

Θέματα Γ

Στροφορμή και μεταβολή της στροφορμής

4.Γ.1

α. Βρίσκουμε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής στο διάστημα από 0s έως 10s

$$\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_1 = \frac{5 - (-5)}{10} \text{Kgm}^2/\text{s}^2 = 1 \text{Kgm}^2/\text{s}^2$$

Ο ρυθμός αυτός είναι σταθερός στο συγκεκριμένο διάστημα άρα θα έχουμε

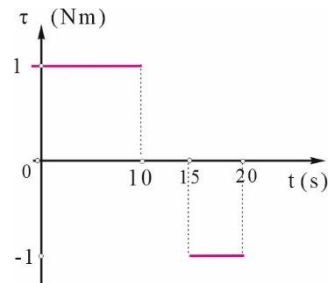
$$\left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_1 = \frac{0 - (-5)}{t_1} \text{Kgm}^2/\text{s} \Rightarrow t_1 = \frac{5 \text{Kgm}^2/\text{s}}{1 \text{Kgm}^2/\text{s}^2} \Rightarrow t_1 = 5\text{s}$$

β. Η ροπή είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος σε κάθε χρονικό διάστημα

$$\Sigma \tau_1 = \left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_1 = \frac{5 - (-5)}{10} \text{Kgm}^2/\text{s}^2 = 1 \text{Kgm}^2/\text{s}^2, \quad 0\text{s} \leq t < 10\text{s}$$

$$\Sigma \tau_2 = \left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_2 = 0 \text{Kgm}^2/\text{s}^2 \quad 10\text{s} \leq t < 15\text{s}$$

$$\Sigma \tau_3 = \left(\frac{\Delta L}{\Delta t}\right)_3 = \frac{0 - 5}{20 - 15} \text{Kgm}^2/\text{s}^2 = -1 \text{Kgm}^2/\text{s}^2, \quad 15\text{s} \leq t \leq 20\text{s}$$



Η γραφική παράσταση της μέσης ροπής σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.

γ. Η μεταβολή της στροφορμής του σώματος στο χρονικό διάστημα από 0s έως 20s αντιστοιχεί στο εμβαδόν του παραπάνω διαγράμματος

$$\Delta L = [10 \cdot 1 + 0 + 5 \cdot (-1)] \text{Kgm}^2/\text{s} \Rightarrow \Delta L = 5 \text{Kgm}^2/\text{s}$$

δ. Η μέση τιμή της συνισταμένης των ροπών που ασκήθηκε στο σώμα στο χρονικό διάστημα από 0s έως 20s είναι

$$\Sigma \bar{\tau} = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \bar{\tau} = \frac{5}{20} \text{Nm} \Rightarrow \Sigma \bar{\tau} = 0,25 \text{Nm}$$

4.Γ.2

α. Η μεταβολή της στροφορμής του σώματος στο χρονικό διάστημα από 0s έως 16s αντιστοιχεί στο εμβαδό του διαγράμματος

$$\Delta L = \left(\frac{4 \cdot 0,4}{2} + 4 \cdot 0,4 + \frac{8 \cdot 0,4}{2} \right) \text{Kgm}^2/\text{s} \Rightarrow \Delta L = 4 \text{Kgm}^2/\text{s}$$

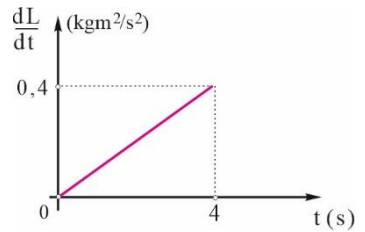
β. Από τη μεταβολή στη στροφορμή βρίσκουμε την τελική γωνιακή ταχύτητα του σώματος

$$\Delta L = L_{\text{τελ}} - L_{\text{αρχ}} = m \cdot v \cdot r - m \cdot v_0 \cdot r = m \cdot \omega \cdot r^2 - m \cdot \omega_0 \cdot r^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{\Delta L + m \cdot \omega_0 \cdot r^2}{m \cdot r^2} \Rightarrow \omega = \frac{4 + 2 \cdot 10^{-1} \cdot 20 \cdot 1^2}{2 \cdot 10^{-1} \cdot 1^2} \text{rad/s} \Rightarrow \omega = 40 \text{rad/s}$$

γ. Η χρονική εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του σώματος στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα είναι

$$\left(\frac{dL}{dt} \right)_1 = \Sigma \tau_1 \Rightarrow \left(\frac{dL}{dt} \right)_1 = 0,1t \text{ (S.I.)}, \quad 0 \leq t < 4\text{s}$$



Άρα η γραφική της παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

δ. Η μέση ροπή γίνεται 0,2Nm για δεύτερη φορά στο χρονικό διάστημα από 8s έως 16s. Βρίσκουμε πρώτα τη χρονική εξίσωση της ροπής στο διάστημα αυτό

$$\Sigma \tau = \frac{\Delta(\Sigma \tau)}{\Delta t} = \frac{\Sigma \tau - 0,4}{t - 8} \Rightarrow \Sigma \tau = 0,4 + \frac{d\tau}{dt}(t - 8), \quad 8\text{s} \leq t \leq 16\text{s} \quad (1)$$

όπου $\frac{d\tau}{dt}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της ροπής στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα ο οποίος ισούται με

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{0 - 0,4 \text{ Nm}}{16 - 8 \text{ s}} = -0,05 \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε

$$\Sigma \tau = 0,4 - 0,05(t - 8) \Rightarrow \Sigma \tau = 0,8 - 0,05t, \quad 8\text{s} < t \leq 16\text{s}$$

Θέτοντας $\Sigma \tau = 0,2\text{Nm}$ στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$0,2\text{Nm} = 0,8\text{Nm} - 0,05 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} \cdot t \Rightarrow t = 12\text{s}$$

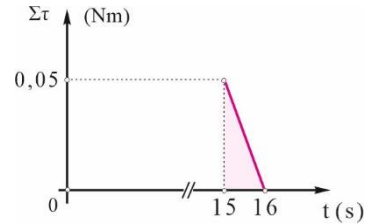
Λύσεις κεφαλαίου 4

ε. Από τη χρονική εξίσωση της ροπής βρίσκουμε τη ροπή στο τέλος του 15^{ου} δευτερόλεπτου της κίνησης

$$\Sigma\tau = (0,8 - 0,05 \cdot 15) \text{ Nm} \Rightarrow \Sigma\tau = (0,8 - 0,75) \text{ Nm} \Rightarrow$$

$$\Sigma\tau = 0,05 \text{ Nm}$$

Από το εμβαδό στην παραπάνω γραφική παράσταση βρίσκουμε τη μεταβολή στη στροφορμή στο 16^ο δευτερόλεπτο της κίνησης του σώματος



$$\Delta L = \frac{1 \cdot 0,05}{2} \text{ Kgm}^2 / \text{s} \Rightarrow \Delta L = 0,025 \text{ Kgm}^2 / \text{s}$$

Η μεταβολή είναι θετική, διότι αν και η ροπή μειώνεται χρονικά το σώμα συνεχίζει να επιταχύνεται περιστροφικά με μειούμενο ρυθμό.

4.Γ.3

α. Από την κεντρομόλο δύναμη που δέχεται το σώμα βρίσκουμε τη γωνιακή του ταχύτητα εκείνη τη στιγμή

$$F_{\kappa} = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{F_{\kappa}}{mR}} = 5 \text{ rad/s}$$

και η χρονική στιγμή είναι

$$\omega = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} = 2,5 \text{ s}$$

β. Το ποσοστό μεταβολής του μέτρου της στροφορμής είναι

$$\begin{aligned} \pi\% &= \frac{L - L_0}{L_0} 100\% = \frac{m\nu R - m\nu_0 R}{m\nu_0 R} 100\% = \\ &= \frac{m\omega R^2 - m\omega_0 R^2}{m\omega_0 R^2} 100\% = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} 100\% \Rightarrow \\ \pi\% &= \frac{5 - 10}{10} 100\% = -50\% \end{aligned}$$

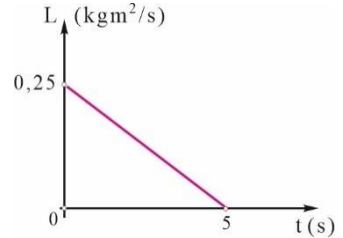
γ. Η στροφορμή του σώματος σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

$$\begin{aligned} L &= m\nu R = m\omega R^2 = m(\omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu} t) R^2 \Rightarrow L = 0,1(10 - 2t)0,5^2 \Rightarrow \\ L &= 0,25 - 0,05t \quad (\text{S.I.}) \quad \text{με} \quad 0 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s} \quad (1) \end{aligned}$$

και το διάγραμμα της στροφορμής σε συνάρτηση με τον χρόνο δείχνεται στο σχήμα.

Το μέτρο της ροπής που δέχεται το σώμα είναι

$$|\Sigma \tau| = \frac{|\Delta L|}{\Delta t} = \frac{0,25 - 0}{5 - 0} \text{ Nm} \Rightarrow |\Sigma \tau| = 0,05 \text{ Nm}$$



δ. Από τη γωνιακή μετατόπιση βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που το σώμα έχει διαγράψει γωνία 16rad

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \Rightarrow 16 = 10t - \frac{1}{2} 2t^2 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow t_2 = 2\text{s}, \quad t_3 = 8\text{s}$$

Η λύση $t_3 = 8\text{s}$ απορρίπτεται γιατί το σώμα έχει σταματήσει την $t=5\text{s}$.

Η στροφορμή την $t_2 = 2\text{s}$, από τη σχέση (1) είναι

$$L_2 = 0,25 - 0,05t_2 = 0,15 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

και το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής είναι

$$|\Delta L| = |L_2 - L_0| = |0,15 \text{ kgm}^2/\text{s} - 0,25 \text{ kgm}^2/\text{s}| \Rightarrow |\Delta L| = 0,1 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

4.Γ.4

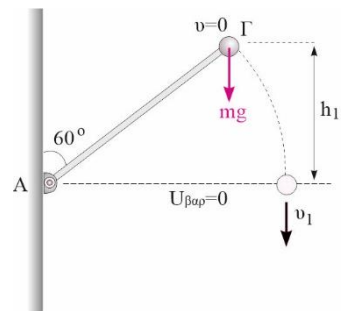
Α. α. Στο σφαιρίδιο, στην οριζόντια θέση, ασκείται η δύναμη του βάρους του και μία δύναμη από τη ράβδο που είναι οριζόντια στη θέση αυτή και παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Η δύναμη από τη ράβδο δε δίνει ροπή γιατί διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου είναι

$$\frac{dL}{dt} = mg\ell = 5 \text{ Nm}$$

β. Η κατακόρυφη απόσταση που διανύει η σφαίρα από τη στιγμή που αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα μέχρι την οριζόντια θέση είναι

$$\sin 60^\circ = \frac{h_1}{\ell} \Rightarrow h_1 = 0,5\text{m}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων



$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{10}\text{m/s}$$

Άρα η στροφορμή της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής είναι

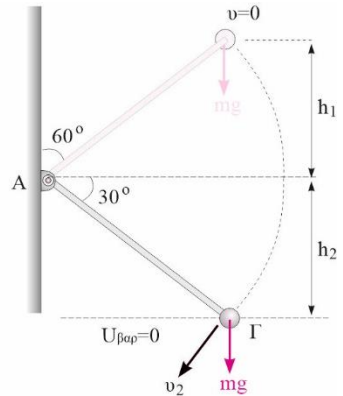
$$L_1 = mv_1\ell = 0,5\sqrt{10}\text{Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Β. α. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου στη θέση αυτή είναι

$$\frac{dL}{dt} = mg\eta\mu 60^\circ \ell = 2,5\sqrt{3}\text{Nm}$$

β. Όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία $\phi=120^\circ$ με την κατακόρυφο, τότε σε σχέση με την οριζόντια θέση έχει διαγράψει γωνία 30° και έχει κατέλθει κατά

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{h_2}{\ell} \Rightarrow h_2 = 0,5\text{m}$$



Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μεταξύ των δύο θέσεων

$$U_1 + K_1 = U_3 + K_3 \Rightarrow mg(h_1 + h_2) = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g(h_1 + h_2)} = 2\sqrt{5}\text{m/s}$$

Άρα η στροφορμή του σφαιριδίου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι

$$L_2 = mv_2\ell = \sqrt{5}\text{Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

4.Γ.5

α. Η στροφορμή της μάζας m_3 ως προς τον άξονα περιστροφής είναι

$$L_3 = m_3v_3\alpha \Rightarrow L_3 = m_3\omega\alpha^2 = 0,9\text{Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

β. Η στροφορμή της μάζας m_7 ως προς τον άξονα περιστροφής είναι

$$L_7 = m_7v_7\alpha\sqrt{2} \Rightarrow L_3 = m_7\omega(\alpha\sqrt{2})^2 = 1,8\text{kgm}^2/\text{s}$$

γ. Οι στροφορμές των μαζών m_1 και m_4 είναι μηδενικές, γιατί οι μάζες αυτές βρίσκονται πάνω στον άξονα περιστροφής. Για τις υπόλοιπες σημειακές μάζες ισχύουν

$$L_3 = L_2 = L_5 = L_8$$

$$L_7 = L_6$$

Όλες οι στροφορμές είναι ομόρροπες και η διεύθυνσή τους είναι αυτή του άξονα περιστροφής, οπότε έχουμε

$$L_{\omega\lambda} = L_3 + L_2 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8 \Rightarrow L_{\omega\lambda} = 4L_3 + 2L_7 \Rightarrow L_{\omega\lambda} = 7,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$

δ. Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε

$$|\Sigma \vec{\tau}| = \left| \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \right| \Rightarrow \Delta t = \frac{|\Delta \vec{L}|}{|\Sigma \vec{\tau}|} = 0,6 \text{ s}$$

4.Γ.6

α. Η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας τη χρονική στιγμή $t_1=1\text{s}$ είναι

$$L_1 = m v_1 \ell \Rightarrow L_1 = m \omega_1 \ell^2 \Rightarrow \omega_1 = \frac{L_1}{m \ell^2} = 80 \text{ rad / s}$$

β. Η συνισταμένη ροπή που ασκείται στη σφαίρα τη χρονική στιγμή $t_2=3\text{s}$ είναι

$$\Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \tau = \frac{0,6 \text{ Nms} - 0,4 \text{ Nms}}{2 \text{ s}} \Rightarrow \Sigma \tau = 0,1 \text{ Nm}$$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας στο χρονικό διάστημα από $t_3=4\text{s}$ μέχρι $t_4=6\text{s}$ είναι

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{0 - 0,6}{6 - 4} \text{ Nm} \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = -0,3 \text{ Nm}$$

δ. Στο χρονικό διάστημα από 0s έως 2s το σώμα κάνει ομαλή στροφική κίνηση και ο αριθμός των περιστροφών είναι

$$N_1 = \frac{\Delta \phi_1}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{\omega_1 \Delta t}{2\pi} \Rightarrow N_1 = \frac{80 \cdot 2}{2\pi} = \frac{80}{\pi} \text{ στροφές}$$

Η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας τη χρονική στιγμή 4s είναι

$$L_2 = m \omega_2 \ell^2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{L_2}{m \ell^2} = \frac{0,6}{0,5 \cdot 0,01} \text{ rad / s} \Rightarrow \omega_2 = 120 \text{ rad / s}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα είναι

$$\alpha_{\gamma\omega\nu(1)} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = 20 \text{ rad / s}^2$$

οπότε η αντίστοιχη γωνιακή μετατόπιση είναι

Λύσεις κεφαλαίου 4

$$\Delta\varphi_2 = \omega_1 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu(1)} \Delta t^2 \Rightarrow \Delta\varphi_2 = (80 \cdot 2 + 10 \cdot 4) \text{rad} \Rightarrow \Delta\varphi_2 = 200 \text{rad}$$

Ο αριθμός των περιστροφών είναι

$$N_2 = \frac{\Delta\varphi_2}{2\pi} \Rightarrow N_2 = \frac{100}{\pi}$$

Στο χρονικό διάστημα από 4s έως 6s η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι

$$\alpha_{\gamma\omega\nu(2)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -60 \text{rad/s}^2 \text{ και η αντίστοιχη γωνιακή μετατόπιση}$$

$$\Delta\varphi_3 = \frac{\omega_2^2}{2|\alpha_{\gamma\omega\nu(2)}|} = 120 \text{rad}$$

Ο αριθμός των περιστροφών είναι

$$N_3 = \frac{\Delta\varphi_3}{2\pi} \Rightarrow N_3 = \frac{60}{\pi}$$

Άρα ο συνολικός αριθμός περιστροφών είναι

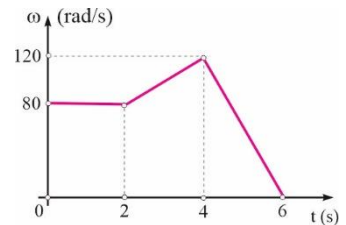
$$N_{\text{ολ}} = N_1 + N_2 + N_3 = \frac{240}{\pi}$$

Β' τρόπος:

Από το εμβαδό της γραφικής παράστασης της γωνιακής ταχύτητας με τον χρόνο μπορούμε να βρούμε τη γωνιακή μετατόπιση και τον αριθμό περιστροφών

$$\Delta\theta \rightarrow \text{εμβ} = 160 \text{rad} + \left(\frac{80+120}{2} \right) 2 \text{rad} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 120 \text{rad} \Rightarrow$$

$$\Delta\theta = 480 \text{rad}, N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{240}{\pi} \text{στρ.}$$



4.Γ.7

α. Η περίοδος του λεπτοδείκτη είναι 1h, επομένως η στροφορμή του έχει μέτρο

$$L_\lambda = m_\lambda \omega_\lambda \ell_\lambda^2 \Rightarrow L_\lambda = m_\lambda \frac{2\pi}{T_\lambda} \ell_\lambda^2 \Rightarrow L_\lambda = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{kg} \cdot \frac{2\pi}{3600\text{s}} \cdot (0,15\text{m})^2 \Rightarrow L_\lambda = 45\pi \cdot 10^{-9} \text{Kg m}^2/\text{s}$$

με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

Η περίοδος του ωροδείκτη είναι 12h, επομένως η στροφορμή του έχει μέτρο

$$L_{\omega} = m_{\omega} \omega_{\omega} \ell_{\omega}^2 \Rightarrow L_{\omega} = m_{\omega} \frac{2\pi}{T_{\omega}} \ell_{\omega}^2 \Rightarrow L_{\omega} = 4,32 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{12 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot (0,1 \text{ m})^2 \Rightarrow L_{\omega} = 2\pi \cdot 10^{-9} \text{ Kg m}^2 / \text{s}$$

με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

β. Οι δείκτες κινούνται ομόρροπα, οπότε η στροφορμή του συστήματος είναι ίση με το άθροισμα των στροφορμών των δύο δεικτών με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα

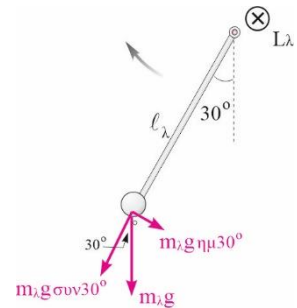
$$L_{\omega\lambda} = L_{\omega} + L_{\lambda} = 47\pi \cdot 10^{-9} \text{ Kg m}^2 / \text{s}$$

γ. Ο λεπτοδείκτης κάθε 5min διαγράφει το 1/12 του κύκλου, οπότε στις 12.35 σχηματίζει γωνία 30° με την κατακόρυφο.

Στην κίνηση του λεπτοδείκτη αντιστέκεται η ροπή του βάρους του σημειακού αντικειμένου που βρίσκεται στο άκρο του

$$\Sigma \tau_{\lambda} = -m_{\lambda} \cdot g \cdot x = -m_{\lambda} \cdot g \cdot \eta \mu 30^{\circ} \ell_{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Sigma \tau_{\lambda} = -3,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow \Sigma \tau_{\lambda} = -27 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$$



δ. Η δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση του λεπτοδείκτη τη στιγμή αυτή είναι η συνιστώσα του βάρους $w_x = m_{\lambda} g \eta \mu 30^{\circ}$. Η δύναμη που ασκεί ο μηχανισμός του ρολογιού πρέπει να εξουδετερώνει τη δύναμη αυτή, οπότε ο ρυθμός που προσφέρει ενέργεια η μπαταρία, δηλαδή η ισχύς της μπαταρίας που δαπανάται για την κίνηση του λεπτοδείκτη είναι

$$P = F v_{\lambda} = m_{\lambda} g \eta \mu 30^{\circ} \cdot \omega_{\lambda} \ell_{\lambda} \Rightarrow P = (3,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg}) \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3600 \text{ s}} \cdot (0,15 \text{ m}) \Rightarrow P = 15\pi \cdot 10^{-7} \text{ J/s}$$

4.Γ.8

α. Η γραμμική ταχύτητα των σωμάτων στην αρχή έχει μέτρο

$$v = \omega R = 3 \text{ m/s}$$

Η στροφορμή του συστήματος των μαζών $\Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3$ πριν την κρούση είναι

$$L_{\omega\lambda} = m v R + m v R + m v R \Rightarrow L_{\omega\lambda} = 3 m v R \Rightarrow L_{\omega\lambda} = 3 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-1} \text{ Kg m}^2 / \text{s} \Rightarrow L_{\omega\lambda} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ Kg m}^2 / \text{s}$$

β. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα, καθώς δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές

$$\vec{L}_{\omega\lambda} = \vec{L}'_{\omega\lambda} \Rightarrow 3m\nu R - m\nu'R = 4m\nu''R \Rightarrow \nu' = 3\nu - 4\nu''R \Rightarrow$$

$$\nu' = (3 \cdot 3 - 4 \cdot 10 \cdot 10^{-1}) \text{ m/s} \Rightarrow \nu' = 5 \text{ m/s}$$

γ. Η μεταβολή στη στροφορμή του Σ_1 είναι

$$\Delta L_1 = m\nu''R - m\nu R \Rightarrow \Delta L_1 = m\omega''R^2 - m\nu R \Rightarrow \Delta L_1 = (10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2} - 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{-1}) \text{ Kg m}^2/\text{s} \Rightarrow$$

$$\Delta L_1 = (10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3}) \text{ Kg m}^2/\text{s} \Rightarrow \Delta L_1 = -2 \cdot 10^{-3} \text{ Kg m}^2/\text{s}$$

με διεύθυνση αυτήν της κατακόρυφης και φορά προς τα κάτω.

Η μεταβολή στη στροφορμή του Σ_4 είναι

$$\Delta L_4 = m\nu''R - (-m\nu'R) \Rightarrow \Delta L_4 = (10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2} + 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-1}) \text{ Kg m}^2/\text{s} \Rightarrow$$

$$\Delta L_4 = (10^{-3} + 5 \cdot 10^{-3}) \text{ Kg m}^2/\text{s} \Rightarrow \Delta L_4 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Kg m}^2/\text{s}$$

με διεύθυνση αυτήν της κατακόρυφης και φορά προς τα πάνω.

δ. Η θερμότητα που παράγεται στην ανελαστική κρούση είναι

$$Q = 3 \frac{1}{2} m\nu^2 + \frac{1}{2} m\nu'^2 - 4 \frac{1}{2} m\nu''^2 \Rightarrow Q = 24 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

4.Γ.9

α. Στον δορυφόρο ασκείται η δύναμη της βαρύτητας από τη Γη, η οποία δε δίνει ροπή, οπότε η στροφορμή του δορυφόρου είναι σταθερή ανάμεσα στο απόγειο και στο περίγειο

$$L_\alpha = L_\pi \Rightarrow m\nu_\alpha r_\alpha = m\nu_\pi r_\pi \Rightarrow \nu_\pi = \frac{\nu_\alpha r_\alpha}{r_\pi} \Rightarrow \nu_\pi = \frac{\frac{17}{3} \cdot 10^3 \frac{18}{16} R_\Gamma}{\frac{17}{16} R_\Gamma} \text{ m/s} \Rightarrow \nu_\pi = 6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

β. Βρίσκουμε πρώτα τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας ανάμεσα στο απόγειο και στο περίγειο

$$\Delta K = K_\pi - K_\alpha \Rightarrow \Delta K = \frac{m}{2} (\nu_\pi^2 - \nu_\alpha^2) \Rightarrow \Delta K = 250 \cdot \left(36 \cdot 10^6 - \frac{289}{9} \cdot 10^6 \right) \text{ J} \Rightarrow \Delta K = 250 \cdot \frac{35}{9} \cdot 10^6 \text{ J} \Rightarrow$$

$$\Delta K = 972,2 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Η δύναμη της βαρύτητας είναι συντηρητική άρα η μηχανική ενέργεια του δορυφόρου διατηρείται σταθερή

$$K_\alpha + U_\alpha = K_\pi + U_\pi \Rightarrow K_\pi - K_\alpha = U_\alpha - U_\pi \Rightarrow \Delta U = -\Delta K \Rightarrow \Delta U = -972,2 \cdot 10^6 \text{ J}$$

γ. Η στροφορμή του δορυφόρου είναι

$$L = m \cdot v_{\pi} \cdot r_{\pi} \Rightarrow L = m \cdot v_{\pi} \cdot \frac{17}{16} R_{\Gamma} \Rightarrow L = 5 \cdot 10^2 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot \frac{17}{16} \cdot 64 \cdot 10^5 \text{ kgm}^2 / \text{s} \Rightarrow L = 20,4 \cdot 10^{12} \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

δ. Το διάνυσμα της στροφορμής του δορυφόρου στρέφεται κατά $\pi/2$ rad, οπότε η μεταβολή της στροφορμής του είναι

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} + (-\vec{L}_{\text{αρχ}}) \Rightarrow |\Delta \vec{L}| = \sqrt{L_{\text{τελ}}^2 + L_{\text{αρχ}}^2} \Rightarrow |\Delta \vec{L}| = L\sqrt{2} \Rightarrow |\Delta \vec{L}| = 20,4\sqrt{2} \cdot 10^{12} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}$$

Άρα, η μέση ροπή που ασκείται στον δορυφόρο από τους πυραύλους του είναι

$$\Sigma \tau = \frac{|\Delta \vec{L}|}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \tau = \frac{20,4\sqrt{2} \cdot 10^{12} \text{ kgm}^2 / \text{s}}{20,4 \cdot 10^3 \text{ s}} \Rightarrow \Sigma \tau = \sqrt{2} \cdot 10^9 \text{ Nm}$$

4.Γ.10

α. Η χάντρα διαγράφει κυκλική τροχιά, οπότε υπάρχει κεντρομόλος δύναμη. Τη δύναμη αυτή τη δημιουργεί η οριζόντια συνιστώσα της δύναμης N που ασκεί ο δακτύλιος στη χάντρα. Από τη συνθήκη της κυκλικής κίνησης της χάντρας στο οριζόντιο επίπεδο έχουμε

$$\Sigma F_x = F_k \Rightarrow N_x = F_k \Rightarrow$$

$$N \eta \mu \varphi = \frac{mv^2}{x} = m\omega^2 x \quad (1)$$

Από τη γεωμετρία του σχήματος έχουμε

$$\eta \mu \varphi = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R \eta \mu \varphi, \text{ οπότε με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε}$$

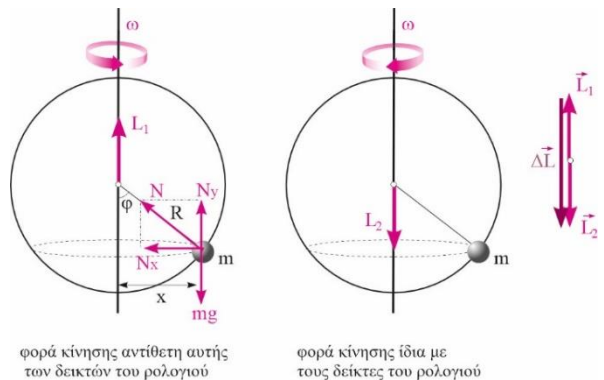
$$N \eta \mu \varphi = m\omega^2 x = m\omega^2 R \eta \mu \varphi \Rightarrow N = m\omega^2 R \quad (2)$$

Από την ισορροπία της χάντρας στον κατακόρυφο άξονα έχουμε

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_y = mg \Rightarrow N \sigma \nu \nu \varphi = mg \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη την (3) με τη (2) παίρνουμε

$$\frac{N \sigma \nu \nu \varphi}{N} = \frac{mg}{m\omega^2 R} \Rightarrow \sigma \nu \nu \varphi = \frac{g}{\omega^2 R} = \frac{10 \text{ m/s}^2}{\left(2\sqrt{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 1 \text{ m}} \Rightarrow \sigma \nu \nu \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$



Λύσεις κεφαλαίου 4

β. Η στροφορμή της χάντρας έχει μέτρο

$$L_1 = m v x = m \omega x^2 \Rightarrow L_1 = m \omega R^2 \eta \mu^2 \varphi \Rightarrow L_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot 2\sqrt{5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot (1\text{m})^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow L_1 = 3\sqrt{5} \cdot 10^{-2} \text{ Kgm}^2 / \text{s}$$

και το διάνυσμά της έχει φορά προς τα πάνω (θετικά).

γ. Η νέα στροφορμή θα έχει ίδιο μέτρο με την παλιά, όμως θα είναι αντίθετο το διάνυσμά της, επομένως η μεταβολή της στροφορμής έχει μέτρο

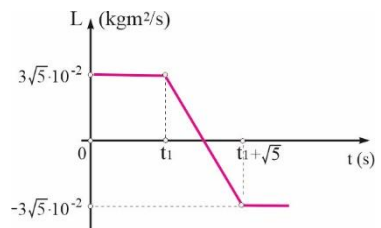
$$\Delta L = L_2 - L_1 = \left[3\sqrt{5} \cdot 10^{-2} - (-3\sqrt{5} \cdot 10^{-2}) \right] \text{ Kgm}^2 / \text{s} \Rightarrow \Delta L = 6\sqrt{5} \cdot 10^{-2} \text{ Kgm}^2 / \text{s}$$

με φορά προς τα κάτω (αρνητικά).

δ. Η μέση ροπή που ασκήθηκε στο σύστημα έχει μέτρο

$$\Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \tau = \frac{6\sqrt{5} \cdot 10^{-2}}{\sqrt{5}} \text{ Nm} \Rightarrow \Sigma \tau = 6 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}$$

και διεύθυνση κατακόρυφη με φορά προς τα κάτω.



Η γραφική παράσταση της στροφορμής της χάντρας σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.

4.Γ.11

α. Η ράβδος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, άρα τη στιγμή $t=10\text{s}$ η γωνιακή της ταχύτητα είναι

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t = 20 \text{ rad/s}$$

και η κινητική ενέργεια του συστήματος

$$K_{\omega\lambda} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{d}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{2d}{3}\right)^2 \Rightarrow K_{\omega\lambda} = 0,2 \text{ J}$$

β. Το μέτρο της στροφορμής του συστήματος είναι

$$L = m_1 v_1 \frac{d}{3} + m_2 v_2 \frac{2d}{3} = m \omega \left(\frac{d}{3}\right)^2 + m \omega \left(\frac{2d}{3}\right)^2 \Rightarrow L = 0,02 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

γ. Η στροφορμή του συστήματος σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

$$L = m_1 v_1 \frac{d}{3} + m_2 v_2 \frac{2d}{3} = m\omega \left(\frac{d}{3}\right)^2 + m\omega \left(\frac{2d}{3}\right)^2 = m\omega \frac{5d^2}{9} = m\alpha_{\text{γων}} t \frac{5d^2}{9} \Rightarrow$$

$$L = 2 \cdot 10^{-3} t \quad (\text{S.I.}) \quad (1)$$

άρα το μέτρο της σταθερής ροπής που δέχεται το σύστημα είναι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής

$$|\Sigma \tau| = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 10^{-3} t_2 - 2 \cdot 10^{-3} t_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow |\Sigma \tau| = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$$

δ. Η δύναμη που προκαλεί αυτήν τη ροπή είναι

$$|\Sigma \tau| = F \frac{2d}{3} \Rightarrow F = \frac{3|\Sigma \tau|}{2d} = 10^{-2} \text{ N}$$

4.Γ.12

α. Η αρχική γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι

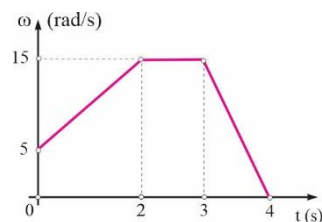
$$L_0 = m v_0 R = m \omega_0 R^2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{L_0}{m R^2} = 5 \text{ rad/s}$$

β. Η στροφορμή του σώματος είναι ανάλογη με τη γωνιακή του ταχύτητα. Έτσι το διάγραμμα της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο έχει την ίδια μορφή με αυτό της στροφορμής. Από τη στιγμή $t=2\text{s}$ μέχρι τη στιγμή $t=3\text{s}$ η γωνιακή ταχύτητα είναι

$$L = m v R = m \omega R^2 \Rightarrow \omega = \frac{L}{m R^2} = 15 \text{ rad/s}$$

κι έτσι προκύπτει το διπλανό διάγραμμα.

Η συνολική γωνία που διέγραψε το σώμα σε 4 δευτερόλεπτα προκύπτει από το αντίστοιχο εμβαδό του διαγράμματος



$$\theta_{\text{ολ}} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{5+15}{2} \cdot 2 + 15 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 15 \Rightarrow \theta_{\text{ολ}} = 42,5 \text{ rad}$$

γ. Από την κλίση του διαγράμματος L - t βρίσκουμε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος, δηλαδή την αρχική ροπή που δέχεται το σώμα, που είναι

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau_1 = \frac{6-2}{2-0} \text{ kgm}^2/\text{s}^2 \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = 2 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$$

Έτσι η στροφορμή του σώματος τη χρονική στιγμή $t=1\text{s}$ είναι

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau_1 = \frac{L-2}{2-1} \Rightarrow 2 \text{kgm}^2 / \text{s}^2 = \frac{L-2 \text{kgm}^2 / \text{s}}{1 \text{s}} \Rightarrow L = 4 \text{kgm}^2 / \text{s}$$

δ. Η μέγιστη τιμή του μέτρου της ροπής που δέχεται το σώμα είναι στην τρίτη φάση της κίνησης, από τη στιγμή $t=3\text{s}$ μέχρι τη στιγμή $t=4\text{s}$

$$|\Sigma \tau|_{\max} = |\Sigma \tau_3| = \left| \frac{\Delta L}{\Delta t} \right| = \left| \frac{0-6}{4-3} \right| \text{Nm} \Rightarrow |\Sigma \tau|_{\max} = 6 \text{Nm}$$

4.Γ.13

α. Σε ένα διάγραμμα ροπής - χρόνου στο εμβαδό αντιστοιχεί η μεταβολή της στροφορμής, οπότε η στροφορμή του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$\Delta L = \tau \Delta t_1 \Rightarrow L_1 - L_0 = \tau \Delta t_1 \Rightarrow L_1 = 6 \text{kgm}^2 / \text{s} + [(-5 \text{Nm}) \cdot 1 \text{s}] \Rightarrow L_1 = 1 \text{kgm}^2 / \text{s}$$

και η γωνιακή του ταχύτητα

$$m v_1 R = 1 \text{kgm}^2 / \text{s} \Rightarrow m \omega_1 R^2 = 1 \text{kgm}^2 / \text{s} \Rightarrow \omega_1 = 10 \text{rad/s}$$

β. Το σώμα δέχεται δύο δυνάμεις: την επιτρόχιο δύναμη που προκαλεί τη ροπή και την κεντρομόλο δύναμη. Οι δύο δυνάμεις είναι κάθετες. Η πρώτη έχει μέτρο που ισούται με

$$|\tau_1| = FR \Rightarrow F = \frac{|\tau_1|}{R} = 5 \text{N}$$

Για να βρούμε την κεντρομόλο δύναμη πρέπει να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή $t=0,8\text{s}$

$$\Sigma \tau_1 = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{L_2 - L_0}{t_2 - 0} \Rightarrow -5 = \frac{L_2 - 6}{0,8} \Rightarrow L_2 = 2 \text{kgm}^2 / \text{s} \Rightarrow$$

$$m v_2 R = 2 \text{kgm}^2 / \text{s} \Rightarrow m \omega_2 R^2 = 2 \text{kgm}^2 / \text{s} \Rightarrow \omega_2 = 20 \text{rad/s}$$

Η κεντρομόλος δύναμη έχει μέτρο που ισούται με

$$F_{\kappa} = \frac{m v_2^2}{R} = m \omega_2^2 R \Rightarrow F_{\kappa} = 40 \text{N}$$

οπότε το μέτρο της συνολικής δύναμης που δέχεται το σώμα τη στιγμή $t=0,8\text{s}$ είναι

$$\Sigma F = \sqrt{F_{\kappa}^2 + F^2} = \sqrt{40^2 + 5^2} \Rightarrow \Sigma F = \sqrt{1625} \text{N}$$

γ. Η στροφορμή του σώματος τη χρονική στιγμή $t_3=3s$ είναι

$$\Sigma \tau_2 = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow 10 = \frac{L - L_1}{3 - 1} \Rightarrow 10 = \frac{L - 1}{2} \Rightarrow L = 21 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

δ. Από τη στροφορμή του σώματος στην πρώτη φάση προκύπτει η συνάρτηση της γωνιακής ταχύτητας με τον χρόνο και η γωνιακή του επιτάχυνση

$$\Sigma \tau_1 = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow -5 = \frac{L - L_0}{t - 0} \Rightarrow -5 = \frac{L - 6}{t} \Rightarrow L = 6 - 5t \Rightarrow m\omega R^2 = 6 - 5t \Rightarrow 0,1\omega = 6 - 5t \Rightarrow$$

$$\omega = 60 - 50t = \omega_0 + \alpha_{\gamma\omega\nu,1}t \Rightarrow \omega_0 = 60 \text{ rad/s} \text{ και } \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = -50 \text{ rad/s}^2 \text{ για } 0s \leq t \leq 1s$$

Έτσι η γωνία που διέγραψε το σώμα στην πρώτη φάση είναι

$$\theta_1 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu,1} t^2 \Rightarrow \theta_1 = 35 \text{ rad}$$

Ομοίως δουλεύουμε και για τη δεύτερη φάση

$$\Sigma \tau_2 = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow 10 = \frac{L - L_1}{t - 1} \Rightarrow 10 = \frac{L - 1}{t - 1} \Rightarrow L = -9 + 10t \Rightarrow m\omega R^2 = -9 + 10t \Rightarrow 0,1\omega = -9 + 10t \Rightarrow$$

$$\omega = -90 + 100t \Rightarrow \text{για } t=1s \quad \omega_1 = 10 \text{ rad/s} \text{ και } \alpha_{\gamma\omega\nu,2} = 100 \text{ rad/s}^2 \text{ για } 1s \leq t \leq 3s$$

Έτσι η γωνία που διέγραψε το σώμα στη δεύτερη φάση είναι

$$\theta_2 = \omega_1 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu,2} \Delta t^2 \Rightarrow \theta_2 = 220 \text{ rad}$$

Η συνολική γωνία είναι $\theta_{\text{ολ}} = \theta_1 + \theta_2 = 35 + 220 \Rightarrow \theta_{\text{ολ}} = 255 \text{ rad}$

και η απόσταση που διήνυσε το σώμα είναι $s_{\text{ολ}} = R\theta_{\text{ολ}} = 255 \text{ m}$.