

Θέματα Β

Κεντρικές ελαστικές κρούσεις

1.B.1 i. γ. ii. α.

i. Είναι $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \Rightarrow m v_1 = -m_2 v_2 \Rightarrow m_1 v_1 = -4 m_1 v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = -4$

ii. Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{m_1 - 4m_1}{m_1 + 4m_1} v_1 + \frac{2 \cdot 4m_1}{m_1 + 4m_1} \left(-\frac{v_1}{4} \right) \Rightarrow v'_1 = -v_1$$

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \Rightarrow v'_2 = -\frac{v_1}{4} = -v_2$$

Άρα, για τον λόγο των κινητικών ενεργειών των σφαιρών πριν και μετά την κρούση ισχύει

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = 4 = \mu, \quad \frac{K'_1}{K'_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v'^2_1}{\frac{1}{2} m_2 v'^2_2} = 4 = \lambda$$

Άρα, $\lambda = \mu$.

1.B.2 α.

$$v'_1 = -v'_2 \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$$

1.B.3 β.

Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

Με αντικατάσταση $v'_1 = 0$ και $v_2 = -v_1$ προκύπτει $\frac{m_1}{m_2} = 3$

1.B.4 γ.

$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 \Rightarrow -1,2 \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{p}'_1 = -0,2 \vec{p}_1 \Rightarrow$$

$$m_1 v'_1 = -0,2 m_1 v_1 \Rightarrow v'_1 = -0,2 v_1 \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -0,2 v_1 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{2}$$

1.B.5 β.

Οι σφαίρες μετά την σύγκρουσή τους θα αποκτήσουν ταχύτητες:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Η σφαίρα 2 μετά τη σύγκρουσή της με τον τοίχο θα αποκτήσει ταχύτητα $v_2'' = -v_2'$

$$\text{Πρέπει να ισχύει } v_1' = v_2'' \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

από όπου προκύπτει $m_2 = 3m_1$.

1.B.6 γ.

$$\text{Είναι } K_1' = K_2' / 3 \Rightarrow K_2' = 3K_1'$$

Στην ελαστική κρούση διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος

$$K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} \Rightarrow K_1 = K_1' + K_2' \Rightarrow K_1 = K_1' + 3K_1' = 4K_1' \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 4 \frac{1}{2} m v_1'^2 \Rightarrow v_1' = \frac{v_1}{2}$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση με ακίνητη τη μία σφαίρα ισχύει

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow \frac{v_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow m_1 + m_2 = 2m_1 - 2m_2 \Rightarrow m_1 = 3m_2$$

1.B.7 i. α. ii. β.

i. Για την κεντρική ελαστική κρούση η διατήρηση της ορμής και η διατήρηση της κινητικής ενέργειας δίνουν τη σχέση

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \Rightarrow 10 \text{ m/s} + v_1' = 6 \text{ m/s} + 2v_1' \Rightarrow v_1' = 4 \text{ m/s}$$

ii. Από την ΑΔΟ παίρνουμε: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow$

$$m_1 \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + m_2 \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = m_1 \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + m_2 \left(2 \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \Rightarrow m_2 = 3m_1$$

1.B.8 γ.

Για την κεντρική ελαστική κρούση με ακίνητο το 2° σώμα ισχύει

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_1' = \frac{m_1 - 2m_1}{m_1 + 2m_1} v_1 \Rightarrow v_1' = -\frac{v_1}{3}$$

Η κινητική ενέργεια της Σ_1 μετά την κρούση είναι

$$K_1' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(-\frac{v_1}{3}\right)^2 = \frac{K_1}{9}$$

Στην ελαστική κρούση διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος

$$K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} \Rightarrow K_1 = K_1' + K_2' \Rightarrow K_2' = K_1 - K_1' \Rightarrow K_2' = \frac{8}{9} K_1$$

1.B.9 β.

Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_1' = \frac{m_1 - 3m_1}{m_1 + 3m_1} v_1 \Rightarrow v_1' = -\frac{v_1}{2}$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ₁ κατά την κρούση είναι

$$\Delta p_1 = p_1' - p_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1 = -m_1 \frac{v_1}{2} - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = -1,5 m_1 v_1$$

1.B.10 α.

Από την ΑΔΟ παίρνουμε:

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow p_1 = p_1' + p_2' \Rightarrow p_1 = p_1' - 3p_1' \Rightarrow p_1 = -2p_1' \Rightarrow m_1 v_1 = -2m_1 v_1' \Rightarrow v_1' = -\frac{v_1}{2}$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση με ακίνητη τη μία σφαίρα ισχύει

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow -\frac{v_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow -m_1 - m_2 = 2m_1 - 2m_2 \Rightarrow m_2 = 3m_1$$

1.B.11 γ.

Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{m_1 - 3m_1}{m_1 + 3m_1} v_1 + \frac{2 \cdot 3m_1}{m_1 + 3m_1} v_2 \Rightarrow 0 = -\frac{v_1}{2} + \frac{3v_2}{2} \Rightarrow v_1 = 3v_2$$

Άρα, για τις κινητικές ενέργειες των δύο σφαιρών Κ₁ και Κ₂ πριν την κρούση είναι

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} 3m_1 \left(\frac{v_1}{3} \right)^2 = \frac{K_1}{3} \Rightarrow K_1 = 3K_2$$

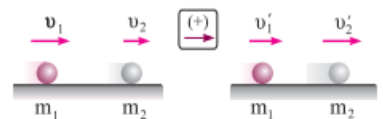
1.B.12 γ.

Για να συνεχίσουν τα σώματα να κινούνται ομόρροπα πρέπει το Σ₁, μετά την κρούση να διατηρήσει τη φορά κίνησής του, άρα η ταχύτητά του πρέπει να μείνει θετική

$$v_1' > 0 \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 3v_2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 > 0 \Rightarrow$$

$$3m_1 - 3m_2 + 2m_2 > 0 \Rightarrow m_1 > \frac{m_2}{3}$$



1.B.13 α.

Οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση πρέπει να έχουν ίσα μέτρα, αλλά αντίθετη φορά, ώστε μετά και την κρούση της Σ_2 με τον τοίχο οι δύο σφαίρες να διατηρούν σταθερή την απόστασή τους

$$v'_2 = -v'_1 \Rightarrow \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 = - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \right) \Rightarrow$$

$$2m_1 v_1 + (4m_1 - m_1) v_2 = -(m_1 - 4m_1) v_1 - 2 \cdot 4m_1 v_2 \Rightarrow v_1 = 11v_2$$

1.B.14 γ.

$$K_1 = K_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow \frac{1}{2} 4m_2 v_1^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow |v_2| = 2v_1$$

Επειδή οι σφαίρες κινούνται αντίρροπα είναι $v_2 = -2v_1$, άρα

$$\frac{v'_2}{v'_1} = \frac{\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2}{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2} = \frac{2 \cdot 4m_2 v_1 + (m_2 - 4m_2)(-2v_1)}{(4m_2 - m_2)v_1 + 2m_2(-2v_1)} \Rightarrow \frac{v'_2}{v'_1} = -14$$

1.B.15 α.

Αφού τη χρονική στιγμή t_1 τα δύο σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, η διαφορά των αποστάσεων που διανύουν ισούται με d

$$x_1 - x_2 = d \Rightarrow v_1 t_1 - v_2 t_1 = d \Rightarrow$$

$$t_1 = \frac{d}{v_1 - v_2} \quad (1)$$

Τα δύο σώματα μετά την κρούση κινούνται με ταχύτητες v'_1 και v'_2 ομόρροπα και θα απέχουν πάλι κατά d σε χρονικό διάστημα Δt . Είναι

$$x'_2 - x'_1 = d \Rightarrow v'_2 \Delta t - v'_1 \Delta t = d \Rightarrow \Delta t = \frac{d}{v'_2 - v'_1} \quad (2)$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

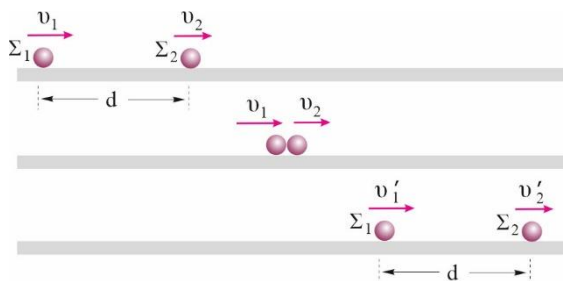
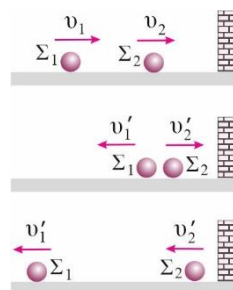
$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 \Rightarrow v_1 - v_2 = v'_2 - v'_1$$

Από (1) και (2) και με τη βοήθεια της τελευταίας σχέσης προκύπτει

$$t_1 = \Delta t \Rightarrow t_1 = t_2 - t_1 \Rightarrow t_2 = 2t_1$$

1.B.16 γ.

Λαμβάνουμε θετική φορά προς τα δεξιά. Είναι $v_2 = -v_1$ και $v'_1 = 4v'_2$



$$v_1' = 4v_2' \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = 4 \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \right) \Rightarrow$$

$$(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2(-v_1) = 4[2m_1v_1 + (m_2 - m_1)(-v_1)] \Rightarrow$$

$$m_1 - m_2 - 2m_2 = 8m_1 - 4m_2 + 4m_1 \Rightarrow m_2 / m_1 = 11$$

1.B.17 γ.

Από το διάγραμμα προκύπτει

$$p_1' = \frac{p_1}{5} \Rightarrow m_1 v_1' = \frac{m_1 v_1}{5} \Rightarrow v_1' = \frac{v_1}{5}$$

Η κινητική ενέργεια της Σ_1 μετά την κρούση είναι

$$K_1' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{v_1}{5} \right)^2 = \frac{K_1}{25}$$

Στην ελαστική κρούση διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος

$$K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} \Rightarrow K_1 = K_1' + K_2' \Rightarrow K_2' = K_1 - K_1' \Rightarrow K_2' = \frac{24}{25} K_1$$

Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταβιβάστηκε από τη σφαίρα μάζας m_1 στη σφαίρα μάζας m_2 κατά την κρούση είναι ίσο με

$$\pi\% = \frac{K_2'}{K_1} 100\% = \frac{24}{25} 100\% = 96\%$$

1.B.18 β.

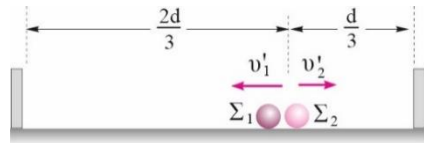
Οι σφαίρες μετά την κρούση κινούνται αντίρροπα. Στο ίδιο χρονικό διάστημα που η Σ_1 διανύει απόσταση $2d/3$, η Σ_2 διανύει απόσταση $d/3$. Είναι

$$x_1 = |v_1'|t \Rightarrow |v_1'| = \frac{2d/3}{t}$$

$$x_2 = |v_2'|t \Rightarrow |v_2'| = \frac{d/3}{t}$$

Άρα $|v_1'| = 2|v_2'|$ και αφού κινούνται αντίρροπα τελικά είναι

$$v_1' = -2v_2' \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -2 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow m_1 - m_2 = -4m_1 \Rightarrow m_2 = 5m_1$$



1.B. 19 γ.

$$v_\beta' = \frac{m_\beta - m_\alpha}{m_\beta + m_\alpha} v \Rightarrow v_\beta' = \frac{3}{5} v$$

$$|\Delta K| = K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} m_\beta v^2 - \frac{1}{2} m_\beta \left(\frac{3}{5} v \right)^2 \Rightarrow |\Delta K| = \frac{16}{25} \frac{1}{2} m_\beta v^2 \Rightarrow \frac{|\Delta K|}{K_{\text{αρχ}}} = \frac{16}{25}$$

1.B.20 γ.

Στην οριζόντια βολή ο χρόνος πτώσης εξαρτάται μόνο από το ύψος h , οπότε είναι ίδιος για τις δύο σφαίρες

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Από τη σχέση για τα βεληνεκή προκύπτει

$$s_2 = 2,5s_1 \Rightarrow v_2't = 2,5v_1't \Rightarrow v_2' = 2,5v_1'$$

Αν η σφαίρα Σ_1 κινείται πριν την κρούση με ταχύτητα v_1 , η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$v_2' = 2,5v_1' \Rightarrow \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 = 2,5\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \Rightarrow 2m_1v_1 = 2,5(m_1 - m_2)v_1 \Rightarrow 0,5m_1 = 2,5m_2 \Rightarrow m_1 = 5m_2$$

1.B.21 α.

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της Σ_1 μέχρι την κρούση δίνει

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$0 + m_1g\ell = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + 0 \Rightarrow v_1' = \sqrt{2g\ell}$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση με ακίνητο το 2^ο σώμα ισχύει

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \quad (1)$$

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της Σ_1 μετά την κρούση μέχρι να σταματήσει, δίνει

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1|v_1'|^2 + 0 = 0 + m_1g\ell/4 \Rightarrow |v_1'| = \sqrt{\frac{g\ell}{2}} = \frac{v_1}{2}$$

και επειδή η σφαίρα Σ_1 μετά την κρούση κινείται προς τα πίσω, είναι $v_1' = -\frac{v_1}{2}$.

Τελικά η σχέση (1) δίνει

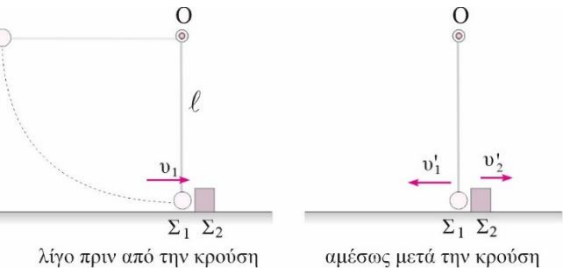
$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \Rightarrow -\frac{v_1}{2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \Rightarrow m_1 + m_2 = -2m_1 + 2m_2 \Rightarrow m_2 = 3m_1$$

1.B.22 i. α. ii. α.

i. Για την πρώτη κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

$$v_2' = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}v_2$$

Για τη δεύτερη κεντρική ελαστική κρούση, λόγω $m_1 = m_3$, ισχύει



$$v''_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v'_2 \Rightarrow \frac{v_2}{4} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_2 \Rightarrow \frac{1}{4} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \pm \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

Δεκτό στην παραπάνω σχέση είναι το πρόσημο -, γιατί $m_2 < m_1$, άρα

$$\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_2 + m_1 = -2m_2 + 2m_1 \Rightarrow m_1 = 3m_2$$

ii. Η ταχύτητα της Σ_3 μετά την πρώτη κεντρική ελαστική κρούση είναι

$$v'_3 = \frac{2m_2}{m_3 + m_2} v_2 = \frac{2m_2}{3m_2 + m_2} v_2 \Rightarrow v'_3 = \frac{v_2}{2} \quad (1)$$

Η ταχύτητα της Σ_2 μετά την πρώτη κεντρική ελαστική κρούση είναι

$$v'_2 = \frac{m_2 - 3m_2}{m_2 + 3m_2} v_2 = -\frac{v_2}{2}$$

Η ταχύτητα της Σ_1 μετά τη δεύτερη κεντρική ελαστική κρούση είναι

$$v'_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v'_2 = \frac{2m_2}{3m_2 + m_2} \left(-\frac{v_2}{2} \right) \Rightarrow v'_1 = -\frac{v_2}{4} \quad (2)$$

Άρα από τις (1) και (2) είναι $v_3' = -2v_1'$.

1.B.23 i. γ. ii. α.

$$i. p_1' = -\frac{9}{10} p_1 \Rightarrow m_1 v_1' = -\frac{9}{10} m_1 v_1 \Rightarrow -\frac{9}{10} v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow m_2 = 19m_1$$

ii. Η σφαίρα 2 απέκτησε την κινητική ενέργεια που έχασε η σφαίρα 1

$$|\Delta K_1| = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(1 - \frac{81}{100} \right) \Rightarrow \frac{|\Delta K_1|}{K_1} = \frac{K_2'}{K_1} = \frac{19}{100}$$

1.B.24 α.

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{9} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1' = \pm \frac{v_1}{3}$$

Επειδή κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση είναι

$$v_1' = -\frac{v_1}{3} \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{v_1}{3} \Rightarrow m_2 = 2m_1$$

1.B.25 α.

$$\Delta \vec{p}_2 + \Delta \vec{p}_1 = 0 \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -1,8 \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -1,8 \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{p}_1' = -0,8 \vec{p}_1 \Rightarrow m_1 v_1' = -0,8 m_1 v_1 \Rightarrow v_1' = -0,8 v_1$$

Η κρούση είναι ελαστική, επομένως

$$\Delta K_1 + \Delta K_2 = 0$$

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (0,8 v_1)^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow \Delta K_1 = -\frac{36}{100} K_1$$

$$\text{Άρα } \Delta K_2 = -\Delta K_1 \Rightarrow K_2' - 0 = \frac{36}{100} K_1 \Rightarrow \frac{K_2'}{K_1} = \frac{36}{100}$$

1.B.26 β.

Τα σφαιρίδια αφήνονται από το ίδιο ύψος h και όταν φτάσουν στο σημείο της κρούσης έχουν ίδιο μέτρο ταχύτητας v για την οποία σύμφωνα με την ΑΔΜΕ ισχύει

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$$

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Το σφαιρίδιο Α μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα v'_A και φτάνει σε ύψος $4h$. Το ΘΜΚΕ δίνει για την ταχύτητά του μετά την κρούση

$$0 - \frac{1}{2}mv_A'^2 - 0 = -4mgh \Rightarrow v_A'^2 = 8gh \Rightarrow v'_A = \pm 2\sqrt{2gh}, \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1), (2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι το σφαιρίδιο Α επιστρέφει προς τα πίσω, προκύπτει για τις ταχύτητες του Α πριν και μετά την κρούση

$$v'_A = -2v \quad (3)$$

Έχουμε κεντρική και ελαστική κρούση, επομένως

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}v + \frac{2m_B}{m_A + m_B}(-v) \Rightarrow v'_A = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B}v$$

η οποία με τη βοήθεια της (3) μας δίνει

$$v'_A = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B}v \Rightarrow -2v = \frac{m_A - 3m_B}{m_A + m_B}v \Rightarrow -2(m_A + m_B) = m_A - 3m_B \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{3}$$

1.B.27 α.

Το έργο της δύναμης που ασκείται στο σώμα μάζας m είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας

$$W_F = \frac{1}{2}mv_2'^2 - \frac{1}{2}m(2v)^2 \quad (1)$$

Έχουμε κεντρική και ελαστική κρούση, με $v_1 = v$ και $v_2 = -2v$, επομένως

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 = \frac{4}{3}v + \frac{2}{3}v \Rightarrow v_2' = 2v$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

$$W_F = \frac{1}{2}m(2v)^2 - \frac{1}{2}m(2v)^2 = 0$$

1.B.28 γ.

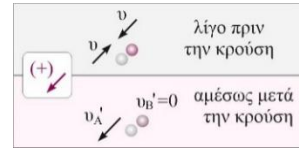
Τα σφαιρίδια πριν την κρούση έχουν ταχύτητες ίδιου μέτρου v

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Μετά την κεντρική ελαστική κρούση, $v'_B = 0$.

$$v'_B = 0 \Rightarrow \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}v_B + \frac{2m_A}{m_A + m_B}v_A = 0 \Rightarrow \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}v + \frac{2m_A}{m_A + m_B}(-v) = 0 \Rightarrow$$

$$2m_A = m_B - m_A \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{1}{3}$$

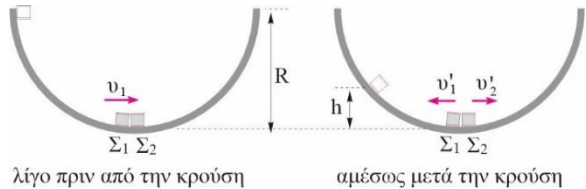


1.B.29 α.

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της μάζας m_1 μέχρι την κρούση δίνει

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \Rightarrow K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \Rightarrow$$

$$0 + m_1 g R = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gR}$$



Για την κεντρική ελαστική κρούση με ακί-

νητο το δεύτερο σώμα ισχύει

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + 2m_1}v_1 \Rightarrow v'_2 = \frac{2v_1}{3} \Rightarrow v'_2 = \frac{2\sqrt{2gR}}{3}$$

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της μάζας m_2 μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει, δίνει

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \Rightarrow K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2}m_2 |v'_2|^2 + 0 = 0 + m_2 gh \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2gR}}{3} \right)^2 = gh \Rightarrow h = \frac{4R}{9}$$

1.B.30 α.

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της Σ_1 μέχρι την κρούση δίνει

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \Rightarrow K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \Rightarrow 0 + m_1 g \ell = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell} \quad (1)$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση με ακίνητο το δεύτερο σώμα ισχύει

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \quad (2)$$

Ο χρόνος πτώσης ενός σώματος που εκτελεί οριζόντια βολή είναι

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}$$

Από τη σχέση για το βεληνεκές προκύπτει

$$S = v_2' t \Rightarrow \ell = v_2' \sqrt{\frac{2\ell}{g}} \Rightarrow v_2' = \sqrt{\frac{g\ell}{2}} = \frac{v_1}{2}$$

Η σχέση (2) δίνει

$$v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow \frac{v_1}{2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow m_2 = 3m_1$$

1.B.31 β.

Η απόσταση που διανύει η Σ_1 στον χρόνο συνάντησης t είναι $h/2$

$$y_1 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \frac{h}{2} = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

Η απόσταση που διανύει η Σ_2 στον χρόνο συνάντησης t είναι $h/2$

$$y_2 = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) προκύπτει

$$h = v_0 t \Rightarrow t = \frac{h}{v_0} \quad (3)$$

και από τη (2)

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow h = g \left(\frac{h}{v_0} \right)^2 \Rightarrow v_0^2 = gh \quad (4)$$

Οι ταχύτητες των σφαιρών τη στιγμή πριν την κρούση είναι αντίστοιχα

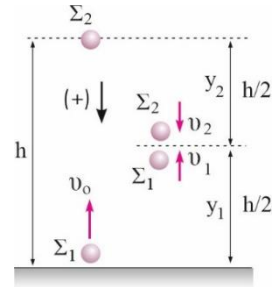
$$v_1 = v_0 - gt = v_0 - g \frac{h}{v_0} \Rightarrow v_1 = v_0 - \frac{v_0^2}{v_0} \Rightarrow v_1 = 0$$

$$v_2 = gt = g \frac{h}{v_0} = \frac{v_0^2}{v_0} \Rightarrow v_2 = v_0$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση με θετική φορά προς τα κάτω, ισχύει

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{2 \cdot 3m_1}{m_1 + 3m_1} v_0 \Rightarrow v'_1 = \frac{3v_0}{2}$$

με φορά κίνησης θετική, δηλαδή προς τα κάτω.



Ανελαστικές κρούσεις

1.B.32 β.

$$K_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} - \frac{19}{100} K_{\text{αρχ}} \Rightarrow K_{\text{τελ}} = \frac{81}{100} K_{\text{αρχ}} \Rightarrow \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{81}{100} \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow |v'| = 0,9 v$$

1.B.33 i. β. ii. β.

$$i. \Delta p_{\beta\lambda} = p' - p = \frac{mv}{2} - mv \Rightarrow \Delta p_{\beta\lambda} = -\frac{mv}{2}$$

$$\text{ii. } |\Delta K| = K - K' = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 \Rightarrow |\Delta K| = \frac{3}{4}K$$

1.B.34 i. γ. ii. β.

i. Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ παίρνουμε

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \quad \text{ή} \quad 3 + (-5) = (-2) + p'_2 \quad \text{ή} \quad p'_2 = 0.$$

Η σφαίρα Σ₂ μετά την κρούση ακινητοποιείται.

ii. Η κινητική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$K_1 = \frac{p_1^2}{2m} = \frac{9}{2m}, \quad K_2 = \frac{p_2^2}{2m} = \frac{25}{2m}, \quad K'_1 = \frac{p'^2_1}{2m} = \frac{4}{2m}, \quad K'_2 = 0$$

Η μείωση της κινητικής ενέργειας είναι

$$|\Delta K| = K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}} = (K_1 + K_2) - (K'_1 + K'_2) = \frac{30}{2m}$$

$$\frac{|\Delta K|}{K'_1} = \frac{\frac{30}{2m}}{\frac{4}{2m}} = 7,5 \Rightarrow |\Delta K| = 7,5 K'_1$$

1.B.35 β.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ για την πλαστική κρούση παίρνουμε

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1 v = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m v}{3m} = \frac{v}{3}$$

$$\Delta p_A = p'_A - p_A = m V - m v \Rightarrow \Delta p_A = -\frac{2mv}{3}$$

1.B.36 γ.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ παίρνουμε

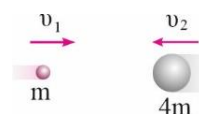
$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_K$$

$$\frac{K_{\text{αρχ}}}{K_{\text{τελ}}} = \frac{K_1 + 0}{K_{\text{τελ}}} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_K^2} = \frac{m_1 v_1^2 (m_1 + m_2)^2}{(m_1 + m_2) m_1^2 v_1^2} \Rightarrow \frac{K_{\text{αρχ}}}{K_{\text{τελ}}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} = 1 + \frac{m_2}{m_1}$$

1.B.37 α.

Η ακινητοποίηση του συσσωματώματος, σε συνδυασμό με την ΑΔΟ, σημαίνει

$$p_{\text{ολ}} = 0 \Rightarrow p_1 + p_2 = 0 \Rightarrow m v_1 + 4m v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -\frac{v_1}{4}$$



Όλη η κινητική ενέργεια έγινε θερμότητα, άρα η μηχανική ενέργεια που χάθηκε ισούται με

$$|\Delta E_M| = Q = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} 4 m \left(\frac{v_1}{4} \right)^2 \Rightarrow |\Delta E_M| = \frac{5}{4} K_1$$

1.B.38 α.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ παίρνουμε

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_A v_A = (m_A + m_B) V_K \Rightarrow V_K = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B}$$

$$\pi \% = \frac{Q}{K_{αρχ}} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_A v_A^2 - \frac{1}{2} (m_A + m_B) V_K^2}{\frac{1}{2} m_A v_A^2} 100\% \Rightarrow \pi \% = \frac{m_B}{m_A + m_B} 100\% = 25\%$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της αρχικής ταχύτητας v_A .

1.B.39 β.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ παίρνουμε

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 |v_2| = (m_1 + m_2) V_K \Rightarrow V_K = 0$$

Το έργο W_1 της δύναμης που ασκείται στο σώμα μάζας m είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας

$$W_1 = \frac{1}{2} m V_K^2 - \frac{1}{2} m (2v)^2 = -\frac{1}{2} 4 m v^2$$

Το έργο W_2 της δύναμης που ασκείται στο σώμα μάζας $2m$ είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας

$$W_2 = \frac{1}{2} 2m V_K^2 - \frac{1}{2} 2m v^2 = -\frac{1}{2} 2m v^2$$

Τα δύο έργα συνδέονται με τη σχέση $W_1 = 2W_2$.

1.B.40 α.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ παίρνουμε

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_A v_A = (m_A + m_B) V_K \Rightarrow V_K = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B} = \frac{v_A}{2}$$

$$K' = \frac{1}{2} (m_A + m_B) V_K^2 = \frac{1}{2} 2m_A \left(\frac{v_A}{2} \right)^2 \Rightarrow K' = \frac{K_A}{2}$$

1.B.41 β.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η αρχική ορμή του σώματος μάζας m_1 είναι $p_1 = 10 \text{ kgm/s}$. Από την τελική του ορμή που είναι $p_1' = 2 \text{ kgm/s}$ βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος

$$p_1' = m_1 V_K \Rightarrow V_K = \frac{p_1'}{m_1} = 2 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ παίρνουμε

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow p_1 + p_2 = p' \Rightarrow 10 + 0 = (1 + m_2) V_k \Rightarrow 10 = 2 + 2m_2 \Rightarrow m_2 = 4 \text{ kg}$$

1.B.42 i. β. ii. α.

i. Από το διάγραμμα έχουμε

$$p_1 = p_o, \quad p_2 = 0, \quad p'_1 = \frac{2}{3} p_o, \quad p'_2 = \frac{p_o}{3}$$

Μετά την κρούση είναι

$$p'_1 = \frac{2}{3} p_o \Rightarrow m_1 V = \frac{2}{3} m_1 v_o \Rightarrow V = \frac{2}{3} v_o$$

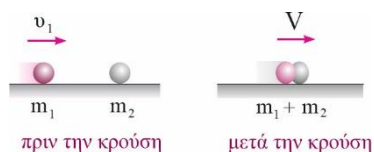
ii. Από την ΑΔΟ παίρνουμε

$$m_1 v_o = (m_1 + m_2) V \Rightarrow m_1 v_o = (m_1 + m_2) \frac{2}{3} v_o \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 2$$

1.B.43 α.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ παίρνουμε

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_k \Rightarrow V_k = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$



$$\pi \% = \frac{Q}{K_{αρχ}} 100\% = \frac{|\Delta K|}{K_{αρχ}} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_k^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} 100\% \Rightarrow \pi \% = \frac{m_2}{m_1 + m_2} 100\%$$

$$\text{Όταν το κινούμενο σώμα είναι το } m \text{ προκύπτει } \pi \% = \frac{Q}{K_{αρχ}} 100\% = \frac{M}{m + M} 100\% \quad (1)$$

$$\text{Όταν το κινούμενο σώμα είναι το } M \text{ προκύπτει } \pi' \% = \frac{Q'}{K_{αρχ}} 100\% = \frac{m}{M + m} 100\% \quad (2)$$

$$\text{Από τη σχέση (1) έχουμε } \frac{M}{m + M} = \frac{90}{100} \Rightarrow M = 9m.$$

$$\text{Από τη σχέση (2) έχουμε } \pi' \% = \frac{Q'}{K_{αρχ}} 100\% = 10\%.$$

1.B.44 β.

Λαμβάνοντας θετική φορά αυτήν της αρχικής ταχύτητας του σώματος Σ₁, η ΑΔΟ δίνει

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 |v_2| = (m_1 + m_2) V \Rightarrow m_1 v_1 - 2m_1 2v_1 = (m_1 + 2m_1) V \Rightarrow V = -v_1$$

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 κατά την κρούση είναι

$$\Delta p_1 = p'_1 - p_1 = m_1 V - m_1 v_1 \Rightarrow \Delta p_1 = -2m_1 v_1$$

1.B.45 γ.

Λαμβάνοντας θετική φορά αυτήν της αρχικής ταχύτητας του σώματος Σ_1 , η ΑΔΟ δίνει

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow m v_1 = (m + 4m) V \Rightarrow V = \frac{v_1}{5}$$

Η θερμότητα που εκλύθηκε κατά την κρούση είναι

$$Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} (m + 4m) \left(\frac{v_1}{5} \right)^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m \frac{v_1^2}{5} \Rightarrow \frac{Q}{K_1} = \frac{8}{10}$$

1.B.46 β.

Η ορμή της σφαίρας Σ_1 εξαιτίας της κρούσης μειώνεται, άρα η μεταβολή της ορμής της είναι αρνητική

$$\Delta p_1 = p'_1 - p_1 = m_1 V - m_1 v_1 \Rightarrow -\frac{7m_1 v_1}{8} = m_1 V - m_1 v_1 \Rightarrow V = \frac{v_1}{8}$$

Λαμβάνοντας θετική φορά αυτήν της αρχικής ταχύτητας του σώματος Σ_1 , η ΑΔΟ δίνει

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \frac{v_1}{8} \Rightarrow m_2 = 7m_1$$

1.B.47 γ.

Η ΑΔΟ δίνει

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \Rightarrow m_1 v_1 + 4m_1 v_2 = 4m_1 v'_2 \Rightarrow v_1 + 4v_2 = 4v'_2 \quad (1)$$

Εφόσον η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_2 τετραπλασιάζεται, είναι

$$K'_2 = 4K_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = 4 \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow v'_2 = 2v_2$$

Η σχέση (1) δίνει

$$v_1 + 4v_2 = 4v'_2 \Rightarrow v_1 + 4v_2 = 4 \cdot 2v_2 \Rightarrow v_1 = 4v_2$$

1.B.48 γ.

Από την ΑΔΟ παίρνουμε

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow p_1 = p'_1 + p'_2 \Rightarrow p_1 = p'_1 + \frac{p_1}{2} \Rightarrow p'_1 = \frac{p_1}{2} \Rightarrow m_1 v'_1 = \frac{m_1 v_1}{2} \Rightarrow v'_1 = \frac{v_1}{2}$$

Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_1 είναι

$$\pi\% = \frac{\Delta K_1}{K_1} 100\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} 100\% = \frac{v_1'^2 - v_1^2}{v_1^2} 100\% = \frac{\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 - v_1^2}{v_1^2} 100\% \Rightarrow$$

$$\pi\% = -75\%$$

1.B.49 γ.

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_2 πριν την κρούση είναι τετραπλάσια αυτής της Σ_1 , άρα

$$K_2 = 4K_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 4 \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_2^2 = 4v_1^2 \Rightarrow v_2 = \pm 2v_1$$

Επειδή οι σφαίρες κινούνται αντίρροπα είναι $v_2 = -2v_1$.

Μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 διατηρεί ίδια την κινητική της ενέργεια, άρα

$$K_1' = K_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1' = \pm v_1$$

Επιλέγουμε το $v_1' = -v_1$, διαφορετικά δεν υπάρχει κρούση.

Λαμβάνοντας θετική φορά αυτήν της αρχικής ταχύτητας του σώματος Σ_1 , η ΑΔΟ δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow v_1 - 2v_1 = -v_1 + v_2' \Rightarrow v_2' = 0$$

Άρα, η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_2 ελαττώθηκε κατά

$$|\Delta K_2| = K_2 - K_2' = 4K - 0 \Rightarrow |\Delta K_2| = 4K$$

1.B.50 β.

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 κατά την κρούση δίνει

$$\Delta p_1 = p_1' - p_1 \Rightarrow -1,5m_1 v_1 = m_1 v_1' - m_1 v_1 \Rightarrow v_1' = -\frac{v_1}{2}$$

Η ΑΔΟ δίνει τη σχέση για την ταχύτητα της σφαίρας Σ_2 μετά την κρούση

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow m_2 v_2' = m_1 v_1 - m_1 v_1' = 1,5m_1 v_1 \Rightarrow v_2' = \frac{1,5m_1 v_1}{m_2}$$

Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες έχουν ίσες κινητικές ενέργειες, άρα

$$K_1' = K_2' \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow m_1 \left(-\frac{v_1}{2}\right)^2 = m_2 \left(\frac{1,5m_1 v_1}{m_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{m_1}{4} = \frac{2,25m_1^2}{m_2} \Rightarrow m_2 = 9m_1$$

1.B.51 β.

Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_1 είναι

$$\pi\% = \frac{\Delta K_1}{K_1} 100\% = \frac{K_1' - K_1}{K_1} 100\%$$

Άρα, για να είναι το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας ίδιο και στις δύο κρούσεις πρέπει το Σ_1 να κινείται με την ίδια κινητική ενέργεια K_1' μετά και από τις δύο κρούσεις, δηλαδή με το ίδιο

μέτρο ταχύτητας. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: να κινείται το Σ_1 μετά την ελαστική κρούση προς τα μπροστά, δηλαδή ομόρροπα με το συσσωμάτωμα ή προς τα πίσω, δηλαδή αντίρροπα.

$$|v'_1| = V \Rightarrow v'_1 = V \text{ (Α' περίπτωση)} \quad \text{ή} \quad v'_1 = -V \quad \text{(Β' περίπτωση)}$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 4v_2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (1)$$

Για την κεντρική πλαστική κρούση ισχύει η ΑΔΟ

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow m_1 4v_2 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_1 4v_2 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει για την Α' περίπτωση

$$v'_1 = V \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 4v_2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = \frac{m_1 4v_2 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow 4m_1 - 4m_2 + 2m_2 = 4m_1 + m_2 \Rightarrow m_2 = 0 \quad \text{άτοπο}$$

Από (1) και (2) προκύπτει για τη Β' περίπτωση

$$v'_1 = -V \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 4v_2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 = -\frac{m_1 4v_2 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow 4m_1 - 4m_2 + 2m_2 = -4m_1 - m_2 \Rightarrow m_2 = 8m_1$$

1.B.52 α.

Αφού η Σ_1 ακινητοποιείται, η Σ_2 θα κινηθεί αναγκαστικά αντίρροπα από την αρχική της ταχύτητα.

Λαμβάνοντας θετική φορά αυτήν της αρχικής ταχύτητας του σώματος Σ_1 , η ΑΔΟ δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_1 - m_2 |v_2| = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \Rightarrow m_1 v_1 - 3m_1 |v_2| = 3m_1 v'_2 \Rightarrow v_1 - 3|v_2| = 3v'_2 \quad (1)$$

Εφόσον η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_2 τετραπλασιάζεται, είναι

$$K_2' = 4K_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = 4 \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow v_2' = 2|v_2|$$

Η σχέση (1) δίνει

$$v_1 - 3|v_2| = 3v_2' \Rightarrow v_1 - 3|v_2| = 3 \cdot 2|v_2| \Rightarrow v_1 = 9|v_2| \Rightarrow v_1 = -9v_2$$

1.B.53 β.

Για την πλαστική κρούση η ΑΔΟ δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_2 v = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m_2 v}{4m_2 + m_2} = \frac{m_2 5\sqrt{gL}}{5m_2} \Rightarrow V = \sqrt{gL}$$

Πριν την κρούση: $\Sigma F = 0 \Rightarrow T_1 = m_1 g = 4m_2 g$

Μετά την κρούση η συνισταμένη δύναμη παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης

$$\Sigma F = F_{\kappa} \Rightarrow T_2 - (m_1 + m_2)g = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{L} \Rightarrow T_2 = 5m_2 g + \frac{5m_2 V^2}{L} = 5m_2 g + \frac{5m_2 \sqrt{gL}^2}{L} \Rightarrow$$

$$T_2 = 10m_2 g$$

Ο λόγος της τάσης του νήματος ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την κρούση είναι

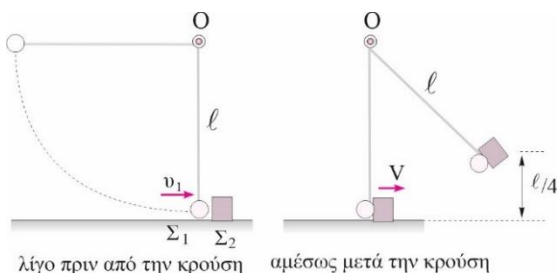
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{4m_2g}{10m_2g} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 0,4$$

1.B.54 β.

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση της m_1 μέχρι την κρούση δίνει

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow$$

$$0 + m_1g\ell = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell}$$



Για την κεντρική πλαστική κρούση ισχύει η

ΑΔΟ

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1v_1 = (m_1 + m_2)V \quad (1)$$

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση του συσσωματώματος μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει, δίνει

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2)g\ell/4 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{g\ell}{2}} = \frac{v_1}{2}$$

Τελικά η σχέση (1) δίνει

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1v_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow m_1v_1 = (m_1 + m_2)\frac{v_1}{2} \Rightarrow m_1 = m_2$$

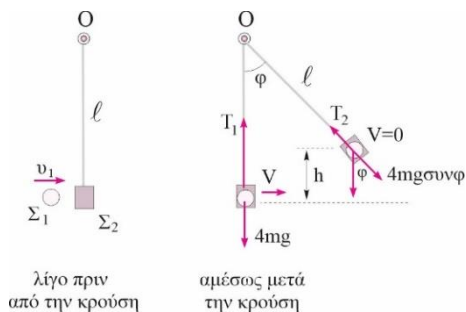
1.B.55 i. γ. ii. γ.

i. Για την πλαστική κρούση της σφαίρας Σ_1 με το σώμα Σ_2 , η ΑΔΟ δίνει

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1v_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow$$

$$mv_1 = 4mV \Rightarrow v_1 = 4V \quad (1)$$

Όταν το συσσωμάτωμα σταματήσει στιγμιαία, τότε η τάση του νήματος ισούται με $T_2 = 2mg$ και από τη συνθήκη της στιγμιαίας ισορροπίας στη διεύθυνση του νήματος βρίσκουμε τη γωνία ϕ



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_2 = w_{ολ,1} \Rightarrow 2mg = (m_1 + m_2)g\sin\phi \Rightarrow$$

$$\sin\phi = \frac{2mg}{4mg} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 60^\circ$$

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση του συσσωματώματος μέχρι να σταματήσει, δίνει

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh \Rightarrow$$

$$V^2 = 2gh = 2g\ell(1 - \sin\phi) = 2g\ell(1 - \frac{1}{2}) \Rightarrow V = \sqrt{g\ell}$$

Άρα, η σχέση (1) δίνει την ταχύτητα u_1

$$u_1 = 4V \Rightarrow u_1 = 4\sqrt{g\ell}$$

ii. Στη θέση της κρούσης το συσσωμάτωμα δέχτηκε από το νήμα δύναμη T_1 , που υπολογίζεται από τη συνισταμένη δύναμη που παίζει ρόλο κεντρομόλου δύναμης

$$\Sigma F = F_c \Rightarrow T_1 - (m_1 + m_2)g = \frac{(m_1 + m_2)V^2}{L} = 4mg + \frac{4mV^2}{L} = 4mg + \frac{4m\sqrt{g\ell}^2}{L} \Rightarrow T_1 = 8mg$$

1.B.56 α.

Το Σ_1 διανύει απόσταση $3d/4$ σε χρόνο t_1 . Είναι

$$x_1 = u_1 t_1 \Rightarrow u_1 = \frac{3d/4}{t_1} \quad (1)$$

Το συσσωμάτωμα διανύει απόσταση $d/4$ σε χρόνο $\Delta t = t_2 - t_1 = t_1$. Είναι

$$x_2 = V t_1 \Rightarrow V = \frac{d/4}{t_1} \quad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει $u_1 = 3V$

Η ΑΔΟ για την κεντρική πλαστική κρούση δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 u_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow m_1 3V = (m_1 + m_2)V \Rightarrow m_2 = 2m_1$$

1.B.57 α.

Το ποσοστό της ορμής του σώματος Σ_1 που μεταφέρεται στο Σ_2 κατά την κρούση είναι

$$\pi\% = \frac{p_2'}{p_1} 100\% \quad (1)$$

Για την πλαστική κρούση η ΑΔΟ δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 u_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}$$

Η σχέση (1) δίνει

$$\pi\% = \frac{p_2'}{p_1} 100\% = \frac{m_2 V}{m_1 u_1} 100\% = \frac{m_2 \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2}}{m_1 u_1} 100\% = \frac{m_2}{m_1 + m_2} 100\% \Rightarrow \pi\% = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} 100\%$$

Η συνάρτηση είναι φθίνουσα. Για $m_1 < m_2$ προκύπτει ποσοστό 100% και για $m_1 = m_2$ προκύπτει ποσοστό 50%.

1.B.58 i. γ. ii. α.

i. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση παραμένει ακίνητο, άρα η ολική τελική και η ολική αρχική ορμή είναι μηδέν. Λαμβάνοντας θετική φορά αυτήν της αρχικής ταχύτητας του σώματος Σ_1 , η ΑΔΟ για την κρούση των σωμάτων, με ταχύτητες v_1 και v_2 , αντίστοιχα, δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1|v_1| - m_2|v_2| = 0 \Rightarrow m_1|v_1| = m_2|v_2| \Rightarrow 2m|v_1| = m|v_2| \Rightarrow 2|v_1| = |v_2| \quad (1)$$

Τα δύο σώματα κινούνται στο πλάγιο επίπεδο με ίδιο μέτρο επιταχύνσης, που προκύπτει από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow mg\eta\mu\varphi = m\alpha \Rightarrow \alpha = g\eta\mu\varphi$$

Η σχέση (1) για τα μέτρα των ταχυτήτων των σωμάτων, που κάνουν ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη και επιταχυνόμενη κίνηση, αντίστοιχα, δίνει

$$2|v_1| = |v_2| \Rightarrow 2(v_0 - g\eta\mu\varphi t) = v_0 + g\eta\mu\varphi t \Rightarrow t = \frac{v_0}{3g\eta\mu\varphi}$$

ii. Η απόσταση d ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων που διένυσε κάθε σώμα

$$d = d_1 + d_2 = \left(v_0 t - \frac{1}{2} g\eta\mu\varphi t^2 \right) + \left(v_0 t + \frac{1}{2} g\eta\mu\varphi t^2 \right) = 2v_0 t = 2v_0 \frac{v_0}{3g\eta\mu\varphi} \Rightarrow d = \frac{2v_0^2}{3g\eta\mu\varphi}$$

1.B.59 γ.

Το m_1 διαπερνά το κιβώτιο χάνοντας το 84% της αρχικής του ενέργειας, άρα

$$K_1' = K_1 - \frac{84}{100} K_1 \Rightarrow K_1' = \frac{16}{100} K_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{16}{100} \frac{1}{2} m_1 v^2 \Rightarrow v_1' = 0,4v$$

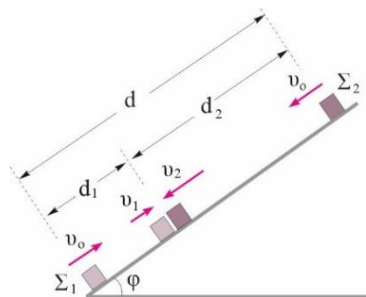
Λαμβάνοντας θετική φορά αυτήν της αρχικής ταχύτητας της μάζας m_2 , η ΑΔΟ δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_2 v - m_1 v = (m_2 + M) V - m_1 v_1' \Rightarrow 4m_1 v - m_1 v = (4m_1 + M) \frac{v}{10} - m_1 0,4v \Rightarrow 3m_1 = \frac{(4m_1 + M)}{10} - 0,4m_1 \Rightarrow M = 30m_1$$

1.B.60 γ.

Η συνολική θερμότητα που εκλύθηκε είναι όλη η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος.

Το σώμα κατά την κρούση χάνει το 75% της αρχικής του ενέργειας. Αν πριν την κρούση έχει ταχύτητα v_1 μετά έχει αντίρροπη v_1' , άρα



$$K_1' = K_1 - \frac{75}{100} K_1 \Rightarrow K_1' = \frac{25}{100} K_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{25}{100} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1' = -0,5 v_1$$

Το ΘΜΚΕ για την πρώτη κίνηση του σώματος, δίνει

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -T d \quad (1)$$

Η τριβή είναι ίδια για τις δύο κινήσεις και στις δύο κατευθύνσεις, $T = \mu N = \mu mg$.

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του σώματος, μετά την κρούση με τον τοίχο, μέχρι να σταματήσει, δίνει

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_1'^2 = -T d \Rightarrow -\frac{1}{2} m \frac{v_1^2}{4} = -T d \Rightarrow -\frac{1}{2} m v_1^2 = -4 T d \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση προκύπτει

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = -5 T d \Rightarrow v_0^2 = 10 \mu g d$$

$$\text{άρα} \quad Q = K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow Q = 5 \mu m g d$$

1.B.61 γ.

$$K_{\text{συσ}} = \frac{1}{5} K_{\beta\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2} (M + m) V^2 = \frac{1}{5} \frac{1}{2} m v_0^2 \quad (1)$$

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ παίρνουμε

$$m v_0 = (M + m) V \Rightarrow V = \frac{m v_0}{M + m} \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1), (2) παίρνουμε

$$\frac{1}{2} (M + m) \left(\frac{m v_0}{M + m} \right)^2 = \frac{1}{5} \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \frac{m}{M + m} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{4}$$

1.B.62 γ.

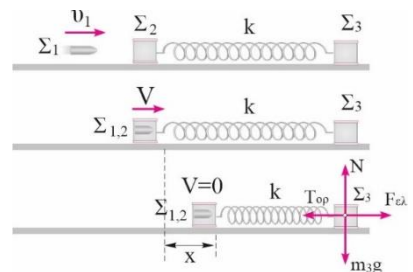
Για την πλαστική κρούση του βλήματος Σ_1 με το σώμα Σ_2 , η ΑΔΟ δίνει

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{m v_1}{2m} = \frac{v_1}{2}$$

Στη θέση της μέγιστης παραμόρφωσης x , του ελατηρίου, το Σ_3 οριακά ισορροπεί, άρα η δύναμη του ελατηρίου ισούται με την οριακή τριβή

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_{\text{op}} = F_{\text{ελ}} \Rightarrow \mu_\sigma m_3 g = k x \Rightarrow x = \frac{\mu_\sigma m g}{k}$$

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του συσσωματώματος, μέχρι να σταματήσει, δίνει



$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\text{ελ}}} \Rightarrow 0 - K_{\text{αρχ}} = U_{\text{ελ,αρχ}} - U_{\text{ελ,τελ}} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = 0 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}2m\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{\mu_{\sigma}mg}{k}\right)^2 \Rightarrow v_1 = \mu_{\sigma}g\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

1.B.63 α.

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ_2 , δίνει την ταχύτητά του τη στιγμή της κρούσης

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\text{ελ}}} \Rightarrow K_{\text{τελ}} - 0 = U_{\text{ελ,αρχ}} - U_{\text{ελ,τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}kd^2 - 0 \Rightarrow v_2 = d\sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση παραμένει ακίνητο, άρα η τελική και αρχική ορμή είναι μηδέν. Η ταχύτητα v_1 του σώματος Σ_1 είναι αντίρροπη της ταχύτητας του Σ_2 .

Λαμβάνοντας θετική φορά αυτήν της αρχικής ταχύτητας του σώματος Σ_2 , η ΑΔΟ δίνει

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_2v_2 - m_1|v_1| = 0 \Rightarrow m_1|v_1| = m_2v_2 \Rightarrow 2m_2|v_1| = m_2v_2 \Rightarrow$$

$$|v_1| = v_2 / 2 \Rightarrow |v_1| = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

1.B.64 α.

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ_1 , δίνει την ταχύτητά του τη στιγμή της κρούσης

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_F + W_{F_{\text{ελ}}} \Rightarrow K_{\text{τελ}} - 0 = Fd + U_{\text{ελ,αρχ}} - U_{\text{ελ,τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 = kd \cdot d + 0 - \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = d\sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

Για την πλαστική κρούση η ΑΔΟ δίνει

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1v_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow m_1v_1 = (m_1 + 3m_1)V \Rightarrow V = \frac{v_1}{4}$$

Η θερμότητα που εκλύθηκε κατά την κρούση είναι

$$Q = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + 3m_1)\left(\frac{v_1}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}m_1\left(d\sqrt{\frac{k}{m_1}}\right)^2 = \frac{3}{8}d^2k \Rightarrow$$

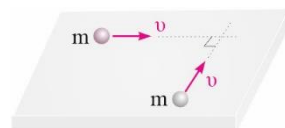
$$Q = \frac{3}{8}Fd$$

Πλάγιες κρούσεις

1.B.65 γ.

Η ΑΔΟ για τη συνολική ορμή του συστήματος δίνει

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετα}} \Rightarrow \sqrt{(mv)^2 + (mv)^2} = 2mV_K \Rightarrow V_K = \frac{v}{\sqrt{2}}$$



1.B.66 α.

$$K_{\text{τελ}} = \frac{3}{4} K_{\text{αρχ}} \Rightarrow \frac{1}{2} 2mV^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} mv^2 \right) \Rightarrow V = v \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.B.67 β.

Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες έχουν κινητικές ενέργειες που συνδέονται με τη σχέση $K_1' = 3K_2'$, άρα για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει

$$K_1' = 3K_2' \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = 3 \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow v_1'^2 = 3v_2'^2 \Rightarrow |v_1'| = \sqrt{3}|v_2'|$$

Καθώς γνωρίζουμε τη μία επιμέρους γωνία, κάνουμε ανάλυση ταχυτήτων και εφαρμόζουμε ΑΔΟ στον άξονα γ'γ

$$p_{\alpha\rho\chi, \gamma} = p_{\text{τελ}, \gamma} \Rightarrow 0 = m_1 |v_2'| \eta\mu\theta - m_2 |v_1'| \eta\mu 30^\circ \Rightarrow$$

$$|v_2'| \eta\mu\theta = \frac{1}{2} |v_1'| \Rightarrow |v_2'| \eta\mu\theta = \frac{1}{2} \sqrt{3} |v_2'| \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

1.B.68 γ.

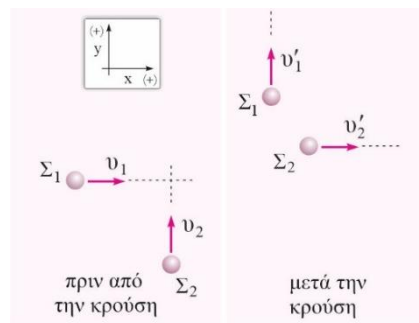
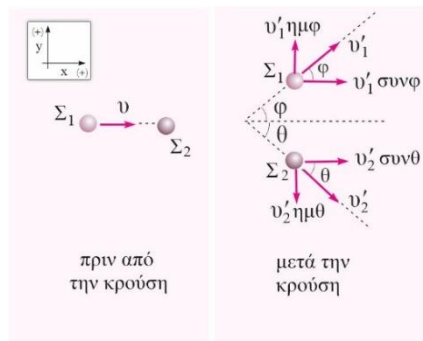
Η ΑΔΟ ανά άξονα, δίνει

ΑΔΟ(γ):

$$p_{\alpha\rho\chi, \gamma} = p_{\text{τελ}, \gamma} \Rightarrow m_2 v_2 = m_1 v_1' \Rightarrow 2m_1 v_2 = m_1 v_1' \Rightarrow 2v_2 = v_1'$$

ΑΔΟ(χ):

$$p_{\alpha\rho\chi, \chi} = p_{\text{τελ}, \chi} \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2' \Rightarrow m_1 v_1 = 2m_1 v_2' \Rightarrow \frac{v_1}{2} = v_2'$$



Στην ελαστική κρούση διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_{\text{τελ}} \Rightarrow K_1 + K_2 = K_1' + K_2' \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow$$

$$m_1 v_1^2 + 2m_1 v_2^2 = m_1 (2v_2)^2 + 2m_1 \left(\frac{v_1}{2} \right)^2 \Rightarrow v_1^2 + 2v_2^2 = 4v_2^2 + 2 \frac{v_1^2}{4} \Rightarrow \frac{v_1^2}{2} = 2v_2^2 \Rightarrow v_1 = 2v_2$$

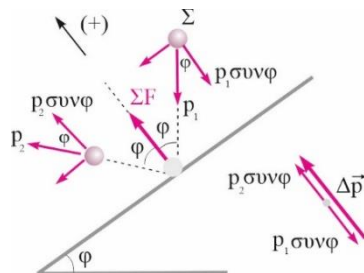
1.B.69 γ.

Η κρούση είναι ελαστική, άρα η σφαίρα διατηρεί την κινητική της

ενέργεια και το μέτρο της ορμής της $|\vec{p}_{\alpha\rho\chi}| = |\vec{p}_{\text{τελ}}|$.

Α' τρόπος

Η μεταβολή στην ορμή της σφαίρας συμβαίνει μόνο στον άξονα που είναι κάθετος στο πλάγιο επίπεδο.



$|\Delta \vec{p}| = |\Delta \vec{p}_y|$ και ορίζοντας ως θετική φορά αυτή του σχήματος παίρνουμε

$$\Delta p = 2p_1 \sin \varphi \Rightarrow \Delta p = p_1 \sqrt{3}$$

Β' τρόπος

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας είναι

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\tau\omega\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\omega\lambda} + (-\vec{p}_{\alpha\rho\chi})$$

Το μέτρο της μεταβολής της ορμής, Δp , είναι

$$\Delta p = \sqrt{p_{\alpha\rho\chi}^2 + p_{\tau\omega\lambda}^2 + 2p_{\alpha\rho\chi}p_{\tau\omega\lambda}\cos 60^\circ} = \sqrt{p_1^2 + p_1^2 + 2p_1p_1\cos 60^\circ} \Rightarrow \Delta p = p_1\sqrt{3}$$

1.B.70 γ.

Κάνουμε ανάλυση της ταχύτητας της Σ_1 μετά την κρούση και η ΑΔΟ ανά άξονα, δίνει

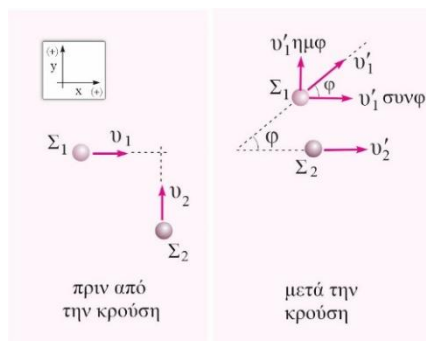
ΑΔΟ(y):

$$p_{\alpha\rho\chi,y} = p_{\tau\omega\lambda,y} \Rightarrow m_2 v_2 = m_1 v'_1 \eta\mu\varphi \Rightarrow v = 0,8v'_1 \quad (1)$$

$$\text{ΑΔΟ(x): } p_{\alpha\rho\chi,x} = p_{\tau\omega\lambda,x} \Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_1 \sigma\upsilon\nu\varphi + m_2 v'_2 \Rightarrow v = 0,6v'_1 + v'_2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$0,8v'_1 = 0,6v'_1 + v'_2 \Rightarrow 0,2v'_1 = v'_2 \Rightarrow v'_1 = 5v'_2$$



1.B.71 i. β. ii. α.

i. Η κινητική ενέργεια της Σ_1 μετά την κρούση είναι

$$K'_1 = \frac{K_1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{3} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v'_1 = \frac{v_1 \sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

Κάνουμε ανάλυση της ταχύτητας της Σ_2 μετά την κρούση και η ΑΔΟ ανά άξονα, δίνει

ΑΔΟ(y):

$$p_{\alpha\rho\chi,y} = p_{\tau\omega\lambda,y} \Rightarrow 0 = m_1 v'_1 - m_2 v'_2 \eta\mu\varphi \Rightarrow v'_1 = 2v'_2 \eta\mu\varphi \quad (2)$$

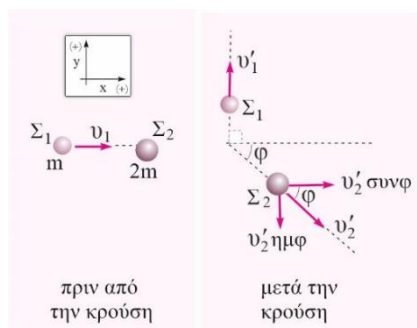
ΑΔΟ(x):

$$p_{\alpha\rho\chi,x} = p_{\tau\omega\lambda,x} \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v'_2 \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow v_1 = 2v'_2 \sigma\upsilon\nu\varphi \quad (3)$$

Διαιρώντας τις (2) και (3), με χρήση και της (1), έχουμε

$$\frac{v'_1}{v_1} = \varepsilon\varphi\varphi \Rightarrow \frac{v_1 \sqrt{3}}{3} = v_1 \varepsilon\varphi\varphi \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

Άρα, η γωνία θ που σχηματίζουν οι ταχύτητες των σφαιρών Σ_1 και Σ_2 είναι $\theta = \varphi + 90^\circ = 120^\circ$.



ii. Η σχέση (3) δίνει $v_2' = \frac{v_1}{2\sin\varphi} = \frac{v_1}{\sqrt{3}}$

Ελέγχουμε αν διατηρείται κατά την κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος

$$K_{\text{τελ}} = K_1' + K_2' = \frac{K_1}{3} + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{K_1}{3} + \frac{1}{2}2m_1 \left(\frac{v_1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{K_1}{3} + \frac{2K_1}{3} \Rightarrow K_{\text{τελ}} = K_1 = K_{\text{αρχ}}$$

Άρα, η κρούση είναι ελαστική.

1.B.72 β.

Στην ελαστική κρούση διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος

$$K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} \Rightarrow K_1 = K_1' + K_2' \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \quad (1)$$

Η ΑΔΟ για τη συνολική ορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση, δίνει

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow p_1 = \sqrt{p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2'\cos\varphi} \Rightarrow m_1 v_1 = \sqrt{(m_1 v_1')^2 + (m_2 v_2')^2 + 2(m_1 v_1')(m_2 v_2')\cos\varphi} \Rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2v_1'v_2'\cos\varphi \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$2v_1'v_2'\cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

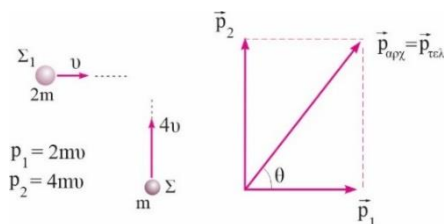
1.B.73 γ.

Η ΑΔΟ για τη συνολική ορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση, δίνει

$$\begin{aligned} p_{\text{αρχ}} &= p_{\text{τελ}} \Rightarrow \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = (m_1 + m_2)V \Rightarrow \\ \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2} &= (m_1 + m_2)V \Rightarrow \\ \sqrt{(2m v)^2 + (m 4v)^2} &= 3mV \Rightarrow \\ 4m^2 v^2 + 16m^2 v^2 &= 9m^2 V^2 \Rightarrow 20v^2 = 9V^2 \Rightarrow \\ V^2 &= \frac{20v^2}{9} \end{aligned}$$

Η θερμότητα που εκλύθηκε κατά την κρούση είναι

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}2m v^2 + \frac{1}{2}m(4v)^2 - \frac{1}{2}3m \frac{20v^2}{9} = 9m v^2 - m \frac{10v^2}{3} \Rightarrow \\ Q &= \frac{17}{3}m v^2 \end{aligned}$$



1.B.74 i. γ. ii. α.

i. Η ΑΔΟ ισχύει μόνο στον άξονα x. Στον άξονα y το σύστημα δεν είναι μονωμένο, καθώς δέχεται ισχυρότατη κάθετη δύναμη από το δάπεδο που δεν του επιτρέπει να κινηθεί σε αυτόν. Κάνουμε ανάλυση της ταχύτητας u_1 και η ΑΔΟ στον άξονα x, δίνει

$$p_{αρχ,x} = p_{τελ,x} \Rightarrow m_1 u_1 \cos\varphi = (m_1 + m_2) V \Rightarrow$$

$$0,5 m_1 u_1 = (m_1 + 3m_1) V \Rightarrow V = \frac{u_1}{8}$$

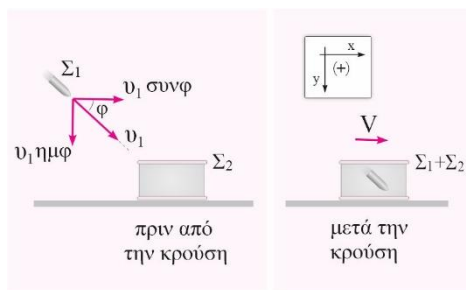
Η θερμότητα που εκλύθηκε κατά την κρούση είναι

$$Q = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 - \frac{1}{2} 4m_1 \left(\frac{u_1}{8}\right)^2 = \frac{15}{16} \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \Rightarrow Q = \frac{15}{16} K$$

ii. Η μεταβολή της ορμής του συστήματος ισούται με τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 κατά τον άξονα y και αν θεωρήσουμε θετική φορά προς τα κάτω, είναι

$$\Delta p_{ολ} = \Delta p_{1,y} = 0 - m_1 u_1 \sin\varphi \Rightarrow \Delta p_{ολ} = -\frac{\sqrt{3}}{2} m_1 u_1 \Rightarrow |\Delta p_{ολ}| = \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 u_1$$

και αφού είναι αρνητική, έχει φορά προς τα πάνω, καθώς προς τα πάνω είναι και η δύναμη που ασκεί το δάπεδο στο σύστημα.

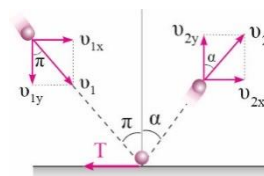


1.B.75 β.

Αναλύουμε τις ταχύτητες σε κάθετες συνιστώσες. Για τις συνιστώσες του άξονα των x ισχύει $u_{1x} > u_{2x}$ αφού στη διάρκεια της κρούσης αναπτύσσεται τριβή αντίθετη στην u_{1x} . Για τα μέτρα των u_{1y} και u_{2y} ισχύει $u_{1y} = u_{2y}$ αφού η μπάλα είναι ελαστική. Είναι

$$\varepsilon_{\varphi\pi} = \frac{u_{1x}}{u_{1y}}, \quad \varepsilon_{\varphi\alpha} = \frac{u_{2x}}{u_{2y}}$$

Επειδή $u_{1x} > u_{2x}$ θα έχουμε $\pi > \alpha$.



1.B.76 β.

Η ΑΔΟ ισχύει μόνο στον άξονα x. Στον άξονα y το συσσωμάτωμα δεν έχει τη δυνατότητα να κινηθεί λόγω της ισχυρότατης εξωτερικής δύναμης που δέχεται από το δάπεδο. Επομένως η μεταβολή της ορμής του συστήματος κατά την κρούση οφείλεται μόνο στη μεταβολή της ορμής κατά τον άξονα y. Θεωρώντας θετική φορά προς τα πάνω έχουμε

$$p_{y(αρχ)} = -m u_y = -m \cdot u \sin\varphi$$

$$p_{y(τελ)} = 0$$

$$\Delta p_{ολ} = \Delta p_y = 0 - (-m \cdot u \sin\varphi) \Rightarrow \Delta p_{ολ} = m \cdot u \sin\varphi$$

1.B.77 β.

$$K_{\text{τελ}} = \frac{3}{4} K_{\text{αρχ}} \Rightarrow \frac{1}{2} 2mV^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m v^2 \right) \Rightarrow$$

$$2mV^2 = \frac{3}{2} m v^2 \Rightarrow V = v \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$p_{\text{τελ}} = 2mV = 2mv \frac{\sqrt{3}}{2} = mv\sqrt{3} \Rightarrow p_{\text{τελ}} = p\sqrt{3}$$

$$p_{\text{τελ}} = p_{\text{αρχ}} \Rightarrow p\sqrt{3} = \sqrt{2p^2 + 2p^2 \sin\theta} \Rightarrow$$

$$(p\sqrt{3})^2 = 2p^2 + 2p^2 \sin\theta \Rightarrow$$

$$3p^2 = 2p^2 (1 + \sin\theta) \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$$

1.B.78 α.

Η θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον κατά την κρούση είναι ίση με

$$Q = K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}} = K_A + K_B - K_{\text{συσ}} \quad (1)$$

Από τη σχέση των αρχικών ορμών έχουμε

$$p_B = 2p_A \Rightarrow m_B v_B = 2m_A v_A \Rightarrow 4m_A v_B = 2m_A v_A \Rightarrow v_A = 2v_B$$

Η ΑΔΟ για τη συνολική ορμή του συστήματος δίνει

$$p_{\text{τελ}} = p_{\text{αρχ}} \Rightarrow p_{\text{τελ}} = \sqrt{p_A^2 + p_B^2} = \sqrt{p_A^2 + (2p_A)^2} = p_A \sqrt{5} \Rightarrow$$

$$(m_A + m_B) V = m_A v_A \sqrt{5} \Rightarrow 5m_A V = m_A v_A \sqrt{5} \Rightarrow V = \frac{v_A}{\sqrt{5}}$$

Η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος Β είναι

$$K_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} 4m_A \frac{v_A^2}{4} = K$$

Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι

$$K_{\text{συσ}} = \frac{1}{2} (m_A + m_B) V^2 = \frac{1}{2} 5m_A \frac{v_A^2}{5} = K$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$Q = K_{\text{αρχ}} - K_{\text{τελ}} = K_A + K_B - K_{\text{συσ}} = 2K - K \quad \text{ή} \quad Q = K$$

1.B.79 α.

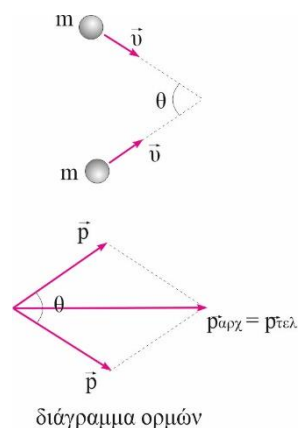
Το έργο της δύναμης, W, που άσκησε το Σ₂ στο Σ₁ ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας

$$W = \Delta K_1 = \frac{1}{2} m_1 V^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (1)$$

όπου V η ταχύτητα του συσσωματώματος. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την κρούση

$$\vec{p}_{\text{τελ}} = \vec{p}_{\text{αρχ}} \Rightarrow p_{\text{τελ}} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \quad (2)$$

Όπου $p_1 = m_1 v_1 = 3 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m/s} = 6 \text{ kgm/s}$, $p_2 = m_2 v_2 = 2 \text{ kg} \cdot 4 \text{ m/s} = 8 \text{ kgm/s}$.



Αντικαθιστώντας στη (2) παίρνουμε

$$p_{\text{τελ}} = \sqrt{\left(6 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right)^2 + \left(8 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right)^2} = 10 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \Rightarrow (m_1 + m_2)V = 10 \frac{\text{kgm}}{\text{s}} \Rightarrow V = 2 \text{ m/s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1), αφού $V=v_1$ προκύπτει $W=\Delta K_1=0$.

1.B.80 α.

$$p_{\text{τελ}} = (m_1 + m_2)V$$

$$p_{\alpha\rho\chi} = \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}$$

Η ΑΔΟ για τη συνολική ορμή του συστήματος δίνει

$$p_{\text{τελ}} = p_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow ((m_1 + m_2)V)^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 \Rightarrow V = \frac{v_1}{3}$$

$$Q = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow Q = \frac{4}{9}m_1 v_1^2$$

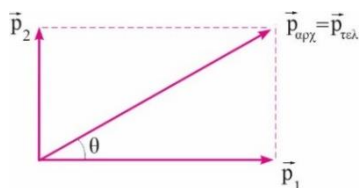
$$\pi\% = \frac{Q}{K_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{\frac{4}{9}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2} 100\% = \frac{\frac{4}{9}m_1 v_1^2}{\frac{13}{18}m_1 v_1^2} 100\% \Rightarrow \pi\% = \frac{800}{13}\%$$

1.B.81 α.

$$p_1 = m_1 v = 2m_2 v \Rightarrow p_1 = 2p_2$$

Από το διάγραμμα έχουμε

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = 0,5$$



1.B.82 i. α. ii. α.

i. Κάνουμε ανάλυση της ταχύτητας της Σ_2 πριν την κρούση. Στον άξονα x πριν την κρούση η ολική ορμή είναι

$$p_{\alpha\rho\chi,x} = m_1 v_1 - m_2 v_2 \sin 60^\circ \Rightarrow$$

$$p_{\alpha\rho\chi,x} = 2m_2 v_1 - \frac{m_2 4v_1}{2} \Rightarrow p_{\alpha\rho\chi,x} = 0$$

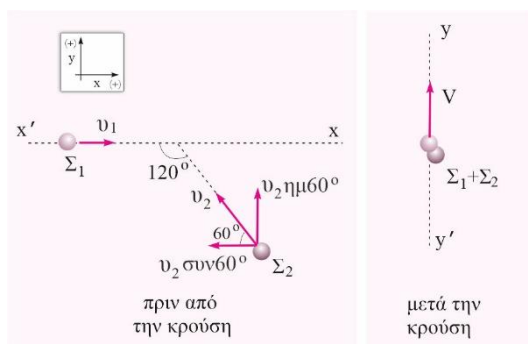
οπότε και $p_{\text{τελ},x} = 0$.

Άρα και η τελική ορμή στον άξονα x είναι ίση με μηδέν, κατά συνέπεια το συσσωμάτωμα θα κινηθεί πάνω στον άξονα y.

ii. Η ΑΔΟ στον άξονα y, δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi,y} = p_{\text{τελ},y} \Rightarrow m_2 v_2 \sin 60^\circ = (m_1 + m_2)V \Rightarrow m_2 v_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = (2m_2 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{6} v_2$$

Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση, είναι



$$K_{\sigma} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}(2m_2 + m_2)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}v_2\right)^2 = \frac{1}{2}3\frac{3}{36}m_2v_2^2 \Rightarrow K_{\sigma} = \frac{K_2}{4}$$

1.B.83 α.

Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας Σ_1 είναι

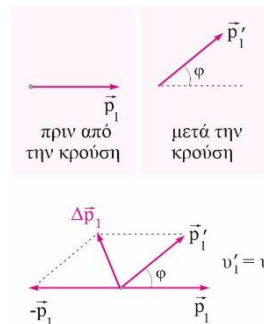
$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + (-\vec{p}_1)$$

Το μέτρο της Δp_1 είναι

$$|\Delta p_1| = \sqrt{p_{\alpha\rho\chi}^2 + p_{\tau\epsilon\lambda}^2 + 2p_{\alpha\rho\chi}p_{\tau\epsilon\lambda}\cos 120^\circ} = \sqrt{|\vec{p}_1'|^2 + |\vec{p}_1|^2 + 2|\vec{p}_1||\vec{p}_1|\cos 120^\circ} \Rightarrow |\Delta p_1| = |\vec{p}_1|'$$

Για τη μεταβολή της ορμής του κάθε σώματος ισχύει η σχέση $\Delta p_1 = -\Delta p_2$,

$$\text{Άρα, } |\Delta p_1| = |\Delta p_2| = |\vec{p}_1|.$$



1.B.84 β.

Επειδή το τοίχωμα είναι λείο δεν υπάρχει δύναμη στον άξονα y , οπότε η ΑΔΟ ισχύει στον άξονα αυτόν και η μείωση της κινητικής ενέργειας οφείλεται μόνο στις ανελαστικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στον άξονα x και οι οποίες μειώνουν το μέτρο της συνιστώσας v_x . Κάνουμε ανάλυση της ταχύτητας v , πριν την κρούση και της v' , μετά την κρούση.

Η ΑΔΟ στον άξονα y , δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi,y} = p_{\tau\epsilon\lambda,y} \Rightarrow mv_y = mv'_y \Rightarrow v_y = v'_y \quad (1)$$

$$\text{Για τη } v \text{ ισχύει } \eta_{\mu 30^\circ} = \frac{v_y}{v} \Rightarrow v = 2v_y \Rightarrow v_y = \frac{v}{2} \quad (2)$$

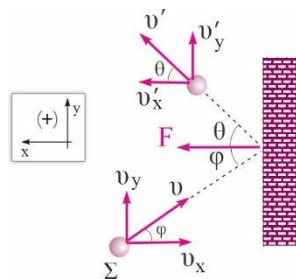
$$\text{Για τη } v' \text{ ισχύει } \eta_{\mu 45^\circ} = \frac{v'_y}{v'} \Rightarrow v' = \sqrt{2}v'_y \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει

$$v' = \sqrt{2}v'_y = \sqrt{2}v_y = \sqrt{2}\frac{v}{2} \Rightarrow v' = \frac{\sqrt{2}v}{2}$$

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας μετά την κρούση είναι

$$K' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\sqrt{2}v}{2}\right)^2 \Rightarrow K' = \frac{K}{2}$$



Γενικές ερωτήσεις στις κρούσεις

1.B.85 β.

Η ΑΔΟ ισχύει για όλη τη διάρκεια της κρούσης. Τη στιγμή που οι σφαίρες αποκτούν στιγμιαία ίδια ταχύτητα u , η ορμή του συστήματος είναι $m_1u + m_2u$, οπότε η ΑΔΟ δίνει

$$m_1u_1 = m_1u + m_2u \Rightarrow m_1u_1 = 2m_1u \Rightarrow u = \frac{u_1}{2}$$

Κατά τη διάρκεια μιας ελαστικής κρούσης η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται, καθώς μειώνεται η κινητική του ενέργεια και μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\max} \Rightarrow U_{\max} = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}m_1u^2 \Rightarrow$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}m_1\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 \Rightarrow U_{\max} = \frac{K}{2}$$

Η δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης τη στιγμή που οι σφαίρες αποκτούν στιγμιαία ίδια ταχύτητα είναι η μέγιστη, καθώς εκείνη τη στιγμή τα κέντρα μάζας των σωμάτων βρίσκονται στην ελάχιστη μεταξύ τους απόσταση.

1.B.86 β.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ παίρνουμε

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow 0 = p_A - p_B \Rightarrow p_A = p_B$$

Ισχύει $K_{\text{ολ}} = K_A + K_B$

$$\text{Όμως } K_A = \frac{1}{2}m_A u_A^2 = \frac{1}{2} \frac{m_A^2 u_A^2}{m_A} = \frac{p_A^2}{2m_A}, \quad K_B = \frac{p_B^2}{2m_B} = \frac{p_B^2}{4m_A} = \frac{K_A}{2}$$

$$\text{Άρα } K_{\text{ολ}} = K_A + \frac{K_A}{2} \Rightarrow K_A = \frac{2K_{\text{ολ}}}{3}$$

1.B.87 α.

Από το σχήμα (α): Πριν από την κρούση $v_1 = \Delta x / \Delta t = 2 \text{ m/s}$, Μετά την κρούση $v'_1 = \Delta x / \Delta t = -1 \text{ m/s}$

Από το σχήμα (β): Πριν από την κρούση $v_2 = 0 \text{ m/s}$, Μετά την κρούση $v'_2 = \Delta x / \Delta t = 1 \text{ m/s}$

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ έχουμε

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \quad \text{ή} \quad m_2 = 3 \text{ kg.}$$

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_1 + K_2 = 2 \text{ J}, \quad K_{\tau\epsilon\lambda} = K'_1 + K'_2 = 2 \text{ J}$$

Επομένως η κρούση είναι ελαστική.

1.B.88 α.

Από το διάγραμμα παίρνουμε τις τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών πριν και μετά την κρούση

$$u_1 = 3 \text{ m/s}, \quad u_2 = -1 \text{ m/s}, \quad u'_1 = 1 \text{ m/s}, \quad u'_2 = 5 \text{ m/s}$$

$$u_1 - u_2 = 4 \text{ m/s}, \quad u'_1 - u'_2 = -4 \text{ m/s}$$

Ισχύει $u_1 - u_2 = -(u_1' - u_2')$, άρα η κρούση είναι ελαστική.

Σύμφωνα με την ΑΔΟ

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_1' + m_2 u_2' \Rightarrow m_1 \cdot 3 \frac{m}{s} + m_2 \cdot \left(-1 \frac{m}{s}\right) = m_1 \cdot 1 \frac{m}{s} + m_2 \cdot 5 \frac{m}{s} \Rightarrow m_1 = 3m_2$$

1.B.89 γ.

Από το διάγραμμα παίρνουμε τις τιμές ταχυτήτων των σφαιρών πριν και μετά την κρούση.

$$u_1 = u, u_2 = -u, u_1' = -2u, u_2' = 0 \text{ m/s}$$

$$u_1 - u_2 = 2u, u_1' - u_2' = -2u$$

Ισχύει $u_1 - u_2 = -(u_1' - u_2')$, άρα η κρούση είναι ελαστική.

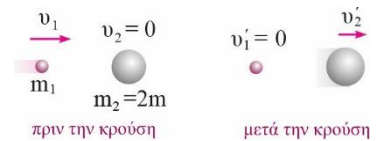
Σύμφωνα με την ΑΔΟ

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_1' + m_2 u_2' \Rightarrow m_1 \cdot u - m_2 \cdot u = -2m_1 \cdot u \Rightarrow m_2 = 3m_1.$$

1.B.90 α.

Εφόσον τα σώματα ανταλλάσσουν τις ορμές τους ισχύει

$$p_1' = p_2 = 0 \text{ και } p_2' = p_1 = mv_1$$



Σύμφωνα με την ΑΔΟ

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \Rightarrow mv_1 = 2mv_2' \Rightarrow v_2' = \frac{v_1}{2}$$

$$K_{αρχ} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0$$

$$K_{τελ} = K_1' + K_2' = 0 + \frac{1}{2}2m\left(\frac{v_1}{2}\right)^2 = \frac{K_{αρχ}}{2}$$

Αφού $K_{αρχ} > K_{τελ}$, η κρούση είναι ανελαστική.

1.B.91 α.

Σύμφωνα με την ΑΔΟ

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow p_1 + p_2 = p_{συσ} \Rightarrow m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) V_{\kappa} \Rightarrow V_{\kappa} = -1 \frac{m}{s}$$

$$Q = K_{αρχ} - K_{τελ} = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_{\kappa}^2 = 24 \text{ J}$$

1.B.92 β.

Οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την ελαστική μετωπική κρούση δίνονται από τις σχέσεις

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1) \quad , \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

Θέλουμε $m_1 \gg m_2$ ή $\frac{m_2}{m_1} \rightarrow 0$

Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή των παραπάνω σχέσεων με m_1 παίρνουμε

$$v_1' = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1 \Rightarrow v_1' \approx v_1 \quad , \quad v_2' = \frac{\frac{2m_1}{m_1} v_1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \Rightarrow v_2' \approx 2v_1$$

1.B.93 γ.

Οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την ελαστική μετωπική κρούση δίνονται από τις σχέσεις

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1) \quad , \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

Θέλουμε $m_1 \ll m_2$ ή $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$

Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή των παραπάνω σχέσεων με m_2 παίρνουμε

$$v_1' = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_1 \Rightarrow v_1' \approx -v_1 \quad , \quad v_2' = \frac{\frac{2m_1}{m_2} v_1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} \Rightarrow v_2' \approx 0$$

1.B.94 i. β. ii. α.

i. Η ταχύτητα της αρχικά ακίνητης σφαίρας μετά την κεντρική ελαστική κρούση δίνεται από τη σχέση

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1$$

Θέλουμε μέγιστη ταχύτητα, άρα θα πρέπει $\frac{m_2}{m_1} \rightarrow 0$ ή $m_1 \gg m_2$.

ii. Η μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να αποκτήσει το ακίνητο σώμα μάζας m_2 είναι όλη η κινητική ενέργεια του σώματος μάζας m_1 . Αυτό συμβαίνει όταν $m_1 = m_2$.

1.B.95 γ.

$$\Delta \vec{p}_{\text{ολ}} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$$

Όμως $\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2' - 0$. Άρα, για να γίνει το p_2' μέγιστο, πρέπει να γίνει μέγιστο το μέτρο της Δp_1 .

Η μέγιστη τιμή του μέτρου της Δp_1 είναι $-2p_1$ και συμβαίνει όταν κτυπά η σφαίρα μάζας m_1 σε ακίνητη σφαίρα πολύ μεγάλης μάζας και γυρίζει προς τα πίσω με ταχύτητα ίδιου μέτρου.

1.B.96 β.

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ_2 , δίνει την ταχύτητά του τη στιγμή της κρούσης

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\text{ελ}}} \Rightarrow K_{\text{τελ}} - 0 = U_{\text{ελ, αρχ}} - U_{\text{ελ, τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} k d^2 - 0 \Rightarrow v_2 = d \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

Μετά την κρούση αντιστρέφεται η ταχύτητα του Σ_2 , $v_2' = -v_2$, καθώς η νέα μετατόπιση είναι πάλι d και ισχύει το ίδιο ΘΜΚΕ. Άρα από τον τύπο της κεντρικής ελαστικής κρούσης έχουμε

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \Rightarrow -v_2 = \frac{2 \cdot 3m_2}{3m_2 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - 3m_2}{3m_2 + m_2} v_2 = \frac{3}{2} v_1 - \frac{1}{2} v_2 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} v_1 = -\frac{1}{2} v_2 \Rightarrow v_1 = -\frac{v_2}{3} \Rightarrow v_1 = -\frac{d}{3} \sqrt{\frac{k}{m_2}} \Rightarrow |v_1| = \frac{d}{3} \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

1.B.97 β.

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ , δίνει την ταχύτητά του τη στιγμή της κρούσης με τον τοίχο

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -T d \quad (1)$$

Η τριβή είναι ίδια για τις δύο κινήσεις και στις δύο κατευθύνσεις, $T = \mu N = \mu m g$.

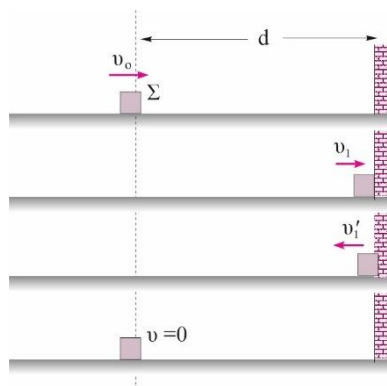
Κατά την ελαστική κρούση η ταχύτητα του σώματος διατηρεί το μέτρο της, αλλά αλλάζει φορά, $v_1' = -v_1$.

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ , μετά την κρούση με τον τοίχο, μέχρι να σταματήσει, δίνει

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m v_1'^2 = -T d \Rightarrow -\frac{1}{2} m v_1^2 = -T d \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση προκύπτει

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 = -2T d \Rightarrow v_0 = 2 \sqrt{\frac{T d}{m}} \Rightarrow v_0 = 2 \sqrt{\frac{\mu m g d}{m}} = 2 \sqrt{\mu g d}$$



1.B.98 γ.

Η τριβή είναι ίδια για τις δύο κινήσεις και στις δύο κατευθύνσεις, $T = \mu N = \mu m_1 g$.

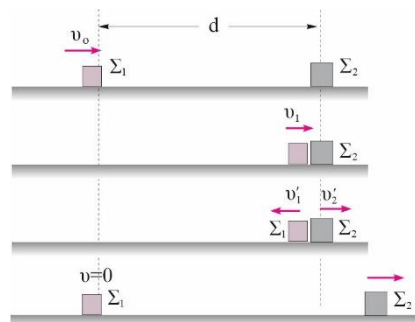
Το ΘΜΚΕ για την πρώτη κίνηση του Σ , μέχρι να φτάσει με ταχύτητα v_1 στην κρούση, δίνει

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -T d = -\mu m_1 g d \quad (1)$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_1' = \frac{m_1 - 4m_1}{m_1 + 4m_1} v_1 \Rightarrow v_1' = -\frac{3v_1}{5}$$

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του Σ_1 , μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει δίνει



$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = -Td \Rightarrow -\frac{1}{2} m_1 \left(-\frac{3v_1}{5} \right)^2 = -Td \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \frac{9}{25} m_1 v_1^2 = -Td \Rightarrow -\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = -\frac{25}{9} Td \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση προκύπτει

$$-\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = -\frac{34}{9} Td \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{68 \mu m_1 g d}{9 m_1}} \Rightarrow v_0 = \frac{2}{3} \sqrt{17 \mu g d}$$

1.B.99 γ.

Για την έκρηξη το σύστημα θεωρείται μονωμένο, άρα ισχύει η ΑΔΟ

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow 3m_2 v_1 = -m_2 v_2 \Rightarrow 3v_1 = -v_2$$

Η ενέργεια, Ε, που ελευθερώθηκε κατά την έκρηξη, είναι

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1}{3} (3v_1)^2 \Rightarrow E = 4K_1$$

1.B.100 β.

Για την έκρηξη το σύστημα θεωρείται μονωμένο, άρα ισχύει η ΑΔΟ

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow m_1 v_1 = -9m_1 v_2 \Rightarrow v_1 = -9v_2$$

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του σώματος Σ_1 , δίνει

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\text{ελ}}} = U_{\text{ελ,αρχ}} - U_{\text{ελ,τελ}} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 0 - \frac{1}{2} k_1 d^2 \Rightarrow k_1 = \frac{m_1 v_1^2}{d^2}$$

Το ΘΜΚΕ για την κίνηση του σώματος Σ_2 , δίνει

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_{F_{\text{ελ}}} = U_{\text{ελ,αρχ}} - U_{\text{ελ,τελ}} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 0 - \frac{1}{2} k_2 d^2 \Rightarrow$$

$$k_2 = \frac{m_2 v_2^2}{d^2} = \frac{9m_1 \left(\frac{v_1}{9} \right)^2}{d^2} = \frac{k_1}{9} \Rightarrow k_1 = 9k_2$$

