

Θέματα Β

5.B.1 α.

Η μέση ταχύτητα ισούται με το πηλίκο του μήκους της διαδρομής προς τον αντίστοιχο χρόνο

$$v_{\mu} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{A}{T/4} = \frac{4A}{2\pi/\omega} \Rightarrow v_{\mu} = \frac{2\omega A}{\pi}$$

5.B.2 α.

Η κλίση στο διάγραμμα δίνει το ω

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\pi \text{ rad} - \frac{\pi}{2} \text{ rad}}{6\text{s} - 0\text{s}} \Rightarrow \omega = \frac{\pi \text{ rad}}{12 \text{ s}}$$

5.B.3 β.

Το σώμα σε χρόνο μιας περιόδου διέρχεται δύο φορές από ακραία θέση. Άρα, αφού περνάει 16 φορές από ακραία θέση, έχουν περάσει 8 περίοδοι και έχει εκτελέσει 8 πλήρεις ταλαντώσεις. Η συχνότητα είναι

$$f = \frac{N}{t} = \frac{8}{4} \Rightarrow f = 2\text{Hz} \text{ και η περίοδος ισούται με } T = \frac{1}{f} = 0,5\text{s}.$$

5.B.4 β.

Η συχνότητα μηδενισμού της επιτάχυνσης f' είναι διπλάσια από τη συχνότητα της ταλάντωσης f , καθώς σε χρόνο μιας περιόδου γίνονται δύο μηδενισμοί της επιτάχυνσης, στη θέση ισορροπίας

$$f' = \frac{N'}{t} = \frac{2}{T} \Rightarrow f' = \frac{2}{1/f} = 2f \Rightarrow f = f'/2 = 4\text{Hz}$$

Η περίοδος ισούται με $T = \frac{1}{f} = 0,25\text{s}$ και έως τη στιγμή $t_1 = 0,5\text{s}$ έχουν περάσει 2 περίοδοι. Σε κάθε περίοδο το σώμα διανύει απόσταση ίση με $4A$ και σε δύο περιόδους διανύει απόσταση ίση με $8A$.

5.B.5 γ.

Για τις μέγιστες τιμές ταχυτήτων και επιταχύνσεων ισχύουν οι σχέσεις

$$a_{\max 1} = a_{\max 2} \Rightarrow \omega_1^2 A_1 = \omega_2^2 A_2 \quad (1)$$

$$v_{\max 1} = 4v_{\max 2} \Rightarrow \omega_1 A_1 = 4\omega_2 A_2 \quad (2)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{4} \Rightarrow 2\pi f_1 = \frac{2\pi f_2}{4} \Rightarrow f_2 = 4f_1$$

5.B.6

i. γ. ii. β.

i. Η κλίση στο διάγραμμα δίνει το ω για την ταλάντωση του κάθε σώματος:

$$\omega_1 = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi/3}{t_1}, \quad \omega_2 = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi/3 - \pi/2}{t_1} = \frac{\pi/6}{t_1}$$

$$\text{Άρα } \omega_1 = 4\omega_2 \Rightarrow f_1 = 4f_2$$

$$\text{ii. } v_{\max(1)} = \omega_1 A, \quad v_{\max(2)} = \omega_2 A$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = \frac{\omega_1 A}{\omega_2 A} = 4 \Rightarrow v_{\max(1)} = 4v_{\max(2)}$$

5.B.7 γ.

Α' τρόπος

Οι θέσεις των δύο σωμάτων δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_1 = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad x_2 = A\eta\mu\omega t$$

Για τη θέση συνάντησης έχουμε

$$x_1 = x_2 \Rightarrow A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\eta\mu\omega t \Rightarrow \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\omega t \Rightarrow$$

$$\omega t + \frac{\pi}{2} = \omega t + 2k\pi \quad (1) \quad \text{ή} \quad \omega t + \frac{\pi}{2} = \pi - \omega t + 2k\pi \quad (2)$$

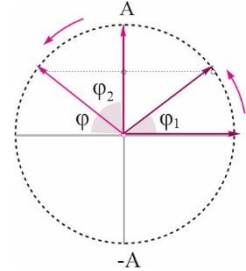
Η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.

Από τη (2) για την πρώτη φορά, $k=0$, έχουμε

$$\omega t + \frac{\pi}{2} = \pi - \omega t \Rightarrow 2\omega t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{T}{8}$$

Β' τρόπος

Χρησιμοποιούμε τον κύκλο αναφοράς όπου το περιστρεφόμενο διάνυσμα έχει μέτρο A . Το ένα σώμα που δεν έχει αρχική φάση ξεκινά από τη $\Theta.Ι.$ και το άλλο που έχει αρχική φάση, από το $\pi/2$ rad. Όταν συναντώνται, η προβολή των περιστρεφόμενων διανυσμάτων στον κατακόρυφο άξονα συμπίπτει. Από το σχήμα έχουμε



$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

$$\text{Επειδή } \varphi_2 + \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ άρα } \varphi = \pi/4 \text{ rad.}$$

$$\varphi = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{T} \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{8}$$

5.B.8 γ.

$$\text{Από το διάγραμμα έχουμε: } T_2 = 2T_1 \Rightarrow \omega_1 = 2\omega_2 \quad (1)$$

$$v_{\max 1} = 2v_{\max 2} \Rightarrow \omega_1 A_1 = 2\omega_2 A_2 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) είναι $A_1 = A_2 = A$, άρα

$$\alpha_{\max(1)} = \omega_1^2 A, \quad \alpha_{\max(2)} = \omega_2^2 A = \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 A \Rightarrow \alpha_{\max(2)} = \frac{\alpha_{\max(1)}}{4} \Rightarrow \alpha_{\max(1)} = 4\alpha_{\max(2)}$$

5.B.9 γ.

Από το διάγραμμα έχουμε $A_1 = 2A_2$ και

$$\alpha_{1\max} = \alpha_{2\max} \Rightarrow \omega_1^2 A_1 = \omega_2^2 A_2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{2} \omega_1$$

$$\frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = \frac{\omega_1 A_1}{\omega_2 A_2} = \frac{\omega_1 2A_2}{\sqrt{2}\omega_1 A_2} \Rightarrow \frac{v_{\max(1)}}{v_{\max(2)}} = \sqrt{2} \Rightarrow v_{\max(1)} = \sqrt{2}v_{\max(2)}$$

5.B.10 β.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $A_1 = A_2$ και από τη σχέση

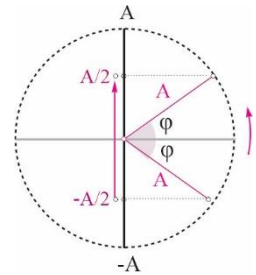
$$\alpha_{\max 1} = 4\alpha_{\max 2} \Rightarrow \omega_1^2 A_1 = 4\omega_2^2 A_2 \Rightarrow \omega_1 = 2\omega_2 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_1} = 2\frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow T_2 = 2T_1$$

5.B.11 α.

Χρησιμοποιούμε τον κύκλο αναφοράς όπου το περιστρεφόμενο διάνυσμα έχει μέτρο A . Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να περάσει το σώμα από τη θέση $-A/2$ στη θέση $A/2$ αντιστοιχεί σε γωνία 2ϕ όπου

$$\eta\mu\phi = \frac{A/2}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$2\phi = \omega\Delta t \Rightarrow 2\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{6}$$

**5.B.12 γ.**

$$\alpha = -\alpha_{\max} \eta\mu\omega t \Rightarrow \eta\mu\omega t = -\frac{\alpha}{\alpha_{\max}} \Rightarrow \eta\mu^2\omega t = \frac{\alpha^2}{\alpha_{\max}^2} \quad (1)$$

$$v = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega t = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega t = \frac{v^2}{v_{\max}^2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\eta\mu^2\omega t + \sigma\upsilon\nu^2\omega t = \frac{\alpha^2}{\alpha_{\max}^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\omega^4 A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\omega^2} + v^2 = \omega^2 A^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 = \omega^2 (v_{\max}^2 - v^2) \Rightarrow \alpha = \pm \omega \sqrt{v_{\max}^2 - v^2}$$

5.B.13 α.

Η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση και από την εξίσωση της απομάκρυνσης βρίσκουμε τη στιγμή t_1 που το σώμα θα φτάσει πρώτη φορά στη θέση $x=A/2$, με θετική ταχύτητα

$$x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow \frac{A}{2} = A\eta\mu\omega t_1 \Rightarrow \eta\mu\omega t_1 = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\omega t_1 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \omega t_1 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (2)$$

Για θετική ταχύτητα ($\sigma\upsilon\nu\phi > 0$), δεκτή η (1) και για $\kappa=0$

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 - 0 = \Delta t_1 = \frac{T}{12}$$

Στη θέση $x=A$ το σώμα φτάνει τη χρονική στιγμή $t_2=T/4$, άρα

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{T}{6}$$

$$\text{και } \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{\frac{T}{12}}{\frac{T}{6}} = 0,5.$$

5.B.14 α.

Αφού το σώμα έχει ταχύτητα θετική και κινείται προς τη Θ.Ι. βρίσκεται σε απομάκρυνση αρνητική.

Α' τρόπος

$$v_1 = v_{\max} \sin \omega t_1 \Rightarrow \frac{\omega A}{2} = \omega A \sin \omega t_1 \Rightarrow \sin \omega t_1 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\omega t_1 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \omega t_1 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

Για αρνητική απομάκρυνση ($\eta\mu\phi < 0$), δεκτή η (2) και για $\kappa=1$

$$\omega t_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega t_1 = \frac{5\pi}{3}$$

Άρα, η απομάκρυνση εκείνη τη στιγμή είναι

$$x = A\eta\mu\omega t_1 = A\eta\mu\frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = -A\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Β' τρόπος

$$\left\{ \begin{array}{l} x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow \eta\mu\omega t = \frac{x}{A} \Rightarrow \eta\mu^2\omega t = \frac{x^2}{A^2} \quad (1) \\ v = \omega A \sin \omega t \Rightarrow \sin \omega t = \frac{v}{\omega A} \Rightarrow \sin^2\omega t = \frac{v^2}{\omega^2 A^2} \quad (2) \end{array} \right\} \quad (1) + (2) : \eta\mu^2\omega t + \sin^2\omega t = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow$$

$$x^2 = A^2 - \frac{v^2}{\omega^2} \Rightarrow x = \pm \frac{A\sqrt{3}}{2}$$

Επειδή το σώμα βρίσκεται σε αρνητική απομάκρυνση, δεκτή λύση είναι η $x = -\frac{A\sqrt{3}}{2}$.

5.B.15 β.

Αφού το σώμα έχει ταχύτητα θετική και επιβραδύνεται, κινείται προς την ακραία θετική θέση και έχει απομάκρυνση θετική. Είναι

$$v_1 = v_{\max} \sin \omega t_1 \Rightarrow \pi f A = \omega A \sin \omega t_1 = 2\pi f A \sin \omega t_1 \Rightarrow \sin \omega t_1 = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\omega t_1 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \omega t_1 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

Για θετική απομάκρυνση ($\eta\mu\phi > 0$), δεκτή η (1) και για $\kappa=0$

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6}$$

Η χρονική στιγμή t_2 , που το σώμα θα έχει ταχύτητα $v_2 = 2\pi f A = \omega A = v_{\max}$ θα είναι η στιγμή που το σώμα θα περάσει από τη Θ.Ι. με θετική ταχύτητα, άρα είναι μετά από μια πλήρη ταλάντωση, σε μία περίοδο, δηλαδή $t_2 = T = 6t_1$.

5.B.16 γ.

Α' Τρόπος

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης υπολογίζουμε την απομάκρυνση τη στιγμή t_1

$$x_1 = A \eta\mu(\omega t_1 + \phi_0) = A \eta\mu\phi_1 = A \eta\mu \frac{4\pi}{3} \Rightarrow x = -A \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Επίσης υπολογίζουμε την ταχύτητα

$$v_1 = v_{\max} \sin(\omega t_1 + \phi_0) = v_{\max} \sin\phi_1 = v_{\max} \sin \frac{4\pi}{3} \Rightarrow v_1 = -\frac{v_{\max}}{2}$$

Αφού το σώμα τη στιγμή t_1 έχει απομάκρυνση και ταχύτητα αρνητική, κινείται προς την ακραία αρνητική θέση και μετά από ένα τέταρτο της περιόδου θα κινείται πάλι στα αρνητικά, αλλά με θετική ταχύτητα προς τη Θ.Ι. και θα επιταχύνεται.

Β' Τρόπος

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\phi = \omega\Delta t \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} \Rightarrow \phi_2 = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

$$v_2 = v_{\max} \sin(\omega t_2 + \phi_0) = v_{\max} \sin\phi_2 = v_{\max} \sin \frac{11\pi}{6} \Rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{\max}$$

$$\alpha_2 = -\alpha_{\max} \eta\mu(\omega t_2 + \phi_0) = -\alpha_{\max} \eta\mu\phi_2 = -\alpha_{\max} \eta\mu \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\alpha_{\max}}{2}$$

Εφόσον η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι και οι δύο θετικές, άρα ομόρροπες, η κίνηση του σώματος εκείνη τη στιγμή είναι επιταχυνόμενη.

5.B.17 α.

Από την κλίση του διαγράμματος υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{3\pi - \frac{\pi}{2}}{2t_1 - 0} \Rightarrow \omega = \frac{5\pi}{4t_1}$$

Άρα, η επιτάχυνση τη στιγμή t_1 είναι

$$\alpha_1 = -\alpha_{\max} \eta\mu\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega^2 A \eta\mu\left(\frac{5\pi}{4t_1} t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega^2 A \eta\mu\frac{7\pi}{4} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega^2 A$$

5.B.18 α.

Τη στιγμή $t_1=0s$ το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. άρα έχει μέγιστη ταχύτητα $v_1=v_{\max}$.

Τη στιγμή $t_2=T/3$ η ταχύτητά του είναι

$$v_2 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\omega t_2 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi T}{T} \frac{1}{3} = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Rightarrow v_2 = -\frac{v_{\max}}{2}$$

Άρα, η μεταβολή στην ορμή του είναι

$$\Delta p = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 = -m\frac{v_{\max}}{2} - mv_{\max} \Rightarrow \Delta p = -\frac{3}{2}mv_{\max}$$

5.B.19 γ.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $T_1=2T_2$ και $\alpha_{\max 1}=2\alpha_{\max 2}$. Άρα

$$T_1 = 2T_2 \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow \omega_2 = 2\omega_1$$

$$\alpha_{\max 1} = 2\alpha_{\max 2} \Rightarrow \omega_1^2 A_1 = 2(2\omega_1)^2 A_2 \Rightarrow A_1 = 8A_2$$

Και για τις μέγιστες ταχύτητες είναι

$$v_{\max,1} = \omega_1 A_1 = \frac{\omega_2}{2} 8A_2 \Rightarrow v_{\max,1} = 4v_{\max,2}$$

5.B.20 β.

Από την κλίση του διαγράμματος υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{0,8 - 0} \Rightarrow \omega = 2,5\pi \text{ rad/s}$$

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης υπολογίζουμε την απομάκρυνση τη στιγμή $t=0,6\text{s}$

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\eta\mu\left(2,5\pi \cdot 0,6 + \frac{\pi}{2}\right) = A\eta\mu 2\pi \Rightarrow x = 0\text{m}$$

5.B.21 β.

$$v = \omega x \Rightarrow v_{\max} \sin\omega t = \omega A\eta\mu\omega t \Rightarrow \sin\omega t = \eta\mu\omega t \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega t = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\omega t = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\kappa=1} t_2 = \frac{5T}{8}$$

5.B.22 γ.

Τη χρονική στιγμή $t_1=13/3f$, η επιτάχυνση του σώματος ισούται με

$$\alpha_1 = -\alpha_{\max}\eta\mu\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega^2 A\eta\mu\left(2\pi f \frac{13}{3f} + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega v_{\max}\eta\mu\frac{55\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = -2\pi f v_{\max}\eta\mu\left(\frac{48\pi}{6} + \frac{7\pi}{6}\right) = -2\pi f v_{\max}\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \alpha_1 = \pi f v_{\max}$$

5.B.23 α.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν το ίδιο πρόσημο για 1^η φορά όταν το σώμα κατευθύνεται από την ακραία θετική θέση προς τη θέση ισορροπίας, δηλαδή βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο του κύκλου αναφοράς.

$$\frac{v}{\alpha} = \frac{v_{\max}}{\alpha_{\max}} \Rightarrow \frac{v_{\max}\sin\omega t}{-\alpha_{\max}\eta\mu\omega t} = \frac{v_{\max}}{\alpha_{\max}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega t = -1 = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\omega t = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t = \kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{\kappa=0} t = \frac{3T}{8}$$

5.B.24 γ.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $T_1=1,5T_2$ και $A_2=2A_1$. Άρα

$$T_1 = 1,5T_2 \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_1} = 1,5 \frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow \omega_2 = 1,5\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{2}{3}\omega_2$$

και για τις μέγιστες επιταχύνσεις είναι

$$\alpha_{\max,1} = \omega_1^2 A_1 = \left(\frac{2}{3}\omega_2\right)^2 \frac{A_2}{2} = \frac{4}{9}\omega_2^2 \frac{A_2}{2} \Rightarrow \alpha_{\max,1} = \frac{2}{9}\alpha_{\max,2} \Rightarrow \alpha_{\max,2} = 4,5\alpha_{\max,1}$$

5.B.25 γ.

Από την κλίση των δύο διαγραμμάτων υπολογίζουμε τις γωνιακές συχνότητες των δύο ταλαντώσεων:

$$\omega_1 = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \pi \text{ rad/s} \quad \omega_2 = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

Για τις μέγιστες τιμές των ταχυτήτων ισχύει

$$v_{\max,1} = \omega_1 A_1 = 2\omega_2 A_2 \Rightarrow v_{\max,1} = 4v_{\max,2}$$

5.B.26 β.

Έστω ότι υπάρχει αρχική φάση ϕ_0 και η φάση της ταλάντωσης είναι $\phi = \omega t + \phi_0$. Είναι

$$x = A\eta\mu\phi \Rightarrow \eta\mu\phi = \frac{x}{A} \Rightarrow \eta\mu^2\phi = \frac{x^2}{A^2} \quad (1)$$

$$v = v_{\max}\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\phi = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\phi = \frac{v^2}{v_{\max}^2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\eta\mu^2\phi + \sigma\upsilon\nu^2\phi = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \quad (3)$$

Από τη σύγκριση της σχέσης (3) με τη δοθείσα

$$x^2 + \frac{v^2}{4} = 4, \text{ προκύπτει:}$$

$$\omega^2 = 4 \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s} \quad \text{και} \quad A^2 = 4 \Rightarrow A = 2 \text{ m} \quad \text{και}$$

$$v_{\max} = \omega A = 4 \text{ m/s}$$

5.B.27 α.

Σε κάθε περίοδο το σώμα διανύει απόσταση ίση με $4A$ και σε τρεις περιόδους διανύει απόσταση ίση με $12A$. Όταν το σώμα διανύσει το υπόλοιπο $1,5A$, θα βρεθεί από τη θέση ισορροπίας στη θέση $x=A/2$ με αρνητική ταχύτητα. Η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση και από την εξίσωση της απομάκρυνσης βρίσκουμε το χρονικό διάστημα t_2 που το σώμα θα φτάσει μετά τις 3 πρώτες ταλαντώσεις για πρώτη φορά στη θέση $x=A/2$, με αρνητική ταχύτητα

$$x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow \frac{A}{2} = A\eta\mu\omega t_2 \Rightarrow \eta\mu\omega t_2 = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\omega t_2 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \omega t_2 = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (2)$$

Για αρνητική ταχύτητα (συνφ<0), δεκτή η (2) και για $\kappa=0$

$$\omega t_2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{5T}{12}$$

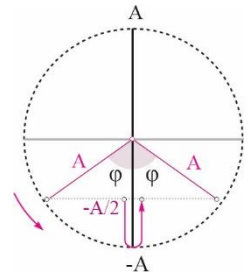
$$\text{Άρα ο συνολικός χρόνος είναι } t_{\text{ολ}} = t_1 + t_2 = 3T + \frac{5T}{12} = \frac{41T}{12}.$$

5.B.28 γ.

Χρησιμοποιούμε τον κύκλο αναφοράς όπου το περιστρεφόμενο διάνυσμα έχει μέτρο A . Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να περάσει το σώμα δύο φορές από τη θέση $x = -A/2$, αντιστοιχεί σε γωνία 2ϕ όπου

$$\text{συν}\phi = \frac{A/2}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$2\phi = \omega\Delta t \Rightarrow 2\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T}\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{3}$$



5.B.29 β.

Αφού το σώμα ξεκινάει τη στιγμή $t=0s$ από την ακραία θετική θέση, η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\pi/2$ rad.

Η στιγμή t_1 που το σώμα έχει για 2^η φορά ταχύτητα $v=-v_{\text{max}}$ είναι όταν το σώμα θα περάσει για 2^η φορά από τη Θ.Ι. με αρνητική ταχύτητα, άρα $t_1=T+T/4=5T/4$.

Η στιγμή $t_2=4t_1/3$ ισούται με

$$t_2 = \frac{4t_1}{3} = \frac{4 \cdot \frac{5T}{4}}{3} = \frac{5T}{3}$$

και ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας, δηλαδή η επιτάχυνση εκείνη τη στιγμή είναι

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \alpha_2 = -\alpha_{\max} \eta \mu \left(\omega t_2 + \frac{\pi}{2} \right) = -\omega^2 A \eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} \frac{5T}{3} + \frac{\pi}{2} \right) = -\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A \eta \mu \frac{23\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\alpha_2 = -\frac{4\pi^2}{T^2} A \eta \mu \left(\frac{12\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} \right) \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2\pi^2}{T^2} A$$

5.B.30 α.

Σε κάθε περίοδο το σώμα διανύει απόσταση ίση με $4A$ και για να διανύσει απόσταση $s=7A$ απαιτείται χρόνος ίσος με $t=T+3T/4=7T/4$, καθώς τη στιγμή $t=0s$ ξεκινάει από τη θέση ισορροπίας.

Η επιτάχυνση εκείνη τη στιγμή είναι

$$\alpha = -\alpha_{\max} \eta \mu \omega t = -\omega^2 A \eta \mu \frac{2\pi}{T} \frac{7T}{4} = -\omega^2 A \eta \mu \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \omega^2 A = \omega^2 \frac{s}{7}$$

5.B.31 β.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $3T_2/2=2T_1$ και $A_1=2A_2$. Άρα

$$2T_1 = 3T_2 / 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{\omega_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{3}{4} \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{4}{3} \omega_2$$

Και για τις μέγιστες ταχύτητες είναι

$$v_{\max 1} = \omega_1 A_1 = \frac{4}{3} \omega_2 2A_2 = \frac{8}{3} \omega_2 A_2 \Rightarrow v_{\max 1} = \frac{8}{3} v_{\max 2}$$

5.B.32 β.

Αφού το σώμα τη χρονική στιγμή $t=T/3$ βρίσκεται στη θέση $x=-A/2$ και επιβραδύνεται, κινείται προς την ακραία αρνητική θέση, οπότε έχει ταχύτητα αρνητική, δηλαδή βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο του κύκλου αναφοράς. Έστω ότι ϕ_0 η αρχική φάση της ταλάντωσης. Είναι

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow -\frac{A}{2} = A \eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{3} + \phi_0 \right) \Rightarrow \eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{3} + \phi_0 \right) = -\frac{1}{2} = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{3} + \phi_0 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \frac{2\pi}{3} + \phi_0 = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (2)$$

Για αρνητική ταχύτητα (συνφ<0), δεκτή η (2) και για κ=0

$$\frac{2\pi}{3} + \varphi_0 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

5.B.33 i. γ. ii. β.

i. Από τις περιόδους των ταλαντώσεων υπολογίζουμε τις γωνιακές συχνότητες

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \pi \text{ rad/s} \quad \text{και} \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

Από το διάγραμμα και από τη σχέση $\phi_1 = 1,5\phi_2$ προκύπτει για τη χρονική στιγμή t_1

$$\begin{aligned} \phi_1 = 1,5\phi_2 &\Rightarrow \omega_1 t_1 = 1,5 \left(\omega_2 t_1 + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \pi t_1 = 1,5 \left(\frac{\pi}{2} t_1 + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \\ t_1 = \frac{1,5}{2} t_1 + \frac{1,5}{2} &\Rightarrow \frac{t_1}{4} = \frac{1,5}{2} \Rightarrow t_1 = 3 \text{ s} \end{aligned}$$

ii. Οι ταχύτητες v_1, v_2 των δύο σωμάτων τη στιγμή t_1 , αν το πλάτος των ταλαντώσεων είναι A, είναι

$$v_1 = v_{\max,1} \sin \omega_1 t_1 = \omega_1 A \sin 3\pi \Rightarrow v_1 = -\pi A$$

$$v_2 = v_{\max,2} \sin \left(\omega_2 t_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \omega_2 A \sin \left(3 \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow v_2 = \frac{\pi}{2} A$$

και ο λόγος των ταχυτήτων v_1/v_2 είναι ίσος με

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{-\pi A}{\frac{\pi}{2} A} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = -2$$

5.B.34 β.

Αφού το σώμα τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται σε θετική θέση και απομακρύνεται από τη Θ.Ι. έχει ταχύτητα θετική, δηλαδή βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο του κύκλου αναφοράς. Είναι

$$\begin{aligned} x = A \eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) &\Rightarrow \frac{A\sqrt{3}}{2} = A \eta \mu \left(2\pi f t_1 + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \eta \mu \left(2\pi f t_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta \mu \frac{\pi}{3} \Rightarrow \\ 2\pi f t_1 + \frac{\pi}{2} &= 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1) \quad \text{ή} \quad 2\pi f t_1 + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (2) \end{aligned}$$

Για θετική ταχύτητα (συνφ>0), δεκτή η (1) και για κ=1

$$2\pi f t_1 + \frac{\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2f t_1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{3} \Rightarrow 2f t_1 = \frac{11}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{11}{12f}$$

5.B.35 β.

Η απομάκρυνση του σώματος τη στιγμή t_1 είναι

$$\alpha_1 = -\omega^2 x_1 \Rightarrow -2\pi^2 f^2 A\sqrt{3} = -4\pi^2 f^2 x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{A\sqrt{3}}{2}$$

Την πρώτη φορά που βρίσκεται στη θετική θέση x_1 το σώμα έχει ταχύτητα θετική. Είναι

$$x_1 = A\eta\mu\omega t_1 \Rightarrow \frac{A\sqrt{3}}{2} = A\eta\mu\omega t_1 \Rightarrow \eta\mu\omega t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\omega t_1 = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \omega t_1 = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \quad (2)$$

Για θετική ταχύτητα (συνφ>0), δεκτή η (1) και για $\kappa=0$ είναι $\omega t_1 = \frac{\pi}{3}$.

Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα είναι στη θέση ισορροπίας, άρα η ταχύτητα είναι μέγιστη, $v_0=v_{\max}$.

Τη χρονική στιγμή t_1 η ταχύτητα είναι

$$v_1 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\omega t_1 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Rightarrow v_1 = \frac{v_{\max}}{2}$$

Το ποσοστό μεταβολής της ορμής είναι

$$\pi\% = \frac{p_1 - p_0}{p_0} 100\% = \frac{mv_1 - mv_0}{mv_0} 100\% = \frac{\frac{v_{\max}}{2} - v_{\max}}{v_{\max}} 100\% \Rightarrow \pi\% = -50\%$$

5.B.36 γ.

Η απομάκρυνση του σώματος τη στιγμή t_1 είναι

$$\alpha_1 = -\omega^2 x_1 \Rightarrow \frac{\omega^2 A}{2} = -\omega^2 x_1 \Rightarrow x_1 = -\frac{A}{2}$$

οπότε βρισκόμαστε στο 3° ή 4° τεταρτημόριο του κύκλου αναφοράς, επειδή θέλουμε για 1° φορά θα κρατήσουμε τη λύση του 3° τεταρτημόριου.

Την πρώτη φορά που βρίσκεται στην αρνητική θέση x_1 το σώμα έχει ταχύτητα αρνητική. Είναι

$$x_1 = A\eta\mu\omega t_1 \Rightarrow -\frac{A}{2} = A\eta\mu\omega t_1 \Rightarrow \eta\mu\omega t_1 = -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\omega t_1 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \omega t_1 = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (2)$$

Για αρνητική ταχύτητα (συνφ<0), δεκτή η (2) και για κ=0 είναι

$$\omega t_1 = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{7\pi}{6\omega}$$

Τη στιγμή $t_2=2t_1$, ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του σώματος, δηλαδή η ταχύτητα είναι ίση με

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = v_2 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\omega t_2 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\omega 2\frac{7\pi}{6\omega} = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{3} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = v_{\max} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{v_{\max}}{2}$$