

Θέματα Γ

5.Γ.1

$$\alpha. v_{\max} = \omega A = 0,72\pi \text{ m/s}$$

$$\beta. a_{\max} = \omega^2 A = 12,96\pi^2 \text{ m/s}^2$$

$$\gamma. T = \frac{2\pi}{\omega} = 1/9 \text{ s}$$

$$\delta. d = 2A = 8\text{cm}$$

$$\epsilon. \varphi = \omega t = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

5.Γ.2

$$\alpha. v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{40\text{m/s}}{10\pi\text{rad/s}} \Rightarrow A = \frac{4}{\pi} \text{ m}$$

$\beta.$ Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = \frac{4}{\pi} \cdot \eta\mu\left(10\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ έχουμε

$$x = \frac{4}{\pi} \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} \text{ (SI)} = \frac{4}{\pi} \text{ m}$$

$$\gamma. a_{\max} = \omega^2 A = (10\pi\text{rad/s})^2 \cdot \frac{4}{\pi} \text{ m} \Rightarrow a_{\max} = 400\pi \text{ m/s}^2$$

$$\delta. a = -\omega^2 A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = -100\pi^2 \cdot \frac{4}{\pi} \eta\mu\left(10\pi \frac{1}{20} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)} \Rightarrow$$

$$a = 100\pi^2 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \eta\mu\pi \text{ (SI)} \Rightarrow a = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

5.Γ.3

$$\alpha. a_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow A = \frac{a_{\max}}{\omega^2} = \frac{7,2\text{m/s}^2}{(6\text{rad/s})^2} \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

$$\beta. a = -\omega^2 x = -(6\text{rad/s})^2 \cdot 0,05\text{m} \Rightarrow a = -1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$\gamma.$ Η εξίσωση ταχύτητας είναι

$$v = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow v = 1,2 \cdot \sigma\upsilon\nu 6t \text{ (S.I.)}$$

Τη στιγμή $t=0\text{s}$, $v=1,2 \text{ m/s}$.

$\delta.$ Το σώμα ξεκινά τη στιγμή $t=0\text{s}$ από τη Θ.Ι. και η ταχύτητά του μηδενίζεται για πρώτη φορά όταν αυτό φτάσει στην ακραία θέση της ταλάντωσης $+A$ μετά από χρόνο $\Delta t=T/4$

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{12} \text{ s}$$

5.Γ.4

$$\alpha. \ v = \omega A \cdot \sin \omega t = 40\pi \cdot 16 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 40\pi t \text{ (S.I.)}$$

Η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ είναι

$$v = 40\pi \cdot 16 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 0 \text{ (SI)} \Rightarrow v = 6,4\pi \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\beta. \ \alpha_{\max} = \omega^2 A = (40\pi \text{ rad/s})^2 \cdot 16 \cdot 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow \alpha_{\max} = 256\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\gamma. \ |\alpha| < 64\pi^2 \Rightarrow \omega^2 |x| < 64\pi^2 \Rightarrow |x| < 4\text{cm}, \ -4\text{cm} < x < 4\text{cm}$$

δ. Η φάση της ταλάντωσης τη στιγμή t είναι

$$\varphi = \omega t = 40\pi \frac{5}{48} \text{ rad} \Rightarrow \varphi = \frac{25\pi}{6} \text{ rad} = \left(4\pi + \frac{\pi}{6} \right) \text{ rad}$$

Άρα το σώμα εκτέλεσε 2 πλήρεις ταλαντώσεις (σε κάθε ταλάντωση η φάση αυξάνεται κατά $2\pi \text{ rad}$ και το σώμα έχει διανύσει διάστημα 4A) και βρίσκεται σε θέση η οποία θα βρεθεί από την εξίσωση απομάκρυνσης

$$x = A \eta \mu \omega t = A \eta \mu \frac{\pi}{6} = \frac{A}{2}$$

Το διάστημα που διένυσε το σώμα μέχρι τη χρονική στιγμή $t = \frac{5}{48} \text{ s}$ είναι

$$d = 4A + 4A + A/2 = 17A/2 \quad \text{ή} \quad d = 1,36\text{m}$$

5.Γ.5

$$\alpha. \ A = 0,1\text{m}, \ \omega = 20\text{rad/s}, \ T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,1\pi\text{s}$$

$$\beta. \ v_{\max} = \omega A = 2\text{m/s}$$

$$\gamma. \ v = \omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v = 2 \sin\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ S.I.}$$

$$\alpha = -\omega^2 A \eta \mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha = -40\eta \mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\delta. x = 0,1\eta\mu\left(20 \cdot \frac{2 \cdot 0,1\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \text{m} = 0,1\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \text{m} \Rightarrow$$

$$x = 0,1\eta\mu\frac{11\pi}{6} \text{m} \Rightarrow x = -0,05\text{m}$$

5.Γ.6

α. Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=+A$, επομένως η αρχική του φάση είναι $\phi_0=\pi/2$ rad και η εξίσωση απομάκρυνσης είναι

$$x = A \eta\mu(\omega t + \phi_0) \text{ με } A=0,2\text{m},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

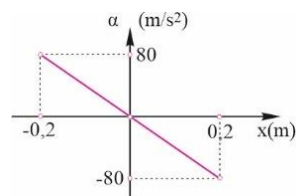
$$\text{Επομένως } x = 0,2\eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\beta. \alpha = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \alpha = -(20)^2 \cdot 0,2\eta\mu\left(20 \cdot 0,35\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)} \Rightarrow$$

$$\alpha = -80\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\gamma. \alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \alpha = -400x \text{ (S.I.)}, \quad -0,2\text{m} \leq x \leq 0,2\text{m}$$

και το διάγραμμα δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



δ. Η ταχύτητα του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$v = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow v = 4\sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$2 = 4\sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Υπάρχουν δύο λύσεις:

$$2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} = 20t + \frac{\pi}{2} \quad (1) \quad , \quad 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} = 20t + \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Η 1^η φορά δίνεται για $\kappa=1$ από τη σχέση (2) και η δεύτερη φορά για $\kappa=1$ από τη σχέση (1)

$$2\pi + \frac{\pi}{3} = 20t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{7\pi}{3} = 20t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{11\pi}{120} \text{s}$$

5.Γ.7

α. Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$\alpha = \kappa \cdot x \Rightarrow 200\pi^2 = \kappa \cdot (-0,5) \Rightarrow \kappa = -400\pi^2 \frac{1}{s^2}$$

β. Το πλάτος της ταλάντωσης από το διάγραμμα προκύπτει ίσο με 0,5m.

γ. Σε μία απλή αρμονική ταλάντωση η απομάκρυνση και η επιτάχυνση συνδέονται με τη σχέση

$$\alpha = -\omega^2 x, \text{ οπότε } -\omega^2 = -400\pi^2 \Rightarrow \omega = 20\pi \text{ rad/s}$$

Επομένως η συχνότητα είναι $f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = 10\text{Hz}$.

Σε κάθε περίοδο η ταχύτητα μηδενίζεται δύο φορές, άρα η συχνότητα μηδενισμού της ταχύτητας είναι 20Hz.

δ. Το πλάτος της ταχύτητας του σώματος είναι

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = 20\pi \frac{\text{rad}}{s} \cdot 0,5\text{m} \Rightarrow v_{\max} = 10\pi \text{ m/s}$$

Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση.

$$x = A\eta\mu\omega t$$

$$v = \omega A \sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \frac{v}{\omega} = A \sigma\upsilon\nu\omega t$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x_1^2} = \pm \omega \sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2} \Rightarrow v = \pm \omega A \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\pi \frac{\text{rad}}{s} \cdot 0,5\text{m} \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$v = \pm 5\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{s}$$

Επειδή το σώμα κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας βρισκόμαστε στο 2^ο τεταρτημόριο, η ταχύτητα είναι αρνητική, άρα $v = -5\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{s}$.

5.Γ.8

α. Επειδή το σώμα τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, δεν έχουμε αρχική φάση.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 4\text{rad/s}, \quad x = 0,4\eta\mu 4t \quad (\text{S.I.})$$

β. Χρησιμοποιούμε τον κύκλο αναφοράς για να εντοπίσουμε τις δύο διελεύσεις. Η μετατόπιση είναι από το 2^ο τεταρτημόριο στο 3^ο.

$$x = 0,4\eta\mu 4t \quad (\text{S.I.})$$

$$0,2 = 0,4\eta\mu 4t \Rightarrow \eta\mu 4t = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 4t_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 4t_1 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow t_1 = \frac{5\pi}{24}\text{s} \end{cases}$$

$$-0,2 = 0,4\eta\mu 4t \Rightarrow \eta\mu 4t = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} 4t_2 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 4t_2 = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow t_2 = \frac{7\pi}{24}\text{s} \end{cases}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\pi}{12}\text{s}$$

$$\gamma. \quad p = mv \quad (1)$$

Θα βρούμε την ταχύτητα του σώματος όταν αυτό διέρχεται από τη θέση $x = -0,2\text{m}$.

Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση

$$x = A\eta\mu\omega t$$

$$v = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \frac{v}{\omega} = A\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$v = \pm 4\sqrt{0,4^2 - 0,2^2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = \pm 0,8\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

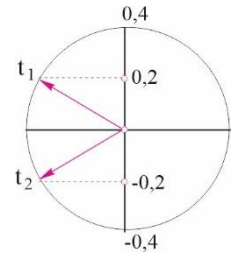
$$p = mv = \pm 0,08\sqrt{3} \text{ kgm/s}$$

$$\delta. \quad \alpha = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \alpha = -3,2\text{m/s}^2$$

5.Γ.9

α. Επειδή το σώμα τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, δεν έχουμε αρχική φάση και η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι

$$x = 0,2\eta\mu 6\pi t \quad (\text{S.I.})$$



$$\beta. v_{\max} = \omega A = 1,2\pi \text{ m/s}, T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3} \text{ s}$$

Συμβαίνει όταν περνά από τη θέση ισορροπίας για 1^η φορά, δηλαδή μετά από $\Delta t = T/2$ ή $\Delta t = 1/6 \text{ s}$.

$$\gamma. \alpha_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow \alpha_{\max} = 7,2\pi^2 \text{ m/s}^2$$

Συμβαίνει όταν περνά από ακραία θέση για 1^η φορά, δηλαδή μετά από $\Delta t = T/4$ ή $\Delta t = 1/12 \text{ s}$.

δ. Η αντικατάσταση της χρονικής στιγμής t_1 στην εξίσωση της απομάκρυνσης -χρόνου δίνει

$$x = 0,2 \eta \mu 6\pi \frac{5}{12} \text{ m} = 0,2 \eta \mu \frac{30\pi}{12} \text{ m} \Rightarrow x = 0,2 \eta \mu \left(\frac{24\pi}{12} + \frac{6\pi}{12} \right) \text{ m} \Rightarrow$$

$$x = 0,2 \eta \mu \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \text{ m}$$

Η φάση της ταλάντωσης είναι $(2\pi + \pi/2) \text{ rad}$. Δηλαδή το σώμα έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση και το $\frac{1}{4}$ της ταλάντωσης, δηλαδή βρίσκεται στη θέση $x = +A$. Άρα

$$\Delta s = 4A + A = 5A \quad \text{ή} \quad \Delta s = 1 \text{ m}.$$

5.Γ.10

$$\alpha. \alpha_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\alpha_{\max}}{A}} = \sqrt{\frac{5 \text{ m/s}^2}{0,2 \text{ m}}} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

$$\beta. x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow 0,1\sqrt{3} \text{ m} = 0,2 \eta \mu \left(\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{6} + \varphi_0 \right) \text{ m} \Rightarrow \eta \mu \frac{\pi}{3} = \eta \mu \left(\frac{\pi}{3} + \varphi_0 \right)$$

Επειδή το σώμα διέρχεται από τη θέση x για 1^η φορά με θετική ταχύτητα,

$$\frac{\pi}{3} + 2\kappa\pi = \frac{\pi}{3} + \varphi_0 \quad \text{με } \kappa=0, \text{ επομένως } \varphi_0=0 \text{ rad}.$$

γ. Η εξίσωση της φάσης είναι

$$\varphi = \omega t \Rightarrow \varphi = 5t \quad (\text{S.I.})$$

$$\delta. \alpha = -\omega^2 x \quad (1)$$

Θα βρούμε σε ποια απομάκρυνση x το σώμα έχει την ταχύτητα αυτή.

Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση.

$$x = A \eta \mu \omega t$$

$$v = \omega A \sigma \upsilon \nu \omega t \Rightarrow \frac{v}{\omega} = A \sigma \upsilon \nu \omega t$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{A^2 - \frac{v^2}{\omega^2}} \Rightarrow x = \pm 0,1\text{m}$$

Δεκτή είναι η αρνητική απομάκρυνση, αφού το σώμα κατευθύνεται προς τη Θ.Ι. , $x = -0,1\text{m}$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε $\alpha = 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

5.Γ.11

α. Το σώμα τη στιγμή $t=0\text{s}$ έχει μηδενική ταχύτητα άρα βρίσκεται σε μια από τις δύο ακραίες θέσεις της ταλάντωσής του. Επειδή η επιτάχυνση είναι αρνητική, βρίσκεται στη θέση $+A$ και η αρχική του φάση είναι $\phi_0 = \pi/2 \text{ rad}$.

$$\beta. v = v_{\max} = 1,2\text{m/s}, v_{\max} = \omega A \quad \text{ή} \quad 1,2 = \omega A \quad (1)$$

$$a_{\max} = \omega^2 A \quad \text{ή} \quad 7,2 = \omega^2 A \quad (2)$$

Από τις (1), (2) έχουμε: $\omega = 6\text{rad/s}$, $A = 0,2\text{m}$.

$$\gamma. x = 0,2\eta\mu\left(6t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ S.I}$$

$$\delta. \alpha = -\omega^2 x = -36(-0,1)\text{m/s}^2 \Rightarrow \alpha = 3,6\text{m/s}^2$$

Αφού το σώμα έχει $x < 0$ και απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας έχει $v < 0$.

Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση.

$$x = A\eta\mu\omega t$$

$$v = \omega A\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \frac{v}{\omega} = A\sigma\upsilon\nu\omega t$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \pm 0,6\sqrt{3}\text{m/s}$$

$$\text{Άρα } v = -0,6\sqrt{3}\text{m/s}.$$

5.Γ.12

$$\alpha. \Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}\text{s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \text{ rad/s}$$

Αφού την $t=0\text{s}$, $v=v_{\max}$ άρα $\phi_0=0 \text{ rad}$.

β. Η ταχύτητα μηδενίζεται για 1^η φορά μετά από

$$t_1=T/4=\pi/20\text{s}$$

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = 0,5\text{m}$$

$$\gamma. x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow -0,5 = 0,5\eta\mu\omega t \Rightarrow -1 = \eta\mu\omega t \Rightarrow$$

$$\eta\mu\frac{3\pi}{2} = \eta\mu 10t \Rightarrow \frac{3\pi}{2} + 2k\pi = 10t \xrightarrow{k=0} t_2 = \frac{3\pi}{20}\text{s}$$

δ. Η επιτάχυνση γίνεται θετική με μέγιστο μέτρο όταν το σώμα βρίσκεται στην ακραία αρνητική απομάκρυνση, δηλαδή όταν $x = -A = -0,5\text{m}$. Άρα $t_3=3\pi/20\text{s}$.

5.Γ.13

α. $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)$. Από το διάγραμμα προκύπτει:

$$A=4/\pi \text{ m}, T=0,2\text{s} \quad \eta \quad \omega=10\pi \text{ rad/s.}$$

Την $t=0\text{s}$ $x=A$, επομένως η αρχική φάση είναι $\pi/2 \text{ rad}$.

$$\beta. x = \frac{4}{\pi} \eta\mu(10\pi t + \frac{\pi}{2}), \text{ (S.I.)}$$

$$\gamma. v = 10\pi \cdot \frac{4}{\pi} \sigma\upsilon\nu(10\pi t + \frac{\pi}{2}), \text{ (S.I.)} \quad \eta \quad v = 40 \cdot \sigma\upsilon\nu(10\pi t + \frac{\pi}{2}), \text{ (S.I.)}$$

δ. Σε κάθε περίοδο το μέτρο της ταχύτητας γίνεται μέγιστο 2 φορές. Σε χρόνο 10 s γίνονται $10/0,2=50$ επαναλήψεις, άρα σε 10 δευτερόλεπτα το μέτρο της ταχύτητας γίνεται μέγιστο 100 φορές.

5.Γ.14

α. Η εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο είναι της μορφής

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0) \quad (1) \quad \mu\epsilon \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 0,5 \text{ rad/s}$$

Επειδή την $t=0\text{s}$ το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. με θετική ταχύτητα, η αρχική φάση είναι $\phi_0=0 \text{ rad}$ και η (1) γράφεται

$$x = 6 \cdot 10^{-2} \cdot \eta\mu 0,5t \quad \text{(S.I.)}$$

$$\beta. v_{\max} = \omega A = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

γ. Οι αναμενόμενες ταχύτητες είναι δύο, αφού το σώμα όταν διέρχεται από τη θέση $x=A/2$, μπορεί είτε να απομακρύνεται είτε να πλησιάζει στη Θ.Ι.

Από τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση έχουμε

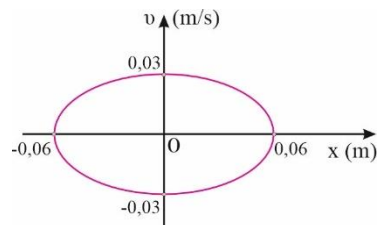
$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \pm \omega \sqrt{A^2 - \frac{A^2}{4}} \Rightarrow$$

$$v = \pm \omega A \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v = \pm 1,5\sqrt{3} \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

δ. Η ταχύτητα σε συνάρτηση με τον χρόνο συνδέονται με τη σχέση

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \pm 0,5\sqrt{0,06^2 - x^2} \quad (\text{S.I.})$$

Το διάγραμμα $v=f(t)$ δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



5.Γ.15

α. Η εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο είναι της μορφής

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές που μας δίνονται από την εκφώνηση

$$A \frac{\sqrt{3}}{2} = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{12} + \varphi_0\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_0\right) \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{3} = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + \varphi_0\right)$$

Η παραπάνω τριγωνομετρική εξίσωση δίνει δύο λύσεις

$$2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \varphi_0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \varphi_0 \quad (2)$$

Το σώμα την $t=0$ s βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση και πλησιάζει στη Θ.Ι. άρα έχει αρνητική ταχύτητα. Επομένως ικανοποιείται η σχέση (2) για $\kappa=0$.

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

β. Από την εκφώνηση έχουμε $A=0,4\text{m}$ και $\omega = \frac{2\pi}{T} = 20\pi \text{ rad/s}$.

Η σχέση (1) γίνεται

$$x = 0,4 \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

γ. Η εξίσωση της επιτάχυνσης είναι

$$\alpha = -\omega^2 A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \alpha = -(20\pi)^2 0,4 \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.}) \Rightarrow \alpha = -1600 \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

Την $t=0,55\text{s}$ έχουμε

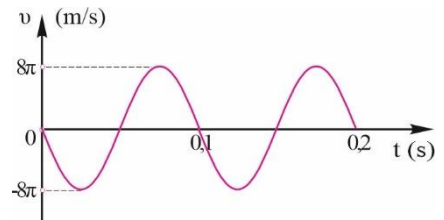
$$\alpha = -1600 \cdot \eta\mu\left(20\pi \cdot 0,55 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -1600 \cdot \eta\mu\left(11\pi + \frac{\pi}{2}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = -1600 \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$\alpha = 1600 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

δ. Η εξίσωση της ταχύτητας είναι

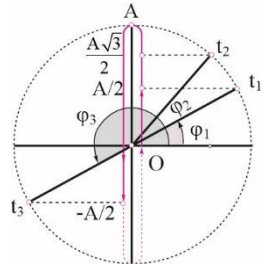
$$v = \omega A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = 8\pi \cdot \sin\left(20\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

Το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



5.Γ.16

α. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει ότι η αρχική φάση είναι μη-δέν, επομένως τη στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. με θετική ταχύτητα. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κύκλο αναφοράς.



Τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα διέρχεται από τη θέση $A/2$ για πρώτη φορά

$$\eta\mu\varphi_1 = \frac{A/2}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{6} \text{ rad},$$

$$\varphi_1 = \omega t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6 \cdot 16\pi} \text{ s} = \frac{1}{96} \text{ s}$$

Τη χρονική στιγμή t_2 το σώμα διέρχεται από τη θέση $A\sqrt{3}/2$ για πρώτη φορά

$$\eta\mu\varphi_2 = \frac{A\sqrt{3}/2}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{3} \text{ rad},$$

$$\varphi_2 = \omega t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{3 \cdot 16\pi} \text{ s} = \frac{1}{48} \text{ s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{48} \text{ s} - \frac{1}{96} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{96} \text{ s}$$

β. Τη χρονική στιγμή t_3 το σώμα διέρχεται από τη θέση $-A/2$ για πρώτη φορά.

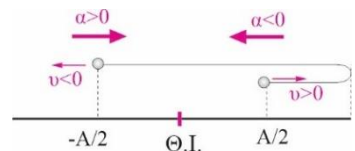
$$\varphi_3 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad},$$

$$\varphi_3 = \omega t_3 \Rightarrow t_3 = \frac{7\pi}{6 \cdot 16\pi} \text{ s} = \frac{7}{96} \text{ s}$$

$$\Delta t = t_3 - t_2 = \frac{7}{96} \text{ s} - \frac{1}{48} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{96} \text{ s}$$

γ. Στις θέσεις που ισαπέχουν από τη Θ.Ι. το μέτρο της ταχύτητας v είναι το ίδιο. Από τη σχέση ταχύτητας - απομάκρυνσης έχουμε

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \pm \omega \sqrt{A^2 - \frac{A^2}{4}} \Rightarrow v = \pm \omega A \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\Delta v = -v - v = -2v \Rightarrow \Delta v = -\omega A \sqrt{3} \Rightarrow \Delta v = -4\pi\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

δ. Στις θέσεις που ισαπέχουν από τη Θ.Ι. το μέτρο της επιτάχυνσης α είναι το ίδιο

$$\alpha = \omega^2 x = \omega^2 \frac{A}{2}$$

$$\Delta \alpha = \alpha - (-\alpha) \Rightarrow \Delta \alpha = 2\alpha = \omega^2 A \Rightarrow \Delta \alpha = 64\pi^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

5.Γ.17

α. $2A=0,4\text{m}$ άρα $A=0,2\text{m}$.

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow 5\text{s} = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 10\text{s}, \omega = \frac{2\pi}{T} = 0,2\pi \text{ rad/s}$$

β. Την $t=0\text{s}$, $x=0\text{m}$, $v>0$ άρα $\phi_0=0\text{rad}$.

γ. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κύκλο αναφοράς

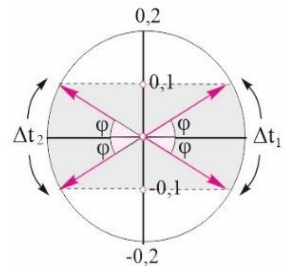
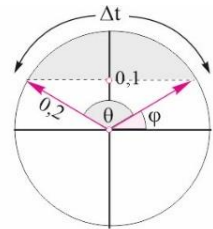
$$\eta\mu\varphi = \frac{0,1}{0,2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \Rightarrow \theta = \pi - 2\frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\theta = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = 0,2\pi \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{10}{3} \text{ s}$$

δ. Θα χρησιμοποιήσουμε τον κύκλο αναφοράς

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}, 2\varphi = \omega \cdot \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{5}{3} \text{ s}$$

$$\Delta t_{\text{ολ}} = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_{\text{ολ}} = \frac{10}{3} \text{ s}$$



5.Γ.18

α. Την $t=0\text{s}$ η απομάκρυνση είναι θετική και μειώνεται. Επειδή είναι θετική το σώμα βρίσκεται στο 1^ο ή 2^ο τεταρτημόριο και επειδή μειώνεται, το σώμα κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας, οπότε θα βρίσκεται στο 2^ο.

β. Από το διάγραμμα $T/2 = 3\text{s} \Rightarrow T = 6\text{s}$

$$v_{\text{max}} = \omega A = \frac{2\pi}{T} A \Rightarrow v_{\text{max}} = 4\pi \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

γ. Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση.

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{v}{\omega} = A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη

$$\left(\frac{v}{\omega}\right)^2 + x^2 = A^2 \Rightarrow v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

Η αριθμητική αντικατάσταση δίνει $v = \pm 0,02\pi\sqrt{3} \text{ m/s}$ και επειδή το σώμα βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο και κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας επιλέγουμε την ταχύτητα με το αρνητικό πρόσημο, άρα $v = -0,02\pi\sqrt{3} \text{ m/s}$

δ. Η στιγμή $t=3\text{s}$ αντιστοιχεί σε μισή περίοδο, οπότε το σώμα θα βρίσκεται στην αντίθετη απομάκρυνση,

$x = -6\text{cm}$, οπότε

$$\alpha = -\omega^2 x = -\left(\frac{2\pi}{6\text{s}}\right)^2 (-0,06\text{m}) \Rightarrow \alpha = \frac{4}{60} \text{ m/s}^2$$

5.Γ.19

α. Επειδή $\eta\mu\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\varphi$ η εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως

$$x = 0,4\sigma\upsilon\nu 40\pi t = 0,4\eta\mu\left(40\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Άρα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

β. Η απομάκρυνση του σώματος όταν η φάση θα έχει αυξηθεί κατά $\pi/3 \text{ rad}$ είναι

$$x_{\text{τελ}} = 0,4\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_{\text{τελ}} = 0,4\eta\mu\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x_{\text{τελ}} = 0,2\text{m}$$

Άρα η μετατόπιση θα είναι

$$\Delta x = x_{\text{τελ}} - x_0 = 0,2\text{m} - 0,4\text{m} \Rightarrow \Delta x = -0,2\text{m}$$

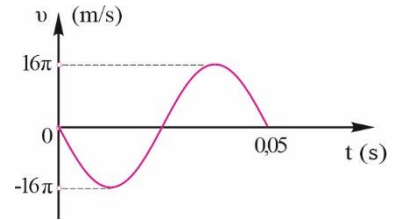
γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας είναι

$$v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v = 16\pi\sigma\upsilon\nu(40\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40\pi} \Rightarrow T = 0,05\text{s}$$

και η γραφική παράσταση αυτής δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



δ. Για να γίνει διπλάσια η μέγιστη ταχύτητα, διατηρώντας σταθερό το πλάτος, θα πρέπει να διπλασιαστεί η συχνότητα της ταλάντωσης και η περίοδος να υποδιπλασιαστεί

$$\frac{v_{\max}}{v_{\max}} = \frac{2\pi f A}{2\pi f' A} \Rightarrow \frac{v_{\max}}{2v_{\max}} = \frac{2\pi f}{2\pi f'} \Rightarrow f' = 2f \Rightarrow T' = \frac{T}{2}$$

Άρα η επί τοις εκατό μεταβολή της περιόδου είναι

$$\pi\% = \frac{T' - T}{T} 100\% = \frac{T/2 - T}{T} 100\% \Rightarrow \pi\% = -50\%$$

5.Γ.20

α. Από το διάγραμμα έχουμε

$$v^2 = \alpha - \beta x^2$$

$$x = 0\text{m} \Rightarrow v^2 = \alpha = 1\text{m}^2 / \text{s}^2$$

$$v = 0\text{m/s} \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{x^2} = 100\text{s}^{-2}$$

Άρα η εξίσωση είναι

$$v^2 = 1 - 100x^2 (\text{S.I.}) \quad 0\text{m}^2 \leq x^2 \leq 0,01\text{m}^2$$

β. Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση

$$\left\{ \begin{array}{l} x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = \frac{x}{A} \Rightarrow \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{x^2}{A^2} \quad (1) \\ v = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) = \frac{v}{\omega A} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{v^2}{\omega^2 A^2} \quad (2) \end{array} \right\}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow$$

$$v^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 \quad (3)$$

Από τη γραφική παράσταση και την εξίσωση (3) προκύπτει ότι

$$x = 0\text{m} \Rightarrow v^2 = \omega^2 A^2 = 1\text{m}^2/\text{s}^2 \Rightarrow \omega A = 1\text{m/s} \quad (4)$$

$$v = 0\text{m/s} \Rightarrow A^2 = 0,01\text{m}^2 \Rightarrow A = 0,1\text{m}$$

Από τη εξίσωση (4) προκύπτει ο ρυθμός μεταβολής της φάσης

$$\omega A = 1\text{m/s} \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 10\text{rad/s}$$

γ. Από την εξίσωση επιτάχυνσης - απομάκρυνσης έχουμε

$$\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow x = -\frac{\alpha}{\omega^2} \Rightarrow x = -0,04\text{m}$$

δ. Βρίσκουμε τη σχέση ανάμεσα στην επιτάχυνση και στην ταχύτητα

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\omega^2 A \eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = -\frac{\alpha}{\omega^2 A} \Rightarrow \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{\alpha^2}{\omega^4 A^2} \\ v = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) = \frac{v}{\omega A} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{v^2}{\omega^2 A^2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{\alpha^2}{\omega^4 A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow$$

$$\alpha = \pm \omega \sqrt{\omega^2 A^2 - v^2} \Rightarrow \alpha = \pm 5\sqrt{3}\text{m/s}^2$$

και επειδή το σώμα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του, η απομάκρυνσή του είναι θετική και η επιτάχυνσή του θα είναι αρνητική, άρα θα έχουμε

$$\alpha = -5\sqrt{3}\text{m/s}^2$$

5.Γ.21

α. Από το διάγραμμα βρίσκουμε τη μέγιστη απομάκρυνση και τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος

$$x_{\max} = A = 0,1\text{m}$$

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow \omega = \frac{v_{\max}}{A} = 100\text{rad/s}$$

Άρα η απόσταση ανάμεσα στις ακραίες θέσεις είναι

$$d = 2A = 0,2\text{m}$$

β. Βρίσκουμε τον αριθμό των ταλαντώσεων του σώματος στο χρονικό διάστημα $5\pi \cdot 10^{-2}\text{s}$ από την έναρξη της ταλάντωσης

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{5\pi \cdot 10^{-2}\text{s}}{2\pi \cdot 10^{-2}\text{s}/\tau\alpha\lambda.} \Rightarrow N = 2,5 \text{ ταλαντώσεις}$$

Σε κάθε ταλάντωση το σώμα διανύει μήκος διαδρομής ίσο με $4A$, άρα σε 2,5 ταλαντώσεις το μήκος διαδρομής θα είναι

$$S = N \cdot 4A \Rightarrow S = 10A = 1\text{m}$$

γ. Η ταλάντωση έχει μηδενική αρχική φάση, άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow x = 0,1\eta\mu 100t \text{ (S.I.)}$$

Το ελάχιστο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μεταβεί το σώμα από τη θέση $x_1=0,05\text{m}$ στη θέση $x_2=-0,05\text{m}$ βρίσκεται αν αφαιρέσουμε από τη στιγμή που το σώμα περνά για 1^η φορά από τη θέση $x_2=-0,05\text{m}$ τη στιγμή που περνά για 2^η φορά από τη θέση $x_1=0,05\text{m}$.

Βρίσκουμε τη 2^η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα περνάει από τη θέση $x_1=0,05\text{m}$

$$0,05 = 0,1\eta\mu 100t \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 100t = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1) \\ 100t = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (2) \end{array} \right\} (2), k=0: 100t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{5\pi}{600}\text{s}$$

Βρίσκουμε την 1^η χρονική στιγμή στην οποία το σώμα περνάει από τη θέση $x_2=-0,05\text{m}$

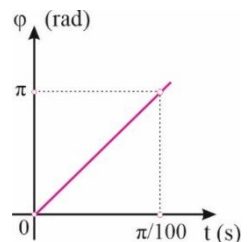
$$-0,05 = 0,1\eta\mu 100t \Rightarrow \eta\mu 100t = \eta\mu(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 100t = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (3) \\ 100t = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (4) \end{array} \right\} (4), k=0: 100t = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{7\pi}{600}\text{s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{7\pi}{600}\text{s} - \frac{5\pi}{600}\text{s} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{300}\text{s}$$

δ. Η φάση της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

$$\varphi = \omega t = 100t \text{ (S.I.)}$$

Για $t = \frac{\pi}{100}\text{s} \Rightarrow \varphi = \pi\text{rad}$, άρα η γραφική παράσταση $\varphi - t$ είναι όπως στο σχήμα.



5.Γ.22

α. Από τη γραφική παράσταση που μας δίνεται συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση επιτάχυνσης - χρόνου είναι

$$a = -6 \cdot \sin \omega t = -6 \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t = -6 \cdot \sin \frac{2\pi}{0,4} t \Rightarrow a = -6 \cdot \sin 5\pi t \text{ (S.I.)}$$

Επειδή $\eta\mu(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \sigma\upsilon\nu\varphi$ η εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως

$$a = -6 \cdot \sin 5\pi t = -6 \cdot \eta\mu(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Άρα η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

β. Ο αριθμός των ταλαντώσεων σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 1\text{s}$ είναι

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{1\text{s}}{0,4\text{s} / \text{ταλάντωση}} \Rightarrow N = 2,5 \text{ ταλαντώσεις}$$

Το σώμα ξεκινάει από την ακραία θετική θέση την $t=0\text{s}$ και καταλήγει στην ακραία αρνητική θέση. Σε κάθε ταλάντωση περνάει από τη θέση ισορροπίας του δύο φορές. Άρα ο αριθμός των διελεύσεων από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι συνολικά 5.

γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος είναι

$$v = v_{\max} \cdot \sin(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow v = \frac{a_{\max}}{\omega} \cdot \sin(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow v = \frac{1,2}{\pi} \cdot \sin(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Άρα η ταχύτητα τη ζητούμενη στιγμή είναι

$$v = \frac{1,2}{\pi} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow v = \frac{1,2}{\pi} \cdot \sin\pi \Rightarrow v = -\frac{1,2}{\pi} \text{ m/s}$$

δ. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι

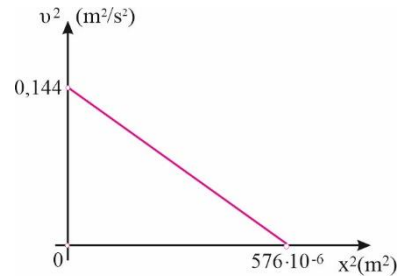
$$v_{\max} = \frac{1,2}{\pi} \text{ m/s} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} \Rightarrow A = \frac{\frac{1,2}{\pi} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \Rightarrow A = \frac{1,2}{5\pi^2} \text{ m} \Rightarrow A = 0,024 \text{ m}$$

Βρίσκουμε πρώτα τη συνάρτηση του τετραγώνου της ταχύτητας του σώματος με το τετράγωνο της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας του

$$\left\{ \begin{array}{l} x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \varphi_0) = \frac{x}{A} \Rightarrow \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{x^2}{A^2} \quad (1) \\ v = \omega A \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) = \frac{v}{\omega A} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{v^2}{\omega^2 A^2} \quad (2) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} (1) + (2): \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) &= \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} \Rightarrow \\ v^2 &= \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 \Rightarrow v^2 = 25\pi^2 \cdot 0,024^2 - 25\pi^2 \cdot x^2 \Rightarrow \\ v^2 &= 0,144 - 250x^2 \text{ (S.I.)} \end{aligned}$$

Άρα η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.



5.Γ.23

α. Το σώμα ξεκινάει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t=0s$ με μηδενική ταχύτητα, άρα βρίσκεται σε ακραία θέση. Επειδή η επιτάχυνση έχει αρνητικό πρόσημο, το σώμα θα βρίσκεται στη θέση της ακραίας θετικής απομάκρυνσης, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσής του είναι $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

β. Το μέγεθος z της γραφικής παράστασης έχει τη στιγμή $t=0s$ μηδενική τιμή, άρα δεν μπορεί να είναι $x=f(t)$ ή $a=f(t)$.

Η συνάρτηση που περιγράφει τη γραφική παράσταση για το μέγεθος z είναι

$$z = -z_0 \eta\mu\omega t \Rightarrow z = z_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Άρα, το φυσικό μέγεθος z είναι η ταχύτητα που είναι ο ρυθμός μεταβολής της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, δηλαδή

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \sigma\upsilon\nu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

γ. Το σημείο Γ αντιστοιχεί σε μισή περίοδο της α.α.τ.

Σε χρονικό διάστημα μίας περιόδου το σώμα διανύει διάστημα ίσο με $1,2m$, άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$s = 4A \Rightarrow A = \frac{s}{4} = 0,3m$$

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της ταχύτητας είναι $3m/s$, οπότε

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = \frac{2\pi}{T} A \Rightarrow T = \frac{2\pi A}{v_{\max}} \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot 0,3\text{m}}{3\text{m/s}} \Rightarrow T = 0,2\pi\text{s}$$

Άρα το σημείο Γ αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t_{\Gamma} = 0,1\pi\text{ s}$.

δ. Βρίσκουμε τον αριθμό των ταλαντώσεων σε χρονικό διάστημα ίσο με $0,55\pi\text{ s}$

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{0,55\pi\text{s}}{0,2\pi\text{s}/\tau_{\text{αλ.}}} \Rightarrow N = 2,75 \text{ ταλαντώσεις}$$

Σε κάθε πλήρη ταλάντωση το σώμα περνάει από τη θέση $x=-0,15\text{m}$ με αρνητική ταχύτητα μία φορά, άρα περνάει δύο φορές από τη θέση αυτή σε δύο ταλαντώσεις. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, το σώμα ξεκινάει να ταλαντώνεται από την ακραία θετική θέση, άρα σε $\frac{3}{4}$ της ταλάντωσης θα περάσει πάλι από τη θέση αυτή με αρνητική ταχύτητα, οπότε συνολικά περνάει τρεις φορές.

5.Γ.24

α. Οι εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ δίνουν

$$x = A\eta\mu\varphi_0$$

$$v = \omega A\sigma\upsilon\nu\varphi_0$$

Θέλουμε $x < 0$, $v > 0$, άρα θα έχουμε

$$\eta\mu\varphi_0 < 0, \sigma\upsilon\nu\varphi_0 > 0$$

Οι παραπάνω ανισότητες ικανοποιούνται ταυτόχρονα στο 4^ο τεταρτημόριο, δηλαδή στο διάστημα

$$\frac{3\pi}{2}\text{rad} < \varphi_0 < 2\pi\text{rad}$$

β. Οι χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στην απλή αρμονική ταλάντωση γράφονται και ως εξής

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow v = \omega A\eta\mu(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$

$$a = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow a = \omega^2 A\eta\mu(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

Η διαφορά φάσης της ταχύτητας και της απομάκρυνσης είναι

$$\Delta\varphi_{v,x} = \varphi_v - \varphi_x = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

επομένως η φάση της ταχύτητας τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad} + \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow \varphi_v = 3\pi \text{ rad}$$

Η διαφορά φάσης της επιτάχυνσης και της απομάκρυνσης είναι

$$\Delta\varphi_{\alpha,x} = \varphi_\alpha - \varphi_x = \pi \text{ rad}$$

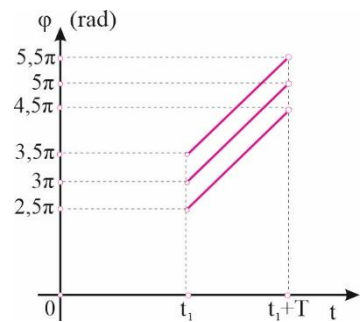
επομένως η φάση της επιτάχυνσης τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$\varphi_\alpha = \varphi_x + \pi \text{ rad} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad} + \pi \text{ rad} \Rightarrow \varphi_\alpha = \frac{7\pi}{2} \text{ rad}$$

γ. Η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή t_1 είναι

$$\alpha = \alpha_{\max} \eta\mu \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \alpha_{\max} \eta\mu(2\pi + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \alpha = -\alpha_{\max}$$

δ. Οι γραφικές παραστάσεις των φάσεων της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τον χρόνο από τη στιγμή t_1 μέχρι να ολοκληρωθεί μία περίοδος της ταλάντωσης είναι όπως στο σχήμα.



5.Γ.25

α. Από την εκφώνηση της άσκησης την $t=0\text{s}$ το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και έχει θετική ταχύτητα, άρα η αρχική φάση της απομάκρυνσης του σώματος είναι μηδενική.

Οι χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης στην απλή αρμονική ταλάντωση γράφονται και ως εξής:

$$x = A\eta\mu(\omega t)$$

$$v = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow v = \omega A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\alpha = -\omega^2 A\eta\mu(\omega t) \Rightarrow \alpha = \omega^2 A\eta\mu(\omega t + \pi)$$

Άρα η διαφορά φάσης της επιτάχυνσης και της απομάκρυνσης είναι

$$\Delta\varphi_{\alpha,x} = \varphi_{\alpha(0)} - \varphi_{x(0)} = \pi \text{ rad} \Rightarrow \varphi_{\alpha(0)} = \pi \text{ rad}$$

οπότε το φυσικό μέγεθος του οποίου παριστάνεται η φάση είναι η επιτάχυνση.

β. Από το διάγραμμα βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \omega = \frac{3\pi - \pi}{1} \text{ rad / s} \Rightarrow \omega = 2\pi \text{ rad / s}$$

οπότε το ζητούμενο χρονικό διάστημα είναι

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2\pi} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 0,5 \text{ s}$$

γ. Από τη μέγιστη επιτάχυνση βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης

$$\alpha_{\max} = \omega^2 A \Rightarrow A = \frac{\alpha_{\max}}{\omega^2} \Rightarrow A = \frac{2\pi^2}{4\pi^2} \text{ m} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$x_1 = A \eta \mu \omega t = 0,5 \eta \mu 2\pi t \text{ (S.I.)}$$

δ. Όταν συναντηθούν τα δύο σώματα θα έχουν την ίδια απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 0,5 \eta \mu 2\pi t = 0,5 \sigma \upsilon \nu 2\pi t \Rightarrow \epsilon \phi 2\pi t = 1 \Rightarrow \epsilon \phi 2\pi t = \epsilon \phi \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\pi t = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\pi t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{8} \text{ s}$$

5.Γ.26

α. Το πλάτος ταλάντωσης του Σ_2 είναι $A_2 = 0,6 \text{ m} - A_1 \Rightarrow A_2 = 0,4 \text{ m}$.

Το πηλίκο των μέγιστων ταχυτήτων των δύο σωμάτων είναι

$$\frac{v_{\max,1}}{v_{\max,2}} = \frac{\omega_1 A_1}{\omega_2 A_2} \Rightarrow \frac{v_{\max,1}}{v_{\max,2}} = \frac{10\pi \cdot 0,2 \text{ m/s}}{7,5\pi \cdot 0,4 \text{ m/s}} \Rightarrow \frac{v_{\max,1}}{v_{\max,2}} = \frac{2}{3}$$

β. Για να συναντηθούν τα δύο σώματα ξανά θα πρέπει να έχουν κάνει ακέραιο αριθμό ταλαντώσεων. Για να είναι η πρώτη φορά μετά την $t=0\text{s}$, οι ακέραιοι θα πρέπει να είναι οι ελάχιστοι

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{f_1 \Delta t}{f_2 \Delta t} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\frac{\omega_1}{2\pi} \Delta t}{\frac{\omega_2}{2\pi} \Delta t} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{10\pi}{7,5\pi} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{4 \cdot 2,5\pi}{3 \cdot 2,5\pi} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{4}{3}$$

Άρα, τα σώματα συναντιούνται για πρώτη φορά, μετά την $t=0\text{s}$, όταν το Σ_1 έχει κάνει τέσσερις ταλαντώσεις και το Σ_2 έχει κάνει τρεις. Επομένως το χρονικό διάστημα που έχει παρέλθει είναι

$$\Delta t = 4T_1 \Rightarrow \Delta t = 4 \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \Delta t = \frac{8\pi}{10\pi} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 0,8 \text{ s}$$

γ. Το διάστημα που έχει διανύσει το κάθε σώμα μέχρι τη στιγμή που θα συναντηθούν για πρώτη φορά είναι:

$$S_1 = 4 \cdot 4A_1 \Rightarrow S_1 = 3,2\text{m}$$

$$S_2 = 3 \cdot 4A_2 \Rightarrow S_2 = 4,8\text{m}$$

δ. Το σώμα S_2 περνάει για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή

$$t = \frac{T_2}{4} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{4\omega_2} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{4 \cdot 7,5\pi} \text{ s} \Rightarrow t = \frac{1}{15} \text{ s}$$

Την ίδια στιγμή το σώμα S_1 βρίσκεται στη θέση

$$x_1 = 0,2\eta\mu\left(10\pi \frac{1}{15} + \frac{\pi}{2}\right)\text{m} \Rightarrow x_1 = 0,2\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\text{m} \Rightarrow x_1 = 0,2\eta\mu \frac{7\pi}{6} \text{m} \Rightarrow x_1 = 0,2\left(-\frac{1}{2}\right)\text{m} \Rightarrow x_1 = -0,1\text{m}$$

5.Γ.27

α. Οι χρονικές εξισώσεις $x=f(t)$ και $y=f(t)$ των προβολών της επιβατικής ακτίνας του σώματος στους άξονες x' και y' από το σχήμα είναι

$$\eta\mu\varphi = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R\eta\mu\varphi \Rightarrow y = R\eta\mu\omega t \Rightarrow y = 0,5\eta\mu 10t \text{ (S.I.)}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{x}{R} \Rightarrow x = R\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow x = R\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow x = 0,5\sigma\upsilon\nu 10t \text{ (S.I.)}$$

β. Η διαφορά φάσης ανάμεσα στις χρονικές εξισώσεις $x=f(t)$ και $y=f(t)$ είναι

$$y = 0,5\eta\mu 10t \text{ (S.I.)}$$

$$x = 0,5\sigma\upsilon\nu 10t = 0,5\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\Delta\varphi_{x,y} = \left(10t + \frac{\pi}{2}\right) - 10t \Rightarrow \Delta\varphi_{x,y} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

και προηγείται η ταλάντωση του σώματος στον άξονα x' .

γ. Για την πρώτη φορά στην οποία $x=y$, από το σχήμα έχουμε

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \Rightarrow t = \frac{\pi}{40} \text{ s}$$

δ. Όταν για πρώτη φορά το σώμα έχει $x = -0,25\text{m}$, τότε

$$-0,25 = 0,5 \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin \varphi = \sin \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} & (1) \\ \varphi = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1), k=0} \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

5.Γ.28

α. Από το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με 0,2m, οπότε το μήκος της διαδρομής που διανύει το σώμα σε δέκα περιόδους είναι

$$S = 10 \cdot 4A \Rightarrow S = 40 \cdot 0,2\text{m} \Rightarrow S = 8\text{m}$$

β. Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, όταν η φάση της ταλάντωσης είναι $5\pi/6$ rad είναι

$$x = A \sin \varphi \Rightarrow x = 0,2\text{m} \cdot \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 0,2 \cdot \frac{1}{2} \text{m} \Rightarrow x = 0,1\text{m}$$

γ. Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές μεγιστοποιήσεις του μέτρου της επιτάχυνσής του είναι ίσο με μισή περίοδο. Άρα η γωνιακή συχνότητα είναι

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{2\omega} \Rightarrow \omega = 4\text{rad/s}$$

Βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση.

$$x = A \sin \omega t$$

$$v = \omega A \cos \omega t \Rightarrow \frac{v}{\omega} = A \cos \omega t$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη, οπότε προκύπτει

$$v^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 \Rightarrow v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow v = \pm 4 \sqrt{0,04 - 0,03} \text{m/s} \Rightarrow v = \pm 0,4 \text{m/s}$$

Επειδή το σώμα έχει αρνητική απομάκρυνση και απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του έπεται ότι η ταχύτητα του σώματος είναι αρνητική άρα, $v = -0,4 \text{m/s}$.

δ. Οι χρονικές εξισώσεις της ταλάντωσης μπορούν να γραφούν και ως εξής

$$x = A \sin(\omega t) = A \sin \varphi_x$$

$$v = \omega A \cos(\omega t) \Rightarrow v = \omega A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow v = \omega A \sin \varphi_v$$

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t) \Rightarrow a = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi) \Rightarrow a = \omega^2 A \sin \varphi_a$$

η διαφορά φάσης της επιτάχυνσης και της ταχύτητας είναι

$$\Delta\varphi_{\alpha,v} = \varphi_{\alpha} - \varphi_v = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Επομένως η φάση της επιτάχυνσης τη στιγμή αυτή είναι

$$\varphi_{\alpha} = \varphi_v + \frac{\pi}{2} \text{ rad} = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος, δηλαδή η επιτάχυνσή του την ίδια στιγμή είναι

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = \omega^2 A \eta \mu \varphi_{\alpha} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \left(4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \cdot 0,2 \text{ m} \cdot \eta \mu \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -3,2 \text{ m/s}^2$$

5.Γ.29

α. Από τον πίνακα με τα δεδομένα που μας δίνεται συμπεραίνουμε ότι το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικά μέγιστα της στάθμης του νερού είναι ίσο με $T=12\text{h}$.

β. Η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{12} \text{ rad/h} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6} \text{ rad/h}$$

Η χρονική εξίσωση της απόκλισης των υδάτων από τη μέση στάθμη τους είναι

$$\Delta h = \Delta h_{\max} \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$$

Επειδή την χρονική στιγμή $t=0\text{h}$ η απόκλιση είναι μέγιστη θετική θα έχουμε

$$\Delta h_{\max} = \Delta h_{\max} \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} & (1) \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} & (2) \end{cases}$$

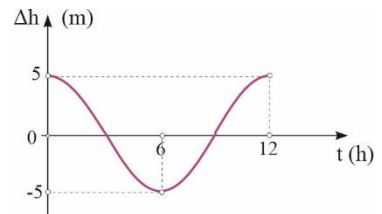
$$(1), k=0 : \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Με βάση τον πίνακα θα έχουμε για τη μέγιστη απόκλιση

$\Delta h_{\max} = 5\text{m}$. Οπότε η χρονική εξίσωση γίνεται

$$\Delta h = 5 \eta \mu \left(\frac{\pi}{6} t + \frac{\pi}{2} \right), (\Delta h \rightarrow \text{m}, t \rightarrow \text{h})$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι όπως στο σχήμα.



γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στάθμης των υδάτων (ταχύτητα ανύψωσης/ταπείνωσης της επιφάνειας) θα είναι

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \omega \Delta h_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{5\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{\Delta h}{\Delta t} \rightarrow \text{m/h}, t \rightarrow \text{h}\right)$$

Με βάση την παραπάνω εξίσωση ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της στάθμης είναι

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{\max} = \frac{5\pi}{6} \text{ m/h}$$

δ. Η βαρυτική ενέργεια των υδάτων είναι

$$U = mgh$$

Για ταπείνωση της επιφάνειας των υδάτων κατά $h=10\text{m}$ ο μέσος ρυθμός που παράγεται ενέργεια θα είναι ίσος με τη μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής της βαρυτικής ενέργειας, δηλαδή

$$P_{\mu} = \left| \frac{d\bar{U}}{dt} \right|$$

Εάν με dm/dt συμβολίσουμε τον μέσο ρυθμό εκροής των υδάτων τότε θα έχουμε

$$P_{\mu} = gh \frac{dm}{dt} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{P_{\mu}}{gh} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{3 \cdot 10^6 \text{ J/s}}{10 \cdot 10 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = 3 \cdot 10^4 \text{ Kg/s}$$