$ ενώ το μέτρο της τελικής στροφορμής είναι

$$L_{\text{τελ}} = mv'r = m\omega' r^2 = 3m\omega r^2 \Rightarrow L_{\text{τελ}} = 3L$$

Η μεταβολή της στροφορμής του σώματος πρέπει να βρεθεί διανυσματικά

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}} + (-\vec{L}_{\text{αρχ}})$$



Το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής, ΔL , είναι

$$\Delta L = \sqrt{L_{\alpha\rho\chi}^2 + L_{\tau\epsilon\lambda}^2 + 2L_{\alpha\rho\chi}L_{\tau\epsilon\lambda}\cos 60^\circ} = \sqrt{L^2 + (3L)^2 + 2L \cdot 3L \cos 60^\circ} \Rightarrow \Delta L = L\sqrt{13}$$

4.B.8 i. β. ii. β.

i. Από την κλίση του διαγράμματος L - t βρίσκουμε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος, ο οποίος για το χρονικό διάστημα 0 έως $2t_1$ (1^η φάση) είναι

$$\kappaλίση = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau_1 = \frac{3L_1 - L_1}{2t_1 - 0} \Rightarrow \kappaλίση = \frac{L_1}{t_1}$$

Άρα, τη χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της στροφορμής, L , είναι

$$\kappaλίση = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{3L_1 - L}{2t_1 - t_1} \Rightarrow \frac{L_1}{t_1} = \frac{3L_1 - L}{t_1} \Rightarrow L = 2L_1$$

Τη χρονική στιγμή $3t_1$ το μέτρο της στροφορμής, L' , είναι ίσο με L_1 , οπότε ο λόγος των δύο στροφορμών είναι

$$\frac{L}{L'} = \frac{2L_1}{L_1} = 2$$

ii. Στη δεύτερη φάση, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος, που ισούται με τη συνολική ροπή που δέχεται το σώμα, είναι επίσης σταθερός, και ίσος με

$$\Sigma \tau_2 = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_1 - 3L_1}{3t_1 - 2t_1} \Rightarrow \Sigma \tau_2 = \frac{-2L_1}{t_1}$$

$$\text{Άρα, ο λόγος των ροπών είναι } \frac{\Sigma \tau_1}{\Sigma \tau_2} = \frac{\frac{L_1}{t_1}}{\frac{-2L_1}{t_1}} = -\frac{1}{2}.$$

4.B.9 α.

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας μέχρι το νήμα να διαγράψει γωνία ϕ με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την κατώτερη θέση της, δίνει την ταχύτητα της σφαίρας.

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$0 + mgd\eta\mu\phi = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gd\eta\mu\phi} \quad (1)$$

Η συνισταμένη των ακτινικών δυνάμεων παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης

$$\Sigma F = F_{\kappa} \Rightarrow T - mg\eta\mu\varphi = \frac{mv^2}{d} \Rightarrow \frac{3mg}{2} - mg\eta\mu\varphi = \frac{m2gd\eta\mu\varphi}{d} \Rightarrow \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

Άρα, η σχέση (1) δίνει $v = \sqrt{2gd\eta\mu 30^\circ} = \sqrt{gd}$

και η στροφορμή της σφαίρας είναι $L = mvd = md\sqrt{gd}$.

4.B.10 β.

Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας σε συνάρτηση της κινητικής της ενέργειας είναι

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} \quad (1)$$

Ο φορέας της ταχύτητας διέρχεται από το σημείο Β και είναι κάθετος στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΒ, οπότε η στροφορμή της σφαίρας είναι

$$L = mv(KB) = m\sqrt{\frac{2K}{m}} \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} \Rightarrow L = \alpha\sqrt{Km}$$

Σημείωση: Τη στιγμή που η σφαίρα συγκρούεται με την πλάκα, η ταχύτητά της είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα ΚΒ. Η κατάσταση αυτή είναι ισοδύναμη με το να διαγράφει η σφαίρα στιγμιαία τμήμα κυκλικής τροχιάς με ακτίνα ΚΒ.

4.B.11 γ.

Εφόσον το μέτρο της στροφορμής της σφαίρας διπλασιάζεται, η ταχύτητα της σφαίρας όταν το νήμα να σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο έχει μέτρο

$$L = 2L_0 \Rightarrow mvd = 2mv_0d \Rightarrow v = 2v_0 = 2\sqrt{\frac{gd}{2}} \quad (1)$$

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας, με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την κατώτερη θέση της, δίνει

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgd\sigma\eta\theta = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow \frac{gd}{2} + 2gd\sigma\eta\theta = 4\frac{gd}{2} \Rightarrow \sigma\eta\theta = \frac{3}{4}$$

4.B.12 β.

Η ροπή της δύναμης ισούται με $\tau = FR$ και ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος. Άρα έχουμε

$$\Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow FR = \frac{3L_0 - L_0}{t - 0} \Rightarrow t = \frac{2L_0}{FR}$$

4.B.13 α.

Για να γίνει η ανακύκλωση πρέπει το νήμα να είναι διαρκώς τεντωμένο, άρα η τάση διαρκώς μεγαλύτερη από το μηδέν. Η οριακή ανακύκλωση γίνεται όταν στην ανώτερη θέση η τάση γίνει στιγμιαία μηδέν. Στην περίπτωση αυτή το βάρος της σφαίρας θα αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη, οπότε από τη συνθήκη της κυκλικής κίνησης για την ταχύτητα $υ$ στην ανώτερη θέση έχουμε

$$\Sigma F = F_k \Rightarrow mg = \frac{mv^2}{d} \Rightarrow v = \sqrt{gd}$$

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας από την κατώτερη μέχρι την ανώτερη θέση με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την κατώτερη θέση της, δίνει την αρχική ταχύτητα της σφαίρας.

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mg2d \Rightarrow v_0^2 = v^2 + 2g2d \Rightarrow v_0^2 = gd + 4gd \Rightarrow v_0 = \sqrt{5gd}$$

Ο λόγος της στροφορμής της σφαίρας στην κατώτερη θέση, προς τη στροφορμή του στην ανώτερη είναι ίσος με

$$\frac{L_0}{L} = \frac{mv_0d}{mvd} = \frac{\sqrt{5gd}}{\sqrt{gd}} = \sqrt{5}$$

4.B.14 β.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος ισούται με τη συνολική ροπή που δέχεται το σώμα. Άρα για την πρώτη φάση έχουμε

$$\Sigma \tau_1 = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \tau_0 = \frac{L_1 - L_0}{t_1 - 0} \Rightarrow \tau_0 = \frac{L_1 - L_0}{\frac{L_0}{\tau_0}} \Rightarrow L_1 = 2L_0$$

Στη δεύτερη φάση, από την ισότητα του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής ενός σώματος με τη συνολική ροπή που δέχεται έχουμε

$$\Sigma \tau_2 = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0 - L_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow -\frac{\tau_0}{2} = \frac{-2L_0}{t_2 - \frac{L_0}{\tau_0}} \Rightarrow t_2 - \frac{L_0}{\tau_0} = \frac{2L_0}{\frac{\tau_0}{2}} \Rightarrow t_2 = \frac{5L_0}{\tau_0}$$

4.B.15 γ.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος ισούται με τη συνολική ροπή που δέχεται το σώμα. Από την κλίση του διαγράμματος προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι σταθερός και ισούται με

$$\Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\frac{3L_0}{4} - L_0}{t_1 - 0} = \frac{-\frac{L_0}{4}}{t_1} \Rightarrow \Sigma \tau = -\frac{L_0}{4t_1}$$

οπότε η στροφορμή L του σώματος τη χρονική στιγμή $3t_1$ έχει μέτρο ίσο με

$$L = L_0 - \frac{L_0}{4t_1} t \xrightarrow{t=3t_1} L = L_0 - \frac{L_0}{4t_1} 3t_1 \Rightarrow L = \frac{L_0}{4}$$

ή εναλλακτικά

$$\Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow -\frac{L_0}{4t_1} = \frac{L - L_0}{3t_1 - 0} \Rightarrow 4L - 4L_0 = -3L_0 \Rightarrow L = \frac{L_0}{4}$$

4.B.16 β.

Αφού η κεντρομόλος δύναμη που δέχεται η μάζα m_2 τετραπλασιάζεται, η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος διπλασιάζεται, καθώς

$$F_{\kappa,2} = 4F_{\kappa,0} \Rightarrow \omega^2 r = 4\omega_0^2 r \Rightarrow \omega = 2\omega_0$$

Οι δύο μάζες έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω , καθώς κινούνται μαζί ενσωματωμένες στη ράβδο. Οι δύο στροφορμές είναι ομόρροπες, οπότε η στροφορμή του συστήματος ισούται με το άθροισμα των στροφορμών των δύο μαζών,

$$L = L_1 + L_2 = m_1 v_1 \frac{d}{4} + m_2 v_2 \frac{3d}{4} = 2m\omega \left(\frac{d}{4} \right)^2 + m\omega \left(\frac{3d}{4} \right)^2 = m\omega \frac{d^2}{8} + m\omega \frac{9d^2}{16} = \frac{11m2\omega_0 d^2}{16} \Rightarrow$$

$$L = \frac{11m\omega_0 d^2}{8}$$

4.B.17 γ.

Η συνισταμένη των ακτινικών δυνάμεων παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης, άρα η ταχύτητα της σφαίρας μετά την κρούση είναι

$$\Sigma F = F_{\kappa} \Rightarrow T - w_2 = \frac{m_2 v_2'^2}{\ell} \Rightarrow 2m_2 g - m_2 g = \frac{m_2 v_2'^2}{\ell} \Rightarrow v_2' = \sqrt{g\ell}$$

Για την ελαστική κρούση με ακίνητη τη δεύτερη σφαίρα ισχύει

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 \Rightarrow \sqrt{g\ell} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} 2\sqrt{g\ell} \Rightarrow m_2 = 3m_1$$

Άρα, για το μέτρο της στροφορμής της σφαίρας Σ_2 αμέσως μετά την κρούση ισχύει

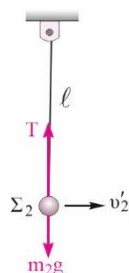
$$L_2 = m_2 v_2' \ell = 3m_1 \ell \sqrt{g\ell}$$

4.B.18 α.

Για την ελαστική κρούση με ακίνητη τη δεύτερη σφαίρα ισχύει

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{-2m_1}{4m_1} v_1 \Rightarrow v_1' = -\frac{v_1}{2}$$

Η αρχική στροφορμή της σφαίρας μάζας m_1 έχει μέτρο πριν την κρούση ίσο με $L_{\text{αρχ}} = m_1 v_1 d$



και η τελική, μετά την κρούση έχει μέτρο $L_{\text{τελ}} = m_1 v_1' d = -m_1 \frac{v_1}{2} d$.

Άρα, η μεταβολή της έχει μέτρο

$$|\Delta L| = |L_{\text{τελ}} - L_{\text{αρχ}}| = \left| -m_1 \frac{v_1}{2} d - m_1 v_1 d \right| = 1,5 m_1 v_1 d$$

4.B.19 γ.

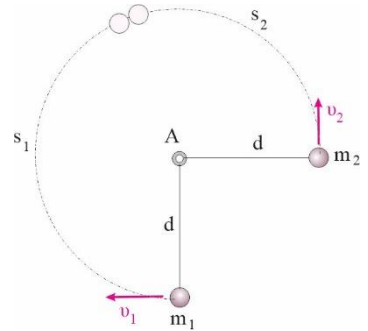
Εφόσον τα δύο σφαιρίδια αποκτούν στροφορμές ίσου μέτρου, η σχέση των μέτρων των γραμμικών ταχυτήτων τους είναι

$$L_1 = L_2 \Rightarrow m_1 v_1 d = m_2 v_2 d \Rightarrow v_1 = 2v_2$$

Τα δύο σφαιρίδια για να συγκρουστούν πρέπει να καλύψουν συνολικά τόσο ίσο με τα $3/4$ της περιφέρειας, άρα

$$s_1 + s_2 = \frac{3}{4} 2\pi d \Rightarrow v_1 t + v_2 t = \frac{3}{2} \pi d \Rightarrow 2v_2 t + v_2 t = \frac{3}{2} \pi d \Rightarrow$$

$$t = \frac{1}{2} \frac{\pi d}{v_2} = \frac{1}{2} \frac{\pi d}{\omega_2 d} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2\omega_2}$$



4.B.20 β.

Οι δύο χάντρες έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω , καθώς κινούνται μαζί ενσωματωμένες στη ράβδο. Οι δύο στροφορμές είναι ομόρροπες, οπότε η στροφορμή του συστήματος έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των στροφορμών των δύο μαζών. Άρα

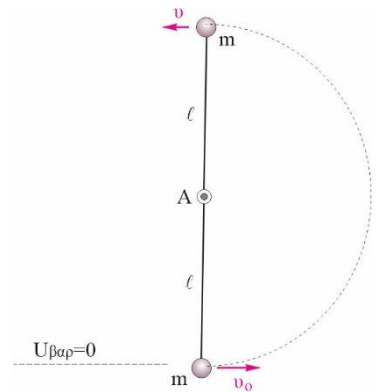
$$L = L_1 + L_2 = m_1 v_1 \frac{d}{2} + m_2 v_2 d = 2m\omega \left(\frac{d}{2} \right)^2 + m\omega d^2 \Rightarrow L = \frac{3m\omega d^2}{2}$$

4.B.21 γ.

Η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος της σφαίρας, καθώς η τάση του νήματος είναι διαρκώς κάθετη στη μετατόπιση, οπότε ισχύει η ΑΔΜΕ. Η εφαρμογή της ΑΔΜΕ δίνει την ταχύτητα της σφαίρας, όταν το νήμα γίνει κατακόρυφο. Με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την κατώτερη θέση της σφαίρας, έχουμε

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mg2d \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m 7gd = \frac{1}{2} m v^2 + 2mgd \Rightarrow v = \sqrt{3gd}$$



Άρα, για την στροφορμή της σφαίρας ισχύει $L = mvd = md\sqrt{3gd}$.

4.B.22 α.

Από τη στροφορμή του σώματος βρίσκουμε τη γωνιακή του ταχύτητα

$$L = mvd = m\omega d^2 \Rightarrow \sqrt{4Fmd^3} = m\omega d^2 \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{4Fmd^3}}{md^2} \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{F}{md}}$$

Η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα ισούται με το διανυσματικό άθροισμα της κεντρομόλου δύναμης και της δύναμης F . Η κεντρομόλος δύναμη έχει μέτρο

$$F_k = m\frac{v^2}{d} = m\omega^2 d = m4\frac{F}{md}d \Rightarrow F_k = 4F$$

Οι δύο δυνάμεις είναι κάθετες, άρα η συνολική δύναμη έχει μέτρο

$$\Sigma F = \sqrt{F_k^2 + F^2} = \sqrt{(4F)^2 + F^2} \Rightarrow \Sigma F = F\sqrt{17}$$

Αρχή διατήρησης της στροφορμής

4.B.23 γ.

Η δύναμη βαρύτητας που ασκείται στη Γη δεν προκαλεί ροπή γιατί διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, άρα

$$dL=0 \text{ ή } L=\text{σταθ} \text{ ή } L_{\text{περίγλιο}} = L_{\text{αφήγλιο}} \text{ ή}$$

$$m v_{\text{περ}} r_{\text{περ}} = m v_{\text{αφ}} r_{\text{αφ}} \text{ ή } v_{\text{αφ}} = 0,9 v_{\text{περ}}$$

$$K_{\alpha\phi} = \frac{1}{2} m v_{\alpha\phi}^2 = \frac{1}{2} m (0,9 v_{\text{περ}})^2 \Rightarrow K_{\alpha\phi} = 0,81 K_{\text{περ}}$$

4.B.24 α.

Διαιρούμε τη σχέση που μας δίνεται με dt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με τη μάζα m του πλανήτη έχουμε

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} r m v \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

Επειδή η στροφορμή του πλανήτη παραμένει σταθερή, συμπεραίνουμε ότι και ο ρυθμός διαγραφής

των εμβαδών $\frac{dA}{dt}$ παραμένει σταθερός.

4.B.25 γ.

Η F μεταφέρεται μέσω του νήματος στο σφαιρίδιο και παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

$$F_1 = m \frac{v_1^2}{R_1}, \quad (1)$$

Η F είναι κάθετη στην ταχύτητα περιστροφής και δεν προκαλεί ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής, επομένως η στροφορμή του σφαιριδίου ως προς τον άξονα διατηρείται

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m v_1 R_1 = m v_2 R_2 \Rightarrow v_1 R_1 = v_2 \frac{R_1}{2} \Rightarrow v_2 = 2 v_1$$

$$F_2 = m \frac{v_2^2}{R_2} = m \frac{(2v_1)^2}{\frac{R_1}{2}} \Rightarrow F_2 = 8 F_1$$

4.B.26 β.

Οι ασκούμενες δυνάμεις είναι εσωτερικές για το σύστημα και δεν προκαλούν ροπή, άρα

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow dL = 0$$

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m v_1 \frac{d}{2} + m v_1 \frac{d}{2} = m v_2 \frac{d}{4} + m v_2 \frac{d}{4} \Rightarrow v_2 = 2 v_1$$

4.B.27 α.

Κατά την κίνησή της η Γη δέχεται από τον ήλιο δύναμη που διέρχεται από το κέντρο του Ήλιου. Κατά συνέπεια η ροπή αυτής της δύναμης, ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο του Ήλιου είναι μηδενική και η στροφορμή της Γης ως προς τον Ήλιο θα μένει σταθερή. Η ΑΔΣ δίνει τη σχέση των δύο αποστάσεων

$$L_A = L_{\Pi} \Rightarrow m v_A r_A = m v_{\Pi} r_{\Pi} \Rightarrow m \omega_A r_A^2 = m \omega_{\Pi} r_{\Pi}^2 \Rightarrow \omega_A r_A^2 = \frac{100}{81} \omega_{\Pi} r_{\Pi}^2 \Rightarrow r_{\Pi} = \frac{9}{10} r_A$$

4.B.28 β.

Κατά την κίνησή του ο δορυφόρος δέχεται από τη Γη δύναμη που διέρχεται από το κέντρο της Γης. Κατά συνέπεια η ροπή αυτής της δύναμης ως προς το κέντρο της Γης είναι μηδενική και η στροφορμή του δορυφόρου, ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο της Γης, θα μένει σταθερή. Η ΑΔΣ δίνει

$$L_A = L_B \Rightarrow m v_A r_A = m v_B r_B \Rightarrow v_A r_A = v_B 2 r_A \Rightarrow v_A = 2 v_B$$

Άρα για τις κινητικές ενέργειες στις δύο θέσεις ισχύει

$$K_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m (2 v_B)^2 = 4 \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow K_A = 4 K_B$$

4.B.29 i. γ. ii. γ.

i. Οι δύο μάζες πριν το κόψιμο του νήματος έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω_1 , καθώς κινούνται μαζί ενσωματωμένες στη ράβδο. Το ίδιο και μετά, έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω_2 . Κατά την κίνηση των δακτυλίων δεν προκαλείται ροπή, καθώς η δύναμη του βάρους και η δύναμη στήριξης είναι παράλληλες στον άξονα περιστροφής, άρα η στροφορμή του συστήματος μένει σταθερή. Η ΑΔΣ δίνει

$$\begin{aligned} L_{\alpha\rho\chi} &= L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_1 \frac{d}{4} + m_2 v_2 \frac{d}{4} = m_1 v_1' \frac{d}{2} + m_2 v_2' \frac{d}{2} \Rightarrow \\ m\omega_1 \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 2m\omega_1 \left(\frac{d}{4}\right)^2 &= m\omega_2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2m\omega_2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ 3m\omega_1 \frac{d^2}{16} &= 3m\omega_2 \frac{d^2}{4} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 / 4 \end{aligned}$$

ii. Για τις κινητικές ενέργειες του συστήματος πριν και μετά το κόψιμο των νημάτων ισχύει

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} 2m v_2^2 = \frac{1}{2} m \omega_1^2 \left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} 2m \omega_1^2 \left(\frac{d}{4}\right)^2 \Rightarrow K_1 = \frac{3}{2} m \omega_1^2 \frac{d^2}{16} = \frac{3}{32} m \omega_1^2 d^2 \\ K_2 &= \frac{1}{2} m v_1'^2 + \frac{1}{2} 2m v_2'^2 = \frac{1}{2} m \omega_2^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} 2m \omega_2^2 \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow K_2 = \frac{3}{2} m \omega_2^2 \frac{d^2}{4} = \frac{3}{8} m \omega_2^2 d^2 \end{aligned}$$

και η σχέση τους είναι

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{3}{32} m \omega_1^2 d^2}{\frac{3}{8} m \omega_2^2 d^2} = \frac{1}{4} \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{1}{4} \frac{(4\omega_2)^2}{\omega_2^2} = 4 \Rightarrow K_1 = 4K_2$$

4.B.30 β.

Οι δύο μάζες μετά την κρούση έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω , καθώς κινούνται μαζί ενσωματωμένες στη ράβδο. Κατά την κρούση οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα δεν προκαλούν ροπή, οπότε η στροφορμή του συστήματος μένει σταθερή. Η ΑΔΣ δίνει

$$\begin{aligned} L_{\alpha\rho\chi} &= L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_2 v \frac{d}{4} = m_1 v_1 \frac{d}{2} + m_2 v_2 \frac{d}{4} \Rightarrow v \frac{d}{4} = \omega \frac{d}{2} \frac{d}{2} + \omega \frac{d}{4} \frac{d}{4} \Rightarrow \\ v &= \omega d + \omega \frac{d}{4} \Rightarrow v = 5\omega \frac{d}{4} \Rightarrow \omega = \frac{4v}{5d} \end{aligned}$$

4.B.31 γ.

Οι τρεις μάζες μετά την κρούση έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω , καθώς κινούνται μαζί ενσωματωμένες στη ράβδο. Κατά τις κρούσεις οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα δεν προκαλούν ροπή, οπότε η στροφορμή του συστήματος μένει σταθερή. Η ΑΔΣ δίνει

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_2 v_2 \frac{d}{2} - m_3 v_3 \frac{d}{4} = m_1 v_1' \frac{d}{2} + m_2 v_2' \frac{d}{2} + m_3 v_3' \frac{d}{4} \Rightarrow$$

$$v_2 \frac{d}{2} - v_2 \frac{d}{4} = \omega \frac{d}{2} \frac{d}{2} + \omega \frac{d}{2} \frac{d}{2} + \omega \frac{d}{4} \frac{d}{4} \Rightarrow v_2 = 2\omega d + \omega \frac{d}{4} \Rightarrow v_2 = 9\omega \frac{d}{4} \Rightarrow \omega = \frac{4v_2}{9d}$$

4.B.32 α.

Οι δύο μάζες μετά την κρούση έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω , καθώς κινούνται μαζί ενσωματωμένες στη ράβδο. Κατά την κρούση οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα δεν προκαλούν ροπή, οπότε η στροφορμή του συστήματος μένει σταθερή

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_1 d = m_1 v_1' d + m_2 v_2' \frac{d}{2} \Rightarrow m_1 \omega_0 d^2 = m_1 \omega d^2 + 2m_1 \omega \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\omega_0 = \omega + 2\omega \frac{1}{4} \Rightarrow \omega = \frac{2\omega_0}{3}$$

Το ποσοστό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου κατά την κρούση, είναι ίσο με

$$\pi\% = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} 100\% = \frac{\frac{2\omega_0}{3} - \omega_0}{\omega_0} 100\% \Rightarrow \pi\% = -\frac{100}{3}\%$$

4.B.33 γ.

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας από την ανώτερη μέχρι την κατώτερη θέση δίνει την ταχύτητα της σφαίρας πριν την κρούση. Με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την κατώτερη θέση της, έχουμε

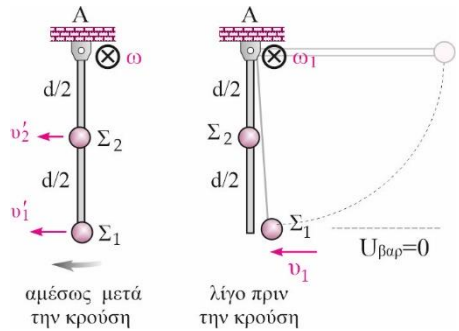
$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$0 + mgd = \frac{1}{2} m v_1^2 + 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gd}$$

Οι δύο μάζες μετά την κρούση έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω , καθώς κινούνται μαζί ενσωματωμένες στη ράβδο. Κατά την κρούση οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα δεν προκαλούν ροπή, οπότε η στροφορμή του συστήματος μένει σταθερή

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_1 d = m_1 v_1' d + m_2 v_2' \frac{d}{2} \Rightarrow m_1 \sqrt{2gd} d = m_1 \omega d^2 + 4m_1 \omega \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2gd} = \omega d + 4\omega \frac{d}{4} \Rightarrow \sqrt{2gd} = 2\omega d \Rightarrow \omega = \frac{\sqrt{2gd}}{2d} = \sqrt{\frac{g}{2d}}$$

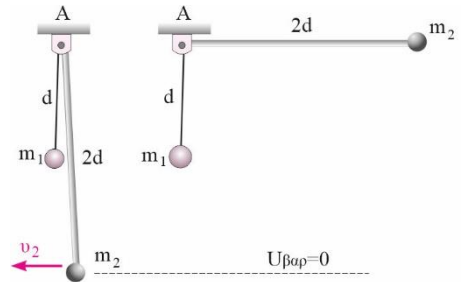


4.B.34 α.

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της ράβδου με το σφαιρίδιο μάζας m_2 δίνει την ταχύτητά του τη στιγμή της κρούσης. Με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την κατώτερη θέση του σφαιριδίου, έχουμε

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$$

$$0 + mg2d = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0 \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{gd}$$



Κατά την κρούση οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα δεν προκαλούν ροπή, οπότε η στροφορμή του συστήματος μένει σταθερή

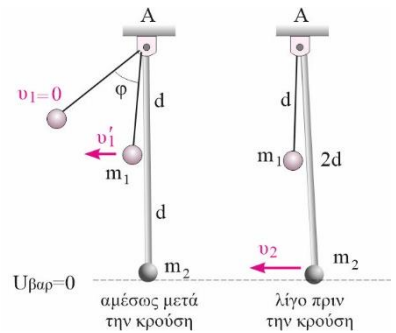
$$L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow m_2 v_2 2d = m_1 v_1' d \Rightarrow m_2 2\sqrt{gd} 2d = 4m_2 v_1' d \Rightarrow$$

$$v_1' = \sqrt{gd}$$

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση του σφαιριδίου μάζας m_1 δίνει το συνημίτονο της γωνίας ϕ που θα ανέλθει μέχρι να σταματήσει στιγμιαία. Με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την κατώτερη θέση του σφαιριδίου, έχουμε

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + 0 = 0 + m_1 g d (1 - \cos\phi) \Rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{gd})^2 = gd(1 - \cos\phi) \Rightarrow \cos\phi = 1/2$$


4.B.35 γ.

Στο σφαιρίδιο ασκούνται τρεις δυνάμεις, το βάρος του, η κάθετη δύναμη στήριξης και η τάση του νήματος. Η δύναμη που ασκείται από το νήμα δεν προκαλεί ροπή, γιατί ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, το βάρος και η δύναμη στήριξης δεν προκαλούν ροπή γιατί ο φορέας τους είναι παράλληλος στον άξονα περιστροφής, οπότε η στροφορμή του σφαιριδίου μένει σταθερή. Η αρχή διατήρησης της στροφορμής δίνει

$$L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow m v_1 r_1 = m v_2 r_2 \Rightarrow v_1 r_1 = v_2 \frac{r_1}{2} \Rightarrow v_2 = 2v_1$$

Το έργο της δύναμης F βρίσκεται από το ΘΜΚΕ

$$W_F = K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m4v_1^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow$$

$$W_F = \frac{3}{2}mv_1^2 = \frac{3}{2}m\omega_1^2 r_1^2 \Rightarrow W_F = 1,5m\omega_1^2 r_1^2$$