

Θέματα Δ

4.Δ.1

α. Σε κάθε δακτύλιο ασκείται μία δύναμη από το νήμα που παίζει κάθε στιγμή τον ρόλο κεντρομόλου δύναμης, επομένως η γραμμική ταχύτητα περιστροφής του κάθε δακτυλίου τη στιγμή που κόβεται το νήμα είναι

$$T_{\theta\rho} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{T_{\theta\rho} r}{m}} = 4 \text{ m/s} \text{ και η γωνιακή ταχύτητα του δακτυλίου}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = 16 \text{ rad/s}$$

β. Η στροφορμή κάθε δακτυλίου τη στιγμή που κόβεται το νήμα είναι

$$L = mvr = 0,2 \text{ Kg m}^2/\text{s}$$

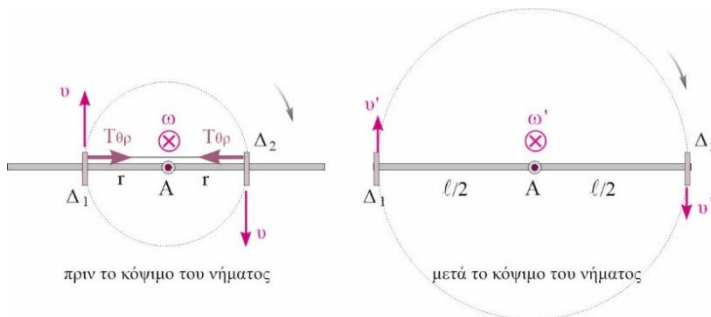
Οι δύο στροφορμές είναι ομόρροπες, οπότε

$$L_{\text{ολ}} = 2L = 0,4 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Άρα, η συνολική ροπή που δέχεται το σύστημα είναι

$$\Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_{\text{ολ}} - 0}{\Delta t} = 0,1 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

γ. Το σύστημα είναι μονωμένο, οπότε από την αρχή διατήρησης της στροφορμής έχουμε



$$\bar{L}_{\text{αρχ}} = \bar{L}_{\text{τελ}} \Rightarrow 2m\omega r^2 = 2m\omega' \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow \omega' = \omega \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 = 4 \text{ rad/s}$$

Επομένως η νέα συχνότητα περιστροφής είναι

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}$$

δ. Από τον αριθμό των περιστροφών βρίσκουμε το χρονικό διάστημα

$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{\omega' \Delta t}{2\pi} \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi N}{\omega'} \Rightarrow \Delta t = 5\pi \text{ s}$$

4.Δ.2

α. Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας από την αρχική (I) μέχρι την ανώτερη θέση (II) και με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την αρχική της θέση, δίνει την ταχύτητα της σφαίρας στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς της

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgd \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gd} \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$$

Άρα, η στροφορμή της σφαίρας έχει μέτρο

$$L = mvd = 0,2 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

και φορά από τα μάτια του αναγνώστη προς τη σελίδα.

β. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ισούται με τη συνολική ροπή που δέχεται η σφαίρα, η οποία δέχεται δύο δυνάμεις: την τάση του νήματος που δεν έχει ροπή, γιατί ο άξονάς της διέρχεται από τον άξονα περιστροφής A και το βάρος της, που τη στιγμή που το νήμα έχει διαγράψει γωνία 120° , έχει ροπή με μέτρο

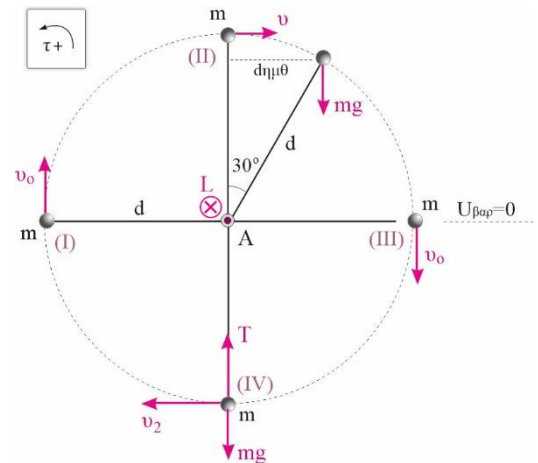
$$\left| \frac{dL}{dt} \right| = |\Sigma \tau| = |\tau_w| = wd \sin 30^\circ = mgd \sin 30^\circ \Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right| = 0,25 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$$

γ. Στην αρχή η ροπή έχει μέτρο $|\tau_{w,1}| = wd = mgd = 0,5 \text{ Nm}$

και φορά προς τα έξω, που τη θεωρούμε θετική, άρα $\tau_{w,1} = 0,5 \text{ Nm}$.

Όταν το νήμα στραφεί κατά 180° στη θέση (III), το μέτρο της ροπής που δέχεται η σφαίρα είναι επίσης $|\tau_{w,2}| = wd = mgd = 0,5 \text{ Nm}$ με φορά προς τα μέσα, άρα αρνητική και $\tau_{w,2} = -0,5 \text{ Nm}$.

Το μέτρο της μεταβολής της ροπής είναι $|\Delta \tau| = |\tau_{w,2} - \tau_{w,1}| = |-0,5 \text{ Nm} - 0,5 \text{ Nm}| \Rightarrow |\Delta \tau| = 1 \text{ Nm}$



Λύσεις κεφαλαίου 4

δ. Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της σφαίρας από την αρχική θέση (I) μέχρι την κατώτερη θέση (IV) και με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την αρχική της θέση, δίνει την ταχύτητα της σφαίρας στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς της

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgd \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2gd} \Rightarrow v_2 = \sqrt{56} \text{ m/s}$$

Όταν η σφαίρα διέρχεται από την κατώτερη θέση η συνισταμένη των ακτινικών δυνάμεων παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης, άρα η τάση του νήματος είναι

$$\Sigma F = F_k \Rightarrow T - w = \frac{mv_2^2}{d} \Rightarrow T = mg + \frac{mv_2^2}{d} \Rightarrow T = 3,3 \text{ N}$$

4.Δ.3

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα δεν προκαλούν ροπές, οπότε το σύστημα είναι μονωμένο και η αρχή διατήρησης της στροφορμής δίνει

$$\Delta\Delta\Sigma: \vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m \cdot v_o \cdot R = m \cdot v' \cdot r \Rightarrow \omega_o R^2 = \omega' r^2 \Rightarrow \omega' = \omega_o \left(\frac{R}{r} \right)^2 \Rightarrow \omega' = 16 \text{ rad/s}$$

β. Το έργο που δαπανήσαμε βρίσκεται με εφαρμογή του Θ.Μ.Κ.Ε.

$$W = K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow W = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 \Rightarrow W = 15,26 \text{ J}$$

γ. Η μέση ισχύς που δαπανήσαμε είναι

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{15,26}{1,526} \text{ J/s} \Rightarrow \bar{P} = 10 \text{ J/s}$$

δ. Η τάση του νήματος παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης

$$T_{\theta\rho} = \frac{m \cdot v''^2}{r} \Rightarrow T_{\theta\rho} = m \cdot \omega''^2 r'' \Rightarrow \omega''^2 r'' = 315,5 \text{ m/s}^2 \quad (1)$$

Η αρχή διατήρησης της στροφορμής δίνει

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m \cdot v_o \cdot R = m \cdot v'' \cdot r'' \Rightarrow \omega_o R^2 = \omega'' r''^2 \Rightarrow \omega'' = \frac{6,28}{r''^2} \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) προκύπτει

$$\frac{6,28^2}{r''^4} \cdot r'' = 315,5 \Rightarrow r''^3 = \frac{6,28^2}{315,5} \text{ m}^3 \Rightarrow r''^3 = \frac{1}{8} \text{ m}^3 \Rightarrow r'' = 0,5 \text{ m}$$

4.Δ.4

α. Κατά την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα

$$\bar{L}_{\text{αρχ}} = \bar{L}_{\text{τελ}} \Rightarrow L_3 = -\frac{L_3}{11} + m_2 v_2 \frac{\ell}{3} + m_1 v_1 \frac{2\ell}{3} \quad (1)$$

Τα σώματα Σ_1 , Σ_2 έχουν κοινή γωνιακή ταχύτητα, οπότε οι γραμμικές τους ταχύτητες συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega \frac{\ell}{3}}{\omega \frac{2\ell}{3}} \Rightarrow v_1 = 2v_2$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε

$$\frac{12}{11} L_3 = m_2 v_2 \frac{\ell}{3} + m_1 2v_2 \frac{2\ell}{3} \Rightarrow v_2 = \frac{12L_3}{11} \cdot \frac{1}{m_2 \frac{\ell}{3} + m_1 2 \frac{2\ell}{3}} = \frac{12}{11} \cdot \frac{4,95 \cdot 10^{-2}}{18 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow v_2 = 3 \text{ m/s και}$$

$$v_1 = 6 \text{ m/s}$$

β. Για να παραμένει η στροφορμή του συστήματος ράβδος- Σ_1 - Σ_2 ως προς το σημείο Z σταθερή στη διάρκεια περιστροφής του, θα πρέπει η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα να είναι ίση με μηδέν.

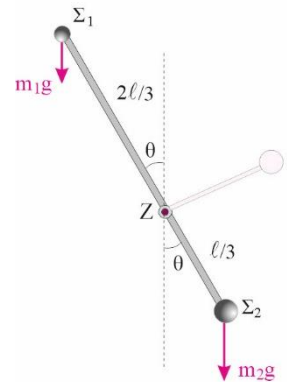
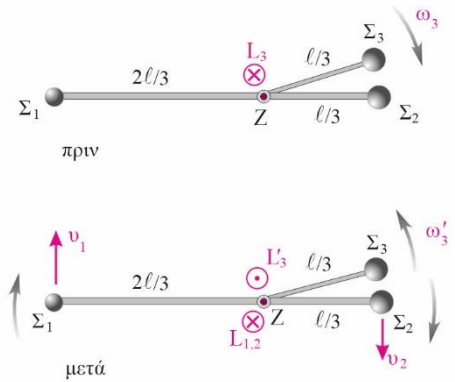
Βρίσκουμε τη συνισταμένη των ροπών ως προς το σημείο Z σε μία τυχαία θέση του συστήματος

$$\Sigma \tau_Z = m_1 g x_1 - m_2 g x_2 \quad (2)$$

$$\eta \mu \theta = \frac{x_1}{\frac{2\ell}{3}} \Rightarrow x_1 = \eta \mu \theta \frac{2\ell}{3} \quad (3)$$

$$\eta \mu \theta = \frac{x_2}{\frac{\ell}{3}} \Rightarrow x_2 = \eta \mu \theta \frac{\ell}{3} \quad (4)$$

Από (2), (3), (4) έχουμε



$$\Sigma \tau_z = m_1 g \mu \theta \frac{2\ell}{3} - m_2 g \mu \theta \frac{\ell}{3} \Rightarrow \Sigma \tau_z = 0 \text{ Nm}$$

γ. Η ράβδος μετά την κρούση κάνει ομαλή στροφική κίνηση και όταν βρεθεί στην κατακόρυφη θέση για πρώτη φορά θα έχει διαγράψει γωνία $\pi/2$ rad

$$\Delta \varphi = \omega \Delta t = \frac{v_2}{\ell/3} \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta \varphi \ell}{3 v_2} = 0,05 \text{ s}$$

δ. Η Σ_2 μετά την κρούση κάνει ομαλή κυκλική κίνηση, άρα στην κατώτερη θέση της τροχιάς της θα δέχεται κεντρομόλο δύναμη

$$\Sigma F = F_{\kappa} \Rightarrow T - m_2 g = \frac{m_2 v_2^2}{\frac{\ell}{3}} \Rightarrow T = m_2 \left(g + \frac{3 v_2^2}{\ell} \right) \Rightarrow T = 0,8 \text{ N}$$

Άρα η δύναμη που δέχεται η Σ_2 από τη ράβδο στην κατώτερη θέση της τροχιάς της έχει μέτρο 0,8N και φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.

Την ίδια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της Σ_2 είναι

$\left(\frac{dL}{dt} \right)_{\Sigma_2} = \Sigma \tau_{\Sigma_2} = 0 \text{ Nm}$, καθώς οι δύο δυνάμεις που της ασκούνται διέρχονται από τον άξονα περιστροφής της, όπως είναι μηδέν και κάθε άλλη στιγμή, καθώς κινείται ομαλά κυκλικά και έχει σταθερή στροφορμή.

4.Δ.5

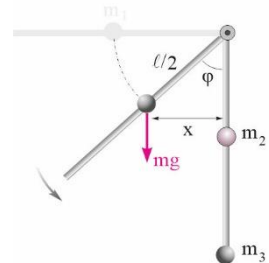
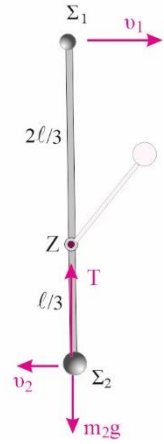
α. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σημειακής μάζας Σ_1 είναι

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau = mg \mu \varphi \frac{\ell}{2} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 54 \cdot 10^{-3} \text{ Kg m}^2 / \text{s}^2$$

β. Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ για να βρούμε την ταχύτητα της Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow mg \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{g \ell} = 3 \text{ m/s}$$

Τα σημειακά σώματα Σ_2, Σ_3 της ράβδου 2 αποκτούν κοινή γωνιακή ταχύτητα, οπότε οι γραμμικές τους ταχύτητες μετά την κρούση συνδέονται με τη σχέση



$$\frac{v_2'}{v_3'} = \frac{\omega \frac{\ell}{2}}{\omega \ell} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_3' = 2v_2' \quad (1)$$

Κατά την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα των τριών σωμάτων

$$\bar{L}_{αρχ} = \bar{L}_{τελ} \Rightarrow mv_1 \frac{\ell}{2} = -mv_1' \frac{\ell}{2} + mv_2' \frac{\ell}{2} + mv_3' \ell \Rightarrow$$

$$v_1 = -v_1' + 5v_2' \quad (2)$$

Η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας για την κρούση με τη βοήθεια της (1) δίνει

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 + \frac{1}{2}mv_3'^2 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + 5v_2'^2 \quad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα των (2), (3) και έχουμε

$$v_1'^2 + v_1' - 6 = 0$$

$$\Delta = 25$$

$$v_1' = \frac{-1 \pm 5}{2} \text{ m/s} \Rightarrow v_1' = 2 \text{ m/s}, v_1' = -3 \text{ m/s} \text{ (απορ.)}$$

Επομένως οι γραμμικές ταχύτητες αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$v_1' = 2 \text{ m/s}, v_2' = 1 \text{ m/s}, v_3' = 2 \text{ m/s}$$

γ. Το Σ₁ μετά την κρούση αντιστρέφει τη φορά της κίνησής του, επομένως το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του κατά την κρούση είναι

$$|\Delta L_1| = \left| -mv_1' \frac{\ell}{2} - mv_1 \frac{\ell}{2} \right| \Rightarrow |\Delta L_1| = |-45 \cdot 10^{-3}| \text{ Kg m}^2 / \text{s} \Rightarrow$$

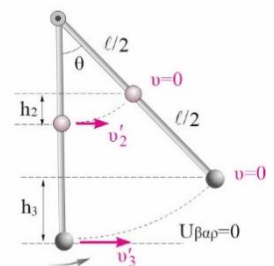
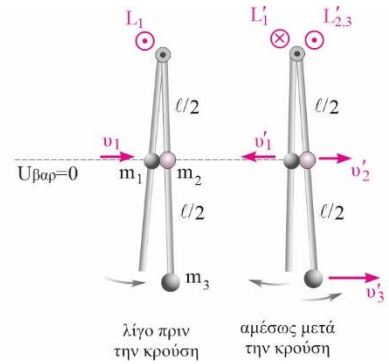
$$|\Delta L_1| = 45 \cdot 10^{-3} \text{ Kg m}^2 / \text{s}$$

δ. Η μέγιστη κατακόρυφη ανύψωση του Σ₃ μετά την κρούση είναι

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\ell - h_3}{\ell} \Rightarrow h_3 = \ell - \ell \sigma\upsilon\nu\theta$$

Η μέγιστη κατακόρυφη ανύψωση του Σ₂ μετά την κρούση είναι

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\ell/2 - h_2}{\ell/2} \Rightarrow h_2 = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\theta$$



Λύσεις κεφαλαίου 4

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των δύο σημειακών σωμάτων μεταξύ των δύο θέσεων και με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από την αρχική θέση του Σ_3 έχουμε

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow mg\frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}mv_2'^2 + \frac{1}{2}mv_3'^2 = mg\ell(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) + mg\left[\frac{\ell}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\theta) + \frac{\ell}{2}\right] \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{22}{27}$$

Άρα τα μέγιστα ύψη μετά την κρούση για τις δύο σημειακές μάζες είναι:

$$h_3 = \ell - \ell\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{6}\ell$$

$$h_2 = \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{12}\ell$$

4.Δ.6

α. Η σημειακή μάζα m δέχεται από τη ράβδο μία οριζόντια δύναμη που παίζει τον ρόλο κεντρομόλου δύναμης, άρα

$$T = F_{\kappa} = \frac{mv_o^2}{\ell} = \frac{m\omega^2\ell^2}{\ell} = 0,1\text{kg} \frac{(3\text{m/s})^2}{0,3\text{m}} \Rightarrow T = 3\text{N}$$

β. Για την κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα

$$\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}} \Rightarrow mv_o\ell = mv_1\ell + 2mv_2\ell \Rightarrow v_o = v_1 + 2v_2 \quad (1)$$

Η κρούση είναι ελαστική και η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας δίνει

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}2mv_2^2 \Rightarrow v_o^2 = v_1^2 + 2v_2^2 \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2)

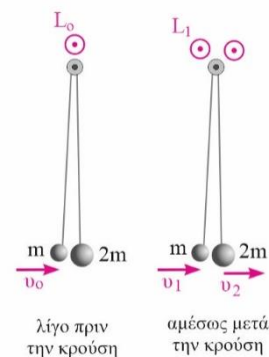
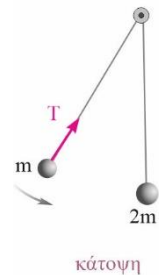
$$v_1^2 - 2v_1 - 3 = 0, \Delta = 16$$

$v_1 = -1\text{m/s}, v_1 = 3\text{m/s}$ (απορρίπτεται γιατί είναι ίση με την αρχική του Σ_1)

Από τη σχέση (1) με αντικατάσταση προκύπτει

$$v_2 = 2\text{m/s}$$

Το πηλίκο των μέτρων των στροφορμών μετά την κρούση είναι



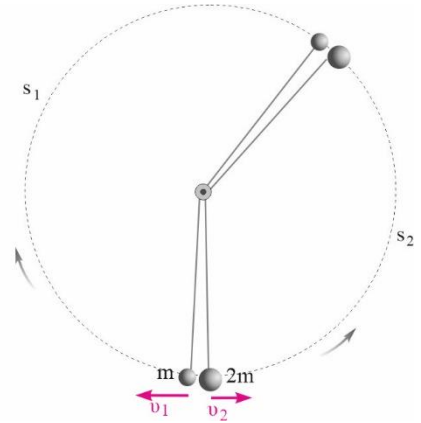
$$\frac{|L_1|}{|L_2|} = \frac{m|v_1|\ell}{2mv_2\ell} = \frac{1}{4}$$

γ. Όταν τα δύο σώματα ξανασυναντηθούν, τότε το άθροισμα των τόξων που θα έχουν διαγράψει θα είναι ίσο με την περιφέρεια του κύκλου

$$s_1 + s_2 = 2\pi\ell \Rightarrow |v_1|t + v_2t = 2\pi\ell \Rightarrow$$

$$t = \frac{2\pi\ell}{|v_1| + v_2} = \frac{2\pi \cdot 0,3\text{m}}{3\text{m/s}} \Rightarrow t = 0,2\pi\text{s}$$

δ. Οι γωνιακές ταχύτητες των σημειακών μαζών μετά την κρούση είναι αντίθετες, οπότε τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σημειακών σωμάτων είναι ίσα δηλαδή $v_1 = v_2$.



Η αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα κατά την κρούση δίνει

$$\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1 v_o \ell = -m_1 v_1 \ell + m_2 v_2 \ell \Rightarrow v_1 = \frac{m_1}{m_2 - m_1} v_o \quad (3)$$

Η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας για την κρούση δίνει

$$\frac{1}{2} m_1 v_o^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow m_1 v_o^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \quad (4)$$

Λύνοντας το σύστημα των (3) και (4) προκύπτει

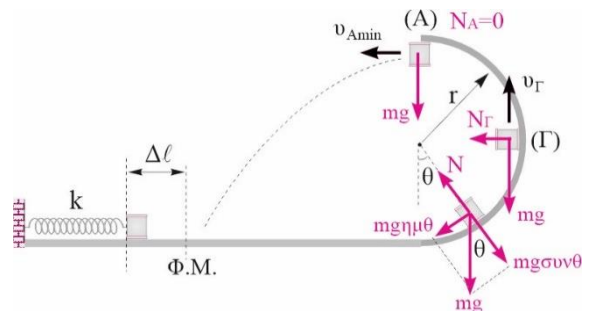
$$m_2 = 3m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

4.Δ.7

α. Από τη συνθήκη της κυκλικής κίνησης βρίσκουμε την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα για να μη χάνει την επαφή του με την τροχιά στο σημείο Α

$$N + mg = F_k \Rightarrow N + mg = \frac{mv_A^2}{r} \Rightarrow$$

$$N = \frac{mv_A^2}{r} - mg$$



$$N \geq 0 \Rightarrow \frac{mv_A^2}{r} - mg \geq 0 \Rightarrow v_{A,\min} = \sqrt{g \cdot r} \Rightarrow v_{A,\min} = 1 \text{ m/s}$$

Κατά μήκος της ημικυκλικής τροχιάς η ταχύτητα του σώματος μειώνεται, οπότε η ελάχιστη στροφορμή του σώματος είναι στο ψηλότερο σημείο της διαδρομής

$$L_{\min} = mv_{A,\min} r = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Kg m}^2 / \text{s}$$

β. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα ελατήριο - σώμα από τη στιγμή που αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να κινηθεί μέχρι που το σώμα Σ περνάει από το σημείο Α

$$\frac{1}{2} k \Delta \ell^2 = \frac{1}{2} mv_A^2 + mg2r \Rightarrow \Delta \ell = \sqrt{\frac{mv_A^2 + 4mgr}{k}} \Rightarrow \Delta \ell = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-2} \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-1}}{5 \cdot 10^2}} \text{ m} \Rightarrow \Delta \ell = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

γ. Η δύναμη που δέχεται το σώμα από την ημικυκλική τροχιά στο σημείο Γ είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη

$$N_\Gamma = F_k \Rightarrow N_\Gamma = m \frac{v_\Gamma^2}{r} \quad (1)$$

Βρίσκουμε την ταχύτητα στο σημείο Γ από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας

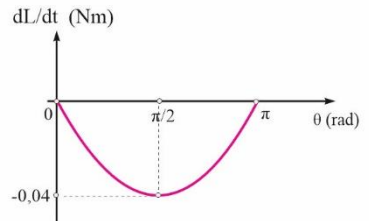
$$\frac{1}{2} k \Delta \ell^2 = \frac{1}{2} mv_\Gamma^2 + mgr \Rightarrow v_\Gamma = \sqrt{\frac{k \Delta \ell^2}{m} - 2gr} \Rightarrow v_\Gamma = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-2}} - 2 \cdot 10 \cdot 10^{-1}} \text{ m/s} \Rightarrow v_\Gamma = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Από (1) έχουμε

$$N_\Gamma = m \frac{v_\Gamma^2}{r} \Rightarrow N_\Gamma = 4 \cdot 10^{-2} \frac{3}{10^{-1}} \text{ N} \Rightarrow N_\Gamma = 1,2 \text{ N}$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος σε μία τυχαία θέση είναι

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -m \cdot g \cdot \eta \mu \theta \cdot r \Rightarrow \\ \frac{dL}{dt} &= -4 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-1} \eta \mu \theta \text{ (SI)} \Rightarrow \\ \frac{dL}{dt} &= -4 \cdot 10^{-2} \eta \mu \theta \text{ (S.I.)}, \quad 0 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi \text{ rad} \end{aligned}$$



Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής είναι η ακόλουθη.

Το βεληνεκές της οριζόντιας βολής που κάνει το σώμα από το σημείο Α είναι

$$x_{\max} = v_A \Delta t \Rightarrow x_{\max} = v_A \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot r}{g}} \Rightarrow x_{\max} = 0,2\text{m}$$

4.Δ.8

α. Οι δύο δακτύλιοι πριν το κόψιμο των νημάτων έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω_0 , καθώς κινούνται μαζί ενσωματωμένες στη ράβδο. Ο λόγος των μέτρων των γραμμικών ταχυτήτων τους, πριν το κόψιμο των νημάτων είναι

$$\frac{v_{\gamma p,1}}{v_{\gamma p,2}} = \frac{\omega_0 \frac{d}{6}}{\omega_0 \frac{d}{3}} = \frac{1}{2}$$

β. Οι τάσεις των νημάτων αποτελούν τις κεντρομόλες δυνάμεις που ασκούνται στους δακτύλιους και τα μέτρα τους ισούνται με

$$T_1 = F_{\kappa,1} = \frac{m_1 v_1^2}{d/6} = \frac{m_1 \omega_0^2 d}{6} \Rightarrow T_1 = 1\text{N}$$

$$T_2 = F_{\kappa,2} = \frac{m_2 v_2^2}{d/3} = \frac{m_2 \omega_0^2 d}{3} \Rightarrow T_2 = 4\text{N}$$

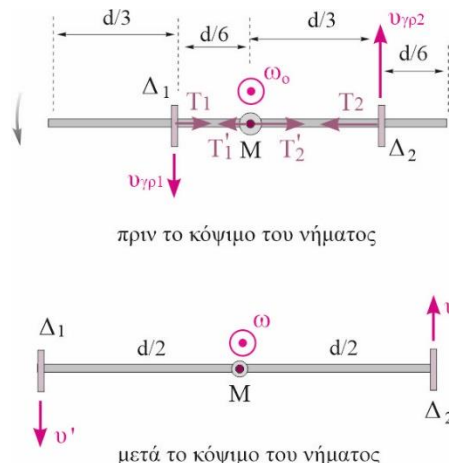
Άρα, η συνολική δύναμη που δέχεται ο άξονας στο σημείο M από τα νήματα, πριν το κόψιμό τους, έχει μέτρο $\Sigma F = T_2' - T_1' = 3\text{N}$

γ. Οι δύο δακτύλιοι μετά το κόψιμο των νημάτων και αφού σταθεροποιηθούν στα άκρα της ράβδου, έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω . Κατά την κίνηση των δακτυλίων δεν προκαλείται ροπή, άρα η στροφορμή του συστήματος μένει σταθερή και η ΑΔΣ δίνει την τελική γωνιακή ταχύτητα του συστήματος

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_1 \frac{d}{6} + m_2 v_2 \frac{d}{3} = m_1 v_1' \frac{d}{2} + m_2 v_2' \frac{d}{2} \Rightarrow$$

$$m\omega_0 \left(\frac{d}{6}\right)^2 + 2m\omega_0 \left(\frac{d}{3}\right)^2 = m\omega \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2m\omega \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$m\omega_0 \frac{9d^2}{36} = 3m\omega \frac{d^2}{4} \Rightarrow \omega = \omega_0 / 3 = \frac{10}{3} \text{ rad/s}$$



Λύσεις κεφαλαίου 4

δ. Για τις κινητικές ενέργειες του συστήματος πριν και μετά το κόψιμο των νημάτων ισχύει:

$$K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}2mv_2^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(\frac{d}{6}\right)^2 + \frac{1}{2}2m\omega_0^2\left(\frac{d}{3}\right)^2 = m\omega_0^2\frac{d^2}{8} \Rightarrow K_{\text{αρχ}} = 0,45\text{J}$$

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}2mv_2'^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}2m\omega^2\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}m\omega^2\frac{d^2}{4} \Rightarrow K_{\text{τελ}} = 0,15\text{J}$$

και η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά τη διάρκεια του φαινομένου είναι

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = -0,3\text{J}$$

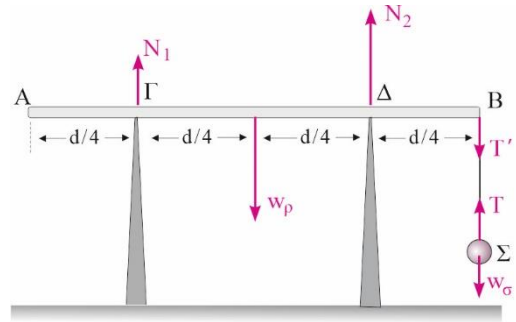
4.Δ.9

α. Από την ισορροπία του σφαιριδίου υπολογίζουμε την τάση του νήματος

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T = w_{\sigma} = mg = 5\text{N}$$

Από τη στροφική ισορροπία της ράβδου, ως προς το σημείο Δ, βρίσκουμε τη δύναμη στήριξης του υποστηρίγματος Γ

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow Mg\frac{d}{4} - N_1\frac{d}{2} - T\frac{d}{4} \Rightarrow N_1 = 7,5\text{N}$$



β. Τη στιγμή που οριακά η ράβδος δεν ανατρέπεται, τείνει να χαθεί η επαφή στο στήριγμα Γ, άρα $N_1 = 0\text{N}$ και η στροφική ισορροπία της ράβδου, ως προς το σημείο Δ, δίνει τη νέα τάση του νήματος

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow Mg\frac{d}{4} = T'\frac{d}{4} \Rightarrow T' = 20\text{N}$$

Η μεταφορική ισορροπία της ράβδου δίνει τη δύναμη στήριξης του υποστηρίγματος Δ

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T' + w_p = N_2 = 40\text{N}$$

γ. Όταν η σφαίρα φτάσει στη χαμηλότερη θέση, η συνισταμένη δύναμη που δέχεται παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Από τη συνθήκη της κυκλικής κίνησης βρίσκουμε την ταχύτητα της σφαίρας στη θέση αυτή

$$\Sigma F = F_{\kappa} \Rightarrow T' - w_{\sigma} = \frac{mv^2}{\ell} \Rightarrow 20 - 5 = \frac{0,5v^2}{1} \Rightarrow v = \sqrt{30} \text{ m/s}$$

Από την ΑΔΜΕ βρίσκουμε την αρχική ταχύτητα της σφαίρας, παίρνοντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, αυτό που διέρχεται από τη χαμηλότερη θέση της σφαίρας

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mg\ell = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{10} \text{ m/s}$$

Η αρχική στροφορμή της σφαίρας έχει μέτρο

$$L_0 = mv_0\ell = 0,5\sqrt{10}\text{kgm}^2/\text{s}$$

δ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας είναι

$$\left| \frac{dL}{dt} \right| = |\Sigma \tau| = mg\ell \sin 60^\circ \Rightarrow \left| \frac{dL}{dt} \right| = 2,5\text{kgm}^2/\text{s}^2$$

