

Θέματα Β

6.B.1 β.

Στην κλίση της γραφικής παράστασης φάσης - χρόνου αντιστοιχεί η γωνιακή συχνότητα του συστήματος, αφού $\phi = \omega t$, άρα είναι

$$\text{κλίση } 1 > \text{κλίση } 2 \Rightarrow \omega_1 > \omega_2 \Rightarrow 2\pi f_1 > 2\pi f_2 \Rightarrow f_1 > f_2 \Rightarrow \frac{N_1}{t} > \frac{N_2}{t} \Rightarrow N_1 > N_2$$

Άρα, αν το σύστημα m - k_1 , κάνει 10 πλήρεις ταλαντώσεις, το σύστημα m - k_2 θα έχει εκτελέσει λιγότερες από 10.

6.B.2 i. α. ii. γ.

i. Από το διάγραμμα που δίνεται και από τα δεδομένα του άξονα των χρόνων προκύπτει ότι

$T_2 = 2T_1$, οπότε για τις δύο μάζες έχουμε

$$2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}} = 2 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}, \Rightarrow m_2 = 4m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{4}$$

ii. Από το διάγραμμα που δίνεται και από τα δεδομένα του κατακόρυφου άξονα προκύπτει ότι

$$F_{\max 1} = 2F_{\max 2} \Rightarrow kA_1 = 2kA_2 \Rightarrow A_1 = 2A_2$$

οπότε για τις μέγιστες ταχύτητες έχουμε

$$\frac{v_{\max 1}}{v_{\max 2}} = \frac{\omega_1 A_1}{\omega_2 A_2} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_1}} A_1}{\sqrt{\frac{k}{m_2}} A_2} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_1}} A_1}{\sqrt{\frac{k}{4m_1}} \frac{A_1}{2}} \Rightarrow \frac{v_{\max 1}}{v_{\max 2}} = 4$$

6.B.3 β.

Για τις μέγιστες τιμές των ταχυτήτων ισχύουν οι σχέσεις

$$v_{\max 1} = v_{\max 2} \Rightarrow \omega_1 A_1 = \omega_2 A_2 \Rightarrow \omega_1 2A_2 = \omega_2 A_2 \Rightarrow 2\omega_1 = \omega_2 \quad (1)$$

Για τις δύο σταθερές επαναφοράς ισχύει

$$D_1 = m_1 \omega_1^2 = 2m_2 \left(\frac{\omega_2}{2} \right)^2 \Rightarrow D_1 = \frac{D_2}{2} \quad (2)$$

Για τις μέγιστες δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, είναι

$$F_{\max,1} = D_1 A_1 = \frac{D_2}{2} 2A_2 \Rightarrow F_{\max,1} = F_{\max,2}$$

6.B.4 γ.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $2A_1 = A_2$ και ότι

$$F_{\max,1} = 2F_{\max,2} \Rightarrow D_1 A_1 = 2D_2 A_2 \Rightarrow D_1 = 4D_2 \Rightarrow m_1 \omega_1^2 = 4m_2 \omega_2^2 \xrightarrow{m_1=4m_2} \\ 4m_2 \omega_1^2 = 4m_2 \omega_2^2 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 \Rightarrow 2\pi f_1 = 2\pi f_2 \Rightarrow f_1 = f_2$$

6.B.5 α.

Από τις χρονικές εξισώσεις της δύναμης και της ταχύτητας παίρνουμε

$$F = m\alpha = -m\alpha_{\max} \eta \mu \omega t = -F_{\max} \eta \mu \omega t \Rightarrow \eta \mu \omega t = -\frac{F}{F_{\max}} \Rightarrow \eta \mu^2 \omega t = \frac{F^2}{F_{\max}^2} \quad (1)$$

$$v = v_{\max} \sigma \upsilon \nu \omega t \Rightarrow \sigma \upsilon \nu \omega t = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow \sigma \upsilon \nu^2 \omega t = \frac{v^2}{v_{\max}^2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\eta \mu^2 \omega t + \sigma \upsilon \nu^2 \omega t = \frac{F^2}{F_{\max}^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} \Rightarrow \frac{F^2}{D^2 A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow \frac{F^2}{m^2 \omega^4 A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow \\ F^2 + m^2 \omega^2 v^2 = m^2 \omega^4 A^2 = F_{\max}^2 \Rightarrow v = \pm \frac{\sqrt{F_{\max}^2 - F^2}}{m\omega}$$

6.B.6 α.

Η χρονική εξίσωση του ρυθμού μεταβολής της ορμής, δηλαδή της δύναμης επαναφοράς είναι

$$\frac{dp}{dt} = F = -Dx = -DA\eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = -m\omega^2 A\eta \mu \left(\frac{2\pi}{T} \frac{17T}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = -m\omega v_{\max} \eta \mu \left(\frac{34\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} \right) \Rightarrow \\ \frac{dp}{dt} = -\omega p_{\max} \eta \mu \frac{37\pi}{6} = -\omega p_{\max} \eta \mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{2\pi}{T} p_{\max} \eta \mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{\pi p_{\max}}{T}$$

6.B.7 γ.

Σε κάθε περίοδο το σώμα διανύει απόσταση ίση με $4A$ και σε δύομισι περιόδους διανύει απόσταση ίση με $10A$. Άρα, η περίοδος ισούται με $2,5T = t_1 = 2,5s$, δηλαδή $T = 1s$. Η συχνότητα είναι

$$f = \frac{1}{T} \Rightarrow f = 1\text{Hz}$$

Η συχνότητα μηδενισμού της δύναμης επαναφοράς f' είναι διπλάσια από τη συχνότητα της ταλάντωσης f , καθώς σε χρόνο μιας περιόδου γίνονται δύο μηδενισμοί της δύναμης επαναφοράς, στη θέση ισορροπίας, άρα

$$f' = 2f = 2\text{Hz}$$

6.B.8 β.

Αφού το σώμα τη στιγμή $t_0=0\text{s}$ δέχεται δύναμη επαναφοράς που ισούται με $F=-DA$, βρίσκεται στην ακραία θετική απομάκρυνση και η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\pi/2$ rad.

Τη χρονική στιγμή που η δύναμη επαναφοράς θα γίνει για 2^η φορά ίση με $DA/2$ το σώμα θα βρίσκεται σε αρνητική απομάκρυνση με θετική ταχύτητα (4^ο τεταρτημόριο).

Από τη χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς προκύπτει

$$F = -Dx = -DA\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{DA}{2} = -DA\eta\mu\left(\omega t_2 + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(\omega t_2 + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\left(\omega t_2 + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{T}t_2 + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} & (1) \\ \frac{2\pi}{T}t_2 + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} & (2) \end{cases}$$

Για θετική ταχύτητα (συνφ>0), δεκτή είναι η (1) που δίνει λύσεις στο 4^ο τεταρτημόριο και για $\kappa=1$ παίρνουμε

$$\frac{2\pi}{T}t_2 + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow t_2 = \frac{2T}{3}$$

6.B.9 α.

Από την κλίση του διαγράμματος υπολογίζουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi - \frac{\pi}{2}}{3t_1 - 0} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2t_1}$$

Τη στιγμή $4t_1$ η ταλάντωση έχει φάση

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \omega 4t_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2t_1} 4t_1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi,$$

άρα το σώμα βρίσκεται στην ακραία θετική απομάκρυνση και η δύναμη επαναφοράς είναι ίση με

$$F = -F_{\max} \eta \mu \left(2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow F = -m\alpha_{\max}$$

6.B.10 γ.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $T_2 = 1,5T_1$, άρα

$$T_2 = 1,5T_1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\omega_2} = 1,5 \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \omega_1 = 1,5\omega_2 \quad (1)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει $F_{\max 1} = 3F_{\max 2}$, άρα

$$F_{\max 1} = 3F_{\max 2} \Rightarrow D_1 A_1 = 3D_2 A_2 \Rightarrow m_1 \omega_1^2 A_1 = 3m_2 \omega_2^2 A_2 \xrightarrow{(1)} \rightarrow$$

$$m_1 \omega_1^2 A_1 = 3 \cdot 3m_1 \cdot \left(\frac{\omega_1}{1,5} \right)^2 A_2 \Rightarrow A_1 = 4A_2$$

6.B.11 i.α. ii.β. iii.α.

i. Το χρονικό διάστημα για να πάει ένα σώμα που εκτελεί α.α.τ. από την ακραία θέση στη θέση ισορροπίας είναι $T/4$ και είναι ανεξάρτητο του πλάτους ταλάντωσης. Για τις δύο περιόδους ισχύει

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1/2}{k_1/2}} \Rightarrow T_2 = T_1 = T$$

Άρα $t_1 = t_2 = T/4$.

ii. Για τις μέγιστες ταχύτητες ισχύει

$$v_1 = \omega_1 A_1 = \frac{2\pi}{T_1} x_1, \quad v_2 = \omega_2 A_2 = \frac{2\pi}{T_2} 2x_1 \Rightarrow v_2 = 2v_1$$

iii. Για τις μέγιστες δυνάμεις επαναφοράς ισχύει

$$F_1 = k_1 A_1 = k_1 x_1, \quad F_2 = k_2 A_2 = \frac{k_1}{2} 2x_1 \Rightarrow F_2 = F_1$$

6.B.12 α.

Η μέγιστη επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση $\alpha_{\max} = \omega^2 A$, οπότε για τις δύο μέγιστες επιταχύνσεις έχουμε:

$$\alpha_{\max 1} = \omega_1^2 A = \left(\sqrt{\frac{k}{m_1}} \right)^2 A \Rightarrow \alpha_{\max 1} = \frac{k}{m_1} A,$$

$$\alpha_{\max 2} = \frac{k}{m_2} A = \frac{k}{2m_1} A \Rightarrow \alpha_{\max 2} = \frac{\alpha_{\max 1}}{2}$$

6.B.13 γ.

Η σταθερά επαναφοράς και των δύο ταλαντώσεων ισούται με τη σταθερά του ελατηρίου. Από τις μέγιστες δυνάμεις παίρνουμε

$$F_{\max 2} = 2F_{\max 1} \Rightarrow kA_2 = 2kA_1 \Rightarrow A_2 = 2A_1$$

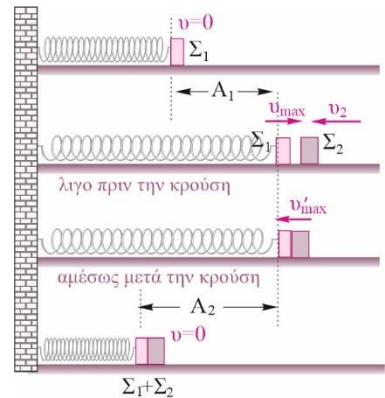
Μετά την πλαστική κρούση αλλάζει η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

$$D_1 = D_2 = k \Rightarrow m_1 \omega_1^2 = (m_1 + m_2) \omega_2^2 \Rightarrow$$

$$m_1 \omega_1^2 = 4m_1 \omega_2^2 \Rightarrow \omega_1 = 2\omega_2$$

και για τις μέγιστες ταχύτητες είναι

$$v_{\max} = \omega_1 A_1 = 2\omega_2 \frac{A_2}{2} = v'_{\max}$$



Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση, κινείται αντίρροπα από την ταχύτητα του σώματος Σ_1 , αλλά με ίδιο μέτρο ταχύτητας, άρα το σώμα Σ_2 πριν την κρούση είχε ορμή μεγαλύτερου μέτρου.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ για την πλαστική κρούση, με θετική φορά αυτήν της κίνησης του σώματος Σ_2 , παίρνουμε

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_2 v_2 - m_1 v_{\max} = (m_1 + m_2) v'_{\max} \Rightarrow$$

$$3m_1 v_2 - m_1 v_{\max} = 4m_1 v_{\max} \Rightarrow 3v_2 = 5v_{\max} \Rightarrow v_2 = \frac{5v_{\max}}{3}$$

6.B.14 β.

Το σώμα μάζας m_1 ισορροπεί εξαιτίας δύο δυνάμεων, της δύναμης του ελατηρίου σταθεράς k_1 και της τάσης του νήματος T . Η θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_1 απέχει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_1 κατά x_1 , που σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ},1} = T \Rightarrow k_1 x_1 = T \quad (1)$$

Ομοίως, το σώμα μάζας m_2 ισορροπεί εξαιτίας δύο δυνάμεων, της δύναμης του ελατηρίου σταθεράς k_2 και της τάσης του νήματος T . Η θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_2 απέχει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_2 κατά x_2 , που σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ,2} = T \Rightarrow k_2 x_2 = T \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$T = k_2 x_2 = k_1 x_1 \Rightarrow x_1 = 2x_2 \quad (3)$$

Όταν κόψουμε το νήμα τα δύο σώματα ξεκινούν να κάνουν α.α.τ. από ακραίες θέσεις, άρα $A_1 = x_1$ και $A_2 = x_2$ και σύμφωνα με την (3) $A_1 = 2A_2$.

Για τις κυκλικές συχνότητες των δύο ταλαντώσεων, ισχύει

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{2k_1}{m_1/2}} \Rightarrow \omega_2 = 2\omega_1$$

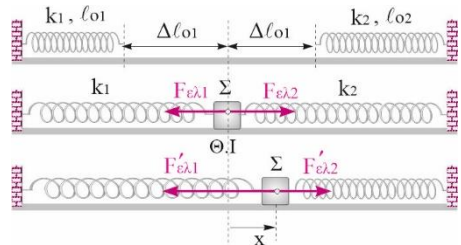
Για τις μέγιστες ταχύτητες των σωμάτων, $v_{\max,1}$ και $v_{\max,2}$, αντίστοιχα, ισχύει

$$v_{\max,1} = \omega_1 A_1 = \frac{\omega_2}{2} \cdot 2A_2 = \omega_2 A_2 \Rightarrow v_{\max,1} = v_{\max,2}$$

6.B.15 α.

Στη θέση ισορροπίας του σώματος, τα δύο ελατήρια είναι επιμηκυμένα κατά $\Delta \ell_{o1}$ και $\Delta \ell_{o2}$, αντίστοιχα και η σχέση ισορροπίας δίνει για τα μέτρα των δυνάμεων

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ,1} = F_{ελ,2} \Rightarrow k_1 \Delta \ell_{o1} = k_2 \Delta \ell_{o2} \quad (1)$$



Στην τυχαία θέση της ταλάντωσης, η συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σώμα είναι

$$\Sigma F = -F'_{ελ,1} + F'_{ελ,2} = -k_1 (\Delta \ell_{o1} + x) + k_2 (\Delta \ell_{o2} - x) = -k_1 \Delta \ell_{o1} + k_2 \Delta \ell_{o2} - k_1 x - k_2 x \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -k_1 x - k_2 x \Rightarrow \Sigma F = -(k_1 + k_2)x$$

Άρα, το σύστημα εκτελεί α.α.τ. με $D = k_1 + k_2$ και περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

6.B.16 β.

Το χρονικό διάστημα για να πάει ένα σώμα που εκτελεί α.α.τ. από την ακραία θέση στη θέση ισορροπίας είναι $T/4$ και είναι ανεξάρτητο του πλάτους ταλάντωσης. Για τις δύο περιόδους ισχύει

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1/4}} \Rightarrow T_2 = 2T_1, \quad \text{άρα } t_2 = 2t_1.$$

6.B.17 γ.

Ο χρόνος που απαιτείται για να κινηθούν τα σώματα από την ακραία θέση της ταλάντωσης τους μέχρι τη θέση ισορροπίας τους είναι το ένα τέταρτο της περιόδου τους. Άρα

$$t_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

$$t_2 = \frac{T_2}{4} = \frac{2\pi}{4}\sqrt{\frac{m_2}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4m_1}{k}} = \pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow t_2 = 2t_1$$

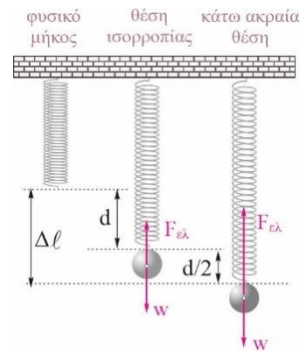
6.B.18 α.

Η θέση ισορροπίας του συστήματος $m - k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά d .

Το πλάτος της ταλάντωσης είναι $d/2$, οπότε στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά

$$\Delta\ell = d + \frac{d}{2} = \frac{3d}{2}, \quad \text{άρα για το πηλίκιο των δύο δυνάμεων έχουμε}$$

$$\frac{F_{ελ}}{F_{επαν}} = \frac{k\Delta\ell}{kA} = \frac{\frac{3d}{2}}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \frac{F_{ελ}}{F_{επαν}} = 3$$



6.B.19 β.

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_o$, που σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w \Rightarrow \Delta\ell_o = \frac{mg}{k}$$

Εφόσον το σώμα ξεκινάει από τη θέση φυσικού μήκους χωρίς ταχύτητα, αυτή είναι η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης, κατά συνέπεια το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = \Delta\ell_o$. Η μέγιστη δύναμη του ελατηρίου ασκείται στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης, όπου η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι

$$\Delta\ell = \Delta\ell_o + A = 2A \text{ και ισούται με}$$

$$F_{ελ,max} = k\Delta\ell = k2A = 2k \frac{mg}{k} \Rightarrow F_{ελ,max} = 2mg$$

Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης ισούται με $F_{max} = kA = k \frac{mg}{k} \Rightarrow F_{max} = mg$

και ο λόγος τους ισούται με $\frac{F_{ελ,max}}{F_{max}} = 2$.

6.B.20 γ.

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης των δύο σωμάτων είναι πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους των ελατηρίων κατά x_1 και x_2 , αντίστοιχα, που ισούνται, σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας, με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ,1} = w_1 \Rightarrow x_1 = \frac{m_1 g}{k_1}$$

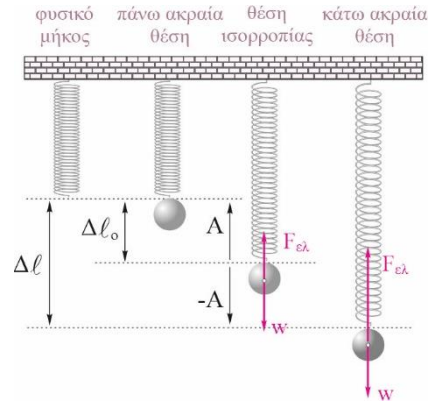
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ,2} = w_2 \Rightarrow x_2 = \frac{m_2 g}{k_2}$$

Οι δύο αποστάσεις είναι ίσες, άρα

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \frac{m_1 g}{k_1} = \frac{m_2 g}{k_2} \Rightarrow \frac{m_1}{k_1} = \frac{m_2}{k_2} \quad (1)$$

Οι δύο περίοδοι των ταλαντώσεων είναι $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$ και $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}}$

και λόγω της σχέσης (1) προκύπτει $T_2 = T_1$



6.B.21 β.

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$

Παρατηρούμε ότι το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο με τη μάζα του σώματος, κατά συνέπεια η κλίση στη γραφική παράσταση $T^2 = f(m)$ ισούται με $4\pi^2/k$. Άρα

$$\kappaλίση = \frac{4\pi^2}{k} \Rightarrow \frac{0,12}{0,3} = \frac{4 \cdot 10}{k} \text{ (SI)} \Rightarrow k = 100 \text{ N/m}$$

6.B.22 γ.

Από τη συχνότητα της ταλάντωσης στις δύο περιπτώσεις προκύπτει

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1}}$$

$$f_2 = \frac{f_1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \frac{1}{3} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{m_1 + m_2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{m_1}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{9} \frac{1}{m_1} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{8}$$

6.B.23 i. β. ii. β.

i. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι την $t=0\text{s}$ που το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, $F_{ελ}=20\text{N}$. Από τη συνθήκη ισορροπίας για το σύστημα προκύπτει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow w - F_{ελ} = 0 \Rightarrow w = 20\text{N} \text{ και } m = 2\text{kg}$$

ii. Από το διάγραμμα και από τα δεδομένα του άξονα των χρόνων προκύπτει ότι

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{20} \text{ s} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s} \text{ και } \omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς ισχύει

$$F_{επ(\max)} = F_{ελ(\max)} - mg = 30\text{N} - 20\text{N} \Rightarrow F_{επ(\max)} = 10\text{N}$$

$$F_{επ(\max)} = DA = m\omega^2 A \Rightarrow A = \frac{10\text{N}}{2\text{kg} \cdot (10\text{rad/s})^2} \Rightarrow A = 0,05\text{m}$$

και η μέγιστη ταχύτητα είναι

$$v_{\max} = \omega A = (10 \text{ rad/s})(0,05 \text{ m}) \Rightarrow v_{\max} = 0,5 \text{ m/s}$$

6.B.24 α.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι την $t=0\text{s}$ που το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, $F_{\text{ελ}}=20\text{N}$. Από τη συνθήκη ισορροπίας για το σύστημα προκύπτει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - F_{\text{ελ}} = 0 \Rightarrow mg = 20\text{N} \text{ και } m = 2\text{kg}$$

Από το διάγραμμα και από τα δεδομένα του άξονα των χρόνων προκύπτει ότι

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{20} \text{ s} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s} \text{ και } \omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Για τη μέγιστη δύναμη επαναφοράς ισχύει

$$F_{\text{επ}(\max)} = F_{\text{ελ}(\max)} - mg = 30\text{N} - 20\text{N} \Rightarrow F_{\text{επ}(\max)} = 10\text{N}$$

$$F_{\text{επ}(\max)} = DA = m\omega^2 A \Rightarrow A = \frac{10\text{N}}{2\text{kg} \cdot (10 \text{ rad/s})^2} \Rightarrow A = 0,05\text{m}$$

Πρέπει να προσδιορίσουμε και την αρχική φάση. Η ταλάντωση γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο. Την $t=0\text{s}$ το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του και η $F_{\text{ελ}}$ είναι θετική και αυξάνεται, αυτό δηλώνει ότι στο χρονικό διάστημα από 0 έως $T/4$ η επιμήκυνση του ελατηρίου αυξάνεται. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει το σώμα να κινείται προς τα κάτω και επειδή έχουμε πάρει τα θετικά προς τα κάτω δεν υπάρχει αρχική φάση, άρα $x=0,05\mu(10t)$, (S.I.)

6.B.25 α.

Η ταλάντωση του συστήματος $m_2 - k$ γίνεται γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$, που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g - k \Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{m_2 g}{k} \quad (1)$$

Η ταλάντωση του συστήματος ξεκίνησε από θέση που απέχει $\Delta \ell$ από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, που υπολογίζεται από τη συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k \Delta \ell = 0 \Rightarrow \Delta \ell = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

Το πλάτος ταλάντωσης θα είναι ίσο με τη διαφορά των δύο επιμηκύνσεων

$$A = \Delta \ell - \Delta \ell_0 \Rightarrow A = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow A = \frac{m_1 g}{k}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης συμπίπτει με το φυσικό μήκος του ελατηρίου, άρα

$$A = \Delta \ell_0 \Rightarrow \frac{m_1 g}{k} = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 1$$

6.B.26 β.

Η δύναμη επαναφοράς του σώματος δημιουργείται από τη δύναμη του ελατηρίου και το βάρος

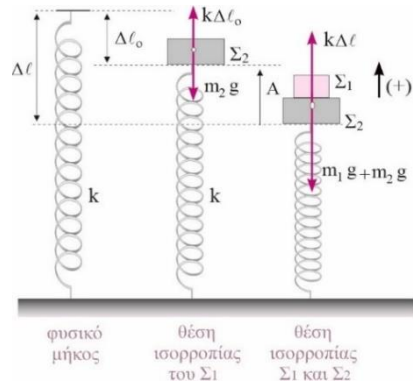
$$\Sigma F = F_{\epsilon\pi} \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} - mg = F_{\epsilon\pi} \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = F_{\epsilon\pi} + mg \quad (1)$$

Στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης το ελατήριο έχει τη μέγιστη επιμήκυνση και ασκεί τη μέγιστη δύναμη στο σώμα, οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε

$$F_{(\epsilon\lambda)\max} = F_{(\epsilon\pi)\max} + mg = 2mg + mg \Rightarrow F_{(\epsilon\lambda)\max} = 3mg$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι

$$\frac{F_{(\epsilon\pi)\max}}{F_{(\epsilon\lambda)\max}} = \frac{2mg}{3mg} = \frac{2}{3}$$



6.B.27 γ.

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης βρίσκεται κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$, που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg}{k}$$

Από την $F_{(\varepsilon\pi)\max}$ βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης

$$F_{(\varepsilon\pi)\max} = kA \Rightarrow 2mg = kA \Rightarrow A = \frac{2mg}{k}$$

Το πλάτος A είναι διπλάσιο του $\Delta\ell_0$, άρα όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου βρίσκεται σε απομάκρυνση x_1 από τη θέση ισορροπίας που είναι ίση με

$$x_1 = A - \Delta\ell_0 = A - \frac{A}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{A}{2}$$

Από τη σχέση ταχύτητας – απομάκρυνσης στην α.α.τ. έχουμε

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \pm \omega \sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2} \Rightarrow v = \pm v_{\max} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Άρα, } |v| = v_{\max} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6.B.28 β.

Στη θέση ισορροπίας για κάθε σώμα έχουμε

$$m_A g = k\Delta\ell_A, \quad (1)$$

$$m_B g = k\Delta\ell_B, \quad (2)$$

Επειδή $m_A = 4m_B$, έχουμε $\Delta \ell_A = 4\Delta \ell_B \Rightarrow A_A = 4A_B$

$$\frac{v_{A \max}}{v_{B \max}} = \frac{\omega_A A_A}{\omega_B A_B} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m_A}} A_A}{\sqrt{\frac{k}{m_B}} A_B} = \sqrt{\frac{m_B}{m_A}} \frac{A_A}{A_B} = 2 \Rightarrow v_{A \max} = 2v_{B \max}$$

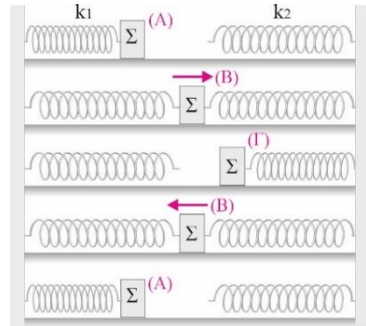
6.B.29 α.

$$A \rightarrow B: \quad t_{AB} = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k_1}}$$

$$B \rightarrow \Gamma \rightarrow B: \quad t_{B\Gamma B} = \frac{T_2}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k_2}}$$

$$B \rightarrow A: \quad t_{BA} = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k_1}}$$

$$t_{oA} = t_{AB} + t_{B\Gamma B} + t_{BA} = \pi \left(\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \sqrt{\frac{m}{k_2}} \right)$$



6.B.30 α.

Το σώμα Σ_2 δέχεται δύο δυνάμεις στον άξονα της κίνησής του, τη συνιστώσα του βάρους w_x και τη δύναμη επαφής F από το Σ_1 . Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσής του, άρα έχουμε

$$\Sigma F = F_{\epsilon\pi} \Rightarrow F - w_x = -D_2 x \Rightarrow F - m_2 g \eta \mu \theta = -D_2 x \Rightarrow F = m_2 g \eta \mu \theta - D_2 x \quad (1)$$

Η σταθερά επαναφοράς D_2 της ταλάντωσης του Σ_2 ισούται με

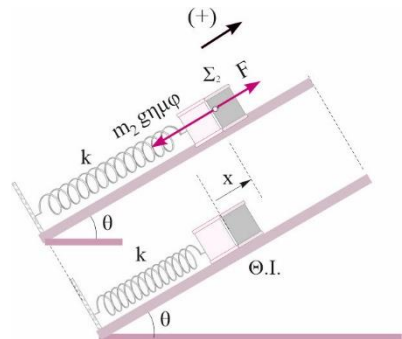
$$D_2 = m_2 \omega^2 = m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} \Rightarrow D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k$$

και η σχέση (1) γίνεται

$$F = m_2 g \eta \mu \theta - \frac{m_2}{m_1 + m_2} kx \quad (2)$$

Για να μην αποχωριστεί το Σ_1 από το Σ_2 πρέπει να μη μηδενιστεί η δύναμη F , $F > 0$. Σύμφωνα με τη σχέση (2) η τιμή της F ελαχιστοποιείται όταν το x μεγιστοποιείται, δηλαδή στην ακραία πάνω θέση της ταλάντωσης, οπότε από τη (2) έχουμε

$$F > 0 \Rightarrow m_2 g \eta \mu \theta > \frac{m_2}{m_1 + m_2} kA \Rightarrow kA < (m_1 + m_2) g \eta \mu \theta$$



6.B.31 α.

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_o$, που σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w \Rightarrow \Delta\ell_o = \frac{mg}{k}$$

Εφόσον το σώμα ξεκινάει πάνω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά mg/k , το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$A = 2\Delta\ell_o = 2mg/k$$

και η χαμηλότερη θέση που θα βρεθεί το σώμα απέχει $A = 2mg/k$ κάτω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Το χαμηλότερο σημείο της ταλάντωσης απέχει d από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, δηλαδή

$$d = (mg/k) + (2mg/k) \text{ ή } d = \frac{3mg}{k} \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{d}{3g}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

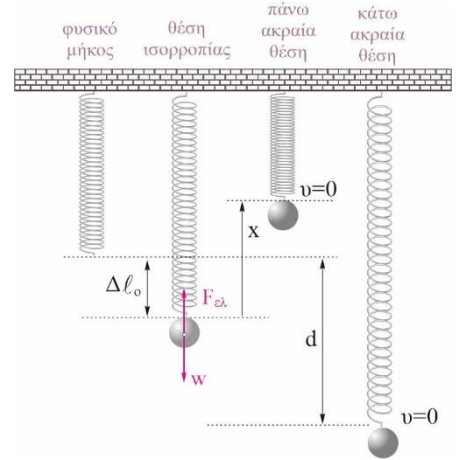
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{3g}}$$

6.B.32 γ.

Το σώμα μάζας m_1 ισορροπεί εξαιτίας τριών δυνάμεων, του βάρους του w_1 , της δύναμης του ελατηρίου σταθεράς k_1 και της τάσης του νήματος T . Η θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_1 απέχει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_1 κατά $\Delta\ell_1$, που σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ,1} = T + w_1 \Rightarrow k_1\Delta\ell_1 = m_1g + m_1g \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{2m_1g}{k_1} \quad (1)$$

Ομοίως, το σώμα μάζας m_2 ισορροπεί εξαιτίας τριών δυνάμεων, του βάρους του w_2 , της δύναμης του ελατηρίου σταθεράς k_2 και της τάσης του νήματος T . Η θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_2 απέχει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_2 κατά $\Delta\ell_2$, που σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας ισούται με



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ,2} + T = w_2 \Rightarrow k_2 \Delta \ell_2 = m_2 g - m_1 g \Rightarrow \Delta \ell_2 = \frac{m_2 g - m_1 g}{k_2} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) και από την ισότητα $\Delta \ell_1 = \Delta \ell_2$, προκύπτει

$$\Delta \ell_1 = \Delta \ell_2 \Rightarrow \frac{2m_1 g}{k_1} = \frac{m_2 g - m_1 g}{k_2} \Rightarrow \frac{2m_1 g}{2k_2} = \frac{m_2 g - m_1 g}{k_2} \Rightarrow$$

$$2m_1 g = 2m_2 g - 2m_1 g \Rightarrow 2m_1 = m_2$$

και η σχέση των περιόδων των δύο ταλαντώσεων είναι

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2m_1}{k_1/2}} \Rightarrow T_2 = 2T_1$$

Παρατήρηση: αν θέσουμε τη Θ.Ι. του σώματος Σ_2 πιο πάνω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_2 και πάρουμε τις σχέσεις ισορροπίας θα καταλήξουμε σε άτοπο.

6.B.33 γ.

Το σώμα Σ_2 ταλαντώνεται μαζί με το Σ_1 , οπότε έχει την ίδια γωνιακή συχνότητα με το σύστημα.

Η σταθερά επαναφοράς για την ταλάντωση του Σ_2 είναι

$$D_2 = m_2 \omega^2$$

Η σταθερά επαναφοράς για την ταλάντωση του συστήματος είναι

$$D = k = (m_1 + m_2) \omega^2$$

Με διαίρεση κατά μέλη των δύο προηγούμενων σχέσεων παίρνουμε

$$\frac{D_2}{k} = \frac{m_2 \omega^2}{(m_1 + m_2) \omega^2} \Rightarrow D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k$$

6.B.34 γ.

Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος $m_1 - k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση $\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow m_1 g = k\Delta\ell_0$ (1)

Μετά την προσθήκη της μάζας m_2 ξεκινά ταλάντωση γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από την αρχική κατά $\Delta\ell_1$, που βρίσκεται από τη νέα συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k(\Delta\ell_0 + \Delta\ell_1) = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} m_2 g = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{m_2 g}{k}$$

Το σημείο τοποθέτησης του σώματος Σ_2 αποτελεί την πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης, άρα το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος είναι $A = \Delta\ell_1 = \frac{m_2 g}{k}$.

Το Σ_2 εκτελεί α.α.τ., οπότε σε κάθε θέση ισχύει $\Sigma F_2 = -D_2 x$.

Όμως $D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k = \frac{k}{2}$ (βλέπε προηγούμενο θέμα), οπότε έχουμε

$$\Sigma F_2 = -\frac{k}{2} x$$

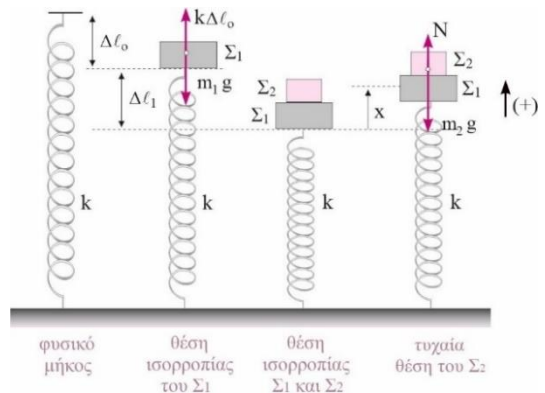
Τη δύναμη επαναφοράς του Σ_2 τη δημιουργούν το βάρος του και η δύναμη F που δέχεται από το Σ_1 , οπότε από την τελευταία σχέση έχουμε

$$\Sigma F_2 = -\frac{k}{2} x \Rightarrow F - m_2 g = -\frac{k}{2} x \Rightarrow F = m_2 g - \frac{k}{2} x, \quad -\frac{m_2 g}{k} \leq x \leq \frac{m_2 g}{k}$$

Η μέγιστη τιμή της δύναμης ασκείται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης, για $x = -A = -\frac{m_2 g}{k}$

. Η αντικατάσταση δίνει

$$F_{\max} = m_2 g - \frac{k}{2} \left(-\frac{m_2 g}{k} \right) \Rightarrow F_{\max} = \frac{3}{2} m_2 g$$



6.B.35 β.

Το Σ_2 εκτελεί α.α.τ., οπότε σε κάθε θέση ισχύει $\Sigma F_2 = -D_2 x$ (1) με τη γωνιακή συχνότητα του Σ_2 να είναι ίση με τη γωνιακή συχνότητα του συστήματος.

Η σταθερά επαναφοράς του Σ_2 είναι $D_2 = m_2 \omega^2$.

Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος είναι

$$D = k = (m_1 + m_2) \omega^2$$

Με διαίρεση κατά μέλη των δύο προηγούμενων σχέσεων παίρνουμε

$$\frac{D_2}{k} = \frac{m_2 \omega^2}{(m_1 + m_2) \omega^2} \Rightarrow D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k = \frac{k}{2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε $\Sigma F_2 = -\frac{k}{2} x$.

Στη διεύθυνση της κίνησης του Σ_2 η μόνη δύναμη που ασκείται στο Σ_2 είναι η δύναμη της στατικής τριβής, οπότε έχουμε

$$T_{\sigma\tau} = \Sigma F_2 = -\frac{k}{2} x \Rightarrow T_{\sigma\tau} = -\frac{1}{2} k A \eta \mu \omega t$$

6.B.36 γ.

Το Σ_2 εκτελεί α.α.τ., οπότε σε κάθε θέση ισχύει $\Sigma F_2 = -D_2 x$ (1) με τη γωνιακή συχνότητα του Σ_2 να είναι ίση με τη γωνιακή συχνότητα του συστήματος.

Η σταθερά επαναφοράς του Σ_2 είναι $D_2 = m_2 \omega^2$.

Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος είναι

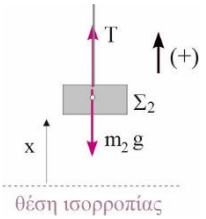
$$D = k = (m_1 + m_2) \omega^2$$

Με διαίρεση κατά μέλη των δύο προηγούμενων σχέσεων παίρνουμε

$$\frac{D_2}{k} = \frac{m_2 \omega^2}{(m_1 + m_2) \omega^2} \Rightarrow D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k \Rightarrow D_2 = \frac{3k}{4}$$

Στη διεύθυνση της κίνησης του Σ_2 ασκούνται η τάση του νήματος και το βάρος του σώματος, οπότε η σχέση (1) γίνεται

$$\Sigma F_2 = -D_2 x \Rightarrow T - m_2 g = -\frac{3k}{4} x \Rightarrow T = m_2 g - \frac{3k}{4} x$$



Για να μη χαλαρώσει το νήμα πρέπει $T \geq 0$, οπότε από την τελευταία σχέση έχουμε

$$m_2 g - \frac{3k}{4} x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{4m_2 g}{3k} \Rightarrow x_{\max} = \frac{4m_2 g}{3k}$$

6.B.37 β.

Το σώμα Σ_2 δέχεται μόνη δύναμη στον άξονα της κίνησής του, τη στατική τριβή. Αφού δεν ολισθαίνει οριακά, η μέγιστη δύναμη που δέχεται στην ακραία θέση, ισούται με την οριακή τριβή. Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του Σ_2 ισούται με

$$D_2 = m_2 \omega^2 = m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} \Rightarrow D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k \Rightarrow D_2 = \frac{k}{2} \text{ . Άρα}$$

$$F_{\text{ερ}, \max} = T_{\sigma, \max} \Rightarrow D_2 A = \mu N \Rightarrow \frac{k}{2} A = \mu m_2 g \Rightarrow A = \frac{2\mu m g}{k}$$

6.B.38 β.

Το σώμα Σ_1 δέχεται δύο δυνάμεις στον άξονα της κίνησής του, το βάρος w και τη δύναμη επαφής N από το Σ_2 . Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης του, άρα έχουμε

$$\Sigma F = F_{\text{ερ}} \Rightarrow N - w = -D_1 x \Rightarrow N - m_1 g = -D_1 x \Rightarrow N = m_1 g - D_1 x \quad (1)$$

με το x να μετρά από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης και τα θετικά προς τα πάνω.

Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του Σ_1 ισούται με

$$D_1 = m_1 \omega^2 = m_1 \frac{k}{m_1 + m_2} \Rightarrow D_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} k \text{ , οπότε η (1) γίνεται } N = m_1 g - \frac{m_1}{m_1 + m_2} kx \quad (2)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2) η τιμή της N ελαχιστοποιείται όταν το x μεγιστοποιείται, δηλαδή στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης, οπότε από τη (2) έχουμε

$$N = 0 \Rightarrow m_1 g - \frac{m_1}{m_1 + m_2} k x_{\max} = 0 \Rightarrow x_{\max} = m_1 g \frac{m_1 + m_2}{m_1 k} \Rightarrow x_{\max} = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = A$$

Οι ακραίες θέσεις της ταλάντωσης απέχουν μεταξύ τους $2A$, οπότε στην περίπτωση μας απέχουν

$$2x_{\max} = \frac{2(m_1 + m_2)g}{k}$$

6.B.39 α.

Το σώμα δέχεται δύο δυνάμεις στον άξονα της κίνησής του, το βάρος w και την τάση του νήματος T . Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης του, άρα έχουμε

$$\Sigma F = F_{\text{επ}} \Rightarrow T - w = -Dx \Rightarrow T - mg = -kx \Rightarrow T = mg - kx \quad (1)$$

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά d , που σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας ισούται με

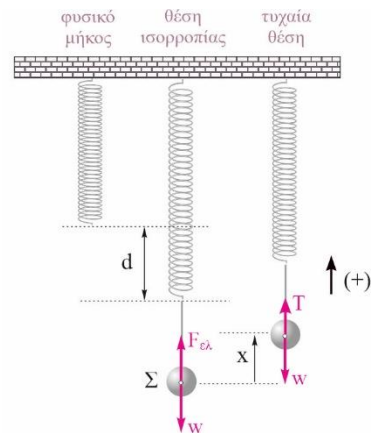
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\text{ελ}} = w \Rightarrow kd = mg, \text{ οπότε η σχέση (1) γίνεται}$$

$$T = kd - kx \quad (2)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2) η τιμή της T ελαχιστοποιείται όταν το x μεγιστοποιείται, δηλαδή στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης, οπότε από τη (2) έχουμε

$$T = 0 \Rightarrow kd - kx = 0 \Rightarrow x = d$$

Άρα, η ανώτερη θέση βρίσκεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το πλάτος είναι $A=d$.



6.B.40 γ.

Το σώμα Σ_2 δέχεται δύο δυνάμεις στον άξονα της κίνησής του, το βάρος του w_2 και την τάση του νήματος T . Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης του, οπότε έχουμε

$$\Sigma F = F_{\epsilon\pi} \Rightarrow T - w_2 = -D_2 x \Rightarrow T - m_2 g = -D_2 x \Rightarrow T = m_2 g - D_2 x \quad (1)$$

Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του Σ_2 ισούται με

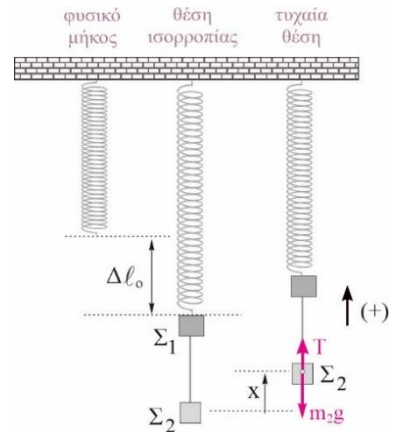
$$D_2 = m_2 \omega^2 = m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} \Rightarrow D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k \quad \text{οπότε η σχέση}$$

(1) γίνεται

$$T = m_2 g - \frac{m_2}{m_1 + m_2} kx \quad (2)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2) η τιμή της T μεγιστοποιείται όταν $x = -A$, δηλαδή στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης, όπου οριακά γίνεται ίση με την τιμή θραύσης. Από τη (2) έχουμε

$$T = T_{\theta\pi} \Rightarrow m_2 g + \frac{m_2}{m_1 + m_2} kA = 4m_2 g \Rightarrow \frac{1}{m_1 + m_2} kA = 3g \Rightarrow A = \frac{3(m_1 + m_2)g}{k}$$

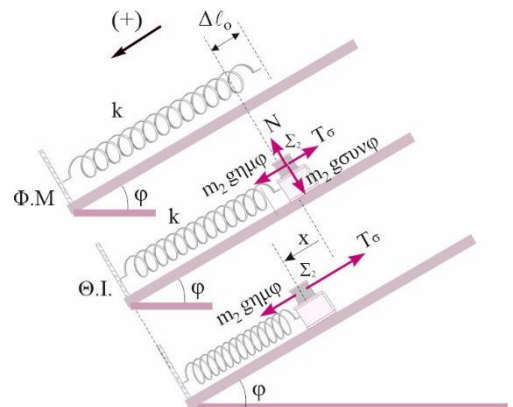


6.B.41 α.

Το σώμα Σ_2 δέχεται δύο δυνάμεις στον άξονα της κίνησής του, τη συνιστώσα του βάρους του που είναι παράλληλη με το πλάγιο επίπεδο, w_{2x} και τη στατική τριβή, T_σ . Η συνισταμένη των δύο δυνάμεων είναι η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης του, άρα η T_σ ισούται με

$$\Sigma F = F_{\epsilon\pi} \Rightarrow w_{2x} - T_\sigma = -D_2 x \Rightarrow m_2 g \eta \mu\varphi - T_\sigma = -D_2 x \Rightarrow T_\sigma = m_2 g \eta \mu\varphi + D_2 x \quad (1)$$

Η στατική τριβή, από τη σχέση (1) προκύπτει ότι γίνεται μέγιστη στην κάτω ακραία θέση. Αφού δεν ολισθαίνει οριακά, η στατική τριβή που δέχεται στην



ακραία θετική θέση, ισούται με την οριακή τριβή. Η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης του Σ_2 ισούται με

$$D_2 = m_2 \omega^2 = m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} \Rightarrow D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k$$

Άρα η σχέση (1) δίνει για $x=A$

$$T_{\sigma, \max} = m_2 g \eta \mu \varphi + D_2 A \Rightarrow \mu_{\sigma} N = m_2 g \eta \mu \varphi + \frac{m_2}{m_1 + m_2} k A \Rightarrow$$

$$\mu_{\sigma} m_2 g \sigma \nu \nu \varphi = m_2 g \eta \mu \varphi + \frac{m_2}{m_1 + m_2} k A \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} g \frac{\sqrt{3}}{2} = g \frac{1}{2} + \frac{1}{m_1 + m_2} k A \Rightarrow A = \frac{(m_1 + m_2) g}{4k}$$

Το σύστημα των δύο σωμάτων ισορροπεί πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_o$, που σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_{ολ,x} \Rightarrow k \Delta \ell_o = (m_1 + m_2) g \eta \mu \varphi \Rightarrow \Delta \ell_o = \frac{(m_1 + m_2) g}{2k}$$

Άρα, η μέγιστη συμπίεση, d , του ελατηρίου ισούται με

$$d = A + \Delta \ell_o = \frac{(m_1 + m_2) g}{4k} + \frac{(m_1 + m_2) g}{2k} \Rightarrow d = \frac{3(m_1 + m_2) g}{4k}$$

6.B.42 i. β. ii. α.

i. Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος $m_1 - k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_o$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g - k \Delta \ell_o = 0 \Rightarrow m_1 g = k \Delta \ell_o \quad (1)$$

Μετά την προσθήκη της μάζας m_2 ξεκινά νέα ταλάντωση γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από την αρχική κατά x_1 που βρίσκεται από τη νέα συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2) g - k(\Delta \ell_o + x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} m_2 g = k x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{m_2 g}{k}$$

ii. Τη στιγμή που το Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας έχει ταχύτητα $u_{\max} = 4 \text{ m/s}$, ενώ το Σ_2 πέφτει με ταχύτητα $u_2 = 2 \text{ m/s}$. Αν τα δύο σώματα είχαν ίδια φορά κίνησης δεν θα γινόταν σύγκρουση στη θέση ισορροπίας αλλά χαμηλότερα, καθώς $u_2 < u_{\max}$. Άρα η σύγκρουση έγινε καθώς το Σ_1 ανερχόταν.

6.B.43 i. β. ii. α.

i. Για τις περιόδους των δύο ταλαντώσεων έχουμε

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{m_A}{k_A}}, \quad T_B = 2\pi\sqrt{\frac{m_B}{k_B}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m_A}{2k_A}} \Rightarrow T_B = T_A$$

οπότε τα δύο σώματα φτάνουν ταυτόχρονα στη θέση ισορροπίας με μέγιστες ταχύτητες που είναι

$$v_{\max A} = \omega_A A_A = \frac{2\pi}{T_A} x_1 = v, \quad v_{\max 2} = \frac{2\pi}{T_B} 2x_1 \Rightarrow v_{\max B} = 2v$$

ii. Α.Δ.Ορμής

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_A v - m_B 2v = (m_A + m_B) V_K \Rightarrow m_A v - 2m_A 2v = (m_A + 2m_A) V_K \Rightarrow V_K = -v$$

Άρα, $|V_K| = v$

6.B.44 β.

Το Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση για χρονικό διάστημα t_K ίσο με τη μισή περίοδο της ταλάντωσης του

$$\Sigma_1, \quad t_K = \frac{T_1}{2} \quad (1)$$

$$h = \frac{1}{2} g t_K^2 \Rightarrow t_K = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{και} \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{1}{2} 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow \frac{2h}{g} = \pi^2 \frac{m_1}{k} \Rightarrow m_1 = \frac{2kh}{g\pi^2} \quad (2)$$

Το πλάτος ταλάντωσης ισούται με τη διαφορά των παραμορφώσεων του ελατηρίου στις δύο θέσεις ισορροπίας.

$$\text{Αρχ. θέση ισορ.: } \Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

$$\text{Θέση ισορ. ταλ.: } \Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g - k\Delta\ell_1 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{m_1 g}{k}$$

$$A = \Delta \ell_0 - \Delta \ell_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow A = \frac{m_2 g}{k} = \frac{m_1 g}{2k}$$

Η αντικατάσταση του m_1 από τη σχέση (2) δίνει

$$A = \frac{m_2 g}{k} = \frac{m_1 g}{2k} = \frac{\frac{2kh}{g\pi^2} g}{2k} \Rightarrow A = \frac{h}{\pi^2}$$

6.B.45 α.

Η ΑΔΜΕ για την κίνηση του Σ_1 μέχρι την κρούση δίνει

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow K_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\epsilon\lambda} + U_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$0 + m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2gm_1 g}{k}} \Rightarrow v_1 = g\sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση με ακίνητο το 2^ο σώμα ισχύει

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + 2m_1} g\sqrt{\frac{m_2}{k}} \Rightarrow v_2' = \frac{2g}{3} \sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

Το σώμα Σ_2 εκτελεί α.α.τ. γύρω από την αρχική του θέση ισορροπίας και η ταχύτητα v_2' που αποκτά είναι η $v_{\max}$ της ταλάντωσης

$$v_2' = v_{\max} \Rightarrow \frac{2g}{3} \sqrt{\frac{m_2}{k}} = \omega A \Rightarrow \frac{2g}{3} \sqrt{\frac{m_2}{k}} = \sqrt{\frac{k}{m_2}} A \Rightarrow A = \frac{2mg}{3k}$$

6.B.46 γ.

Καθώς η Θ.Ι. της αρχικής και της νέας ταλάντωσης συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, το σώμα Σ_1 ελάχιστα πριν την πλαστική κρούση έχει τη μέγιστη ταχύτητα, αλλά και το συσσωμάτωμα, μετά την κρούση, έχει τη μέγιστη ταχύτητα.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την πλαστική κρούση στον άξονα x , γιατί σ' αυτόν τον άξονα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις και παίρνουμε

$$p_{\alpha\rho\chi,x} = p_{\tau\epsilon\lambda,x} \Rightarrow m_1 v_{\max} = (m_1 + m_2) v_{\max}' \Rightarrow m_1 \omega_1 A_1 = (m_1 + m_2) \omega_2 A_2 \Rightarrow$$

$$m_1 \sqrt{\frac{k}{m_1}} 2A_2 = (m_1 + m_2) \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A_2 \Rightarrow m_1 \sqrt{\frac{1}{m_1}} 2 = (m_1 + m_2) \sqrt{\frac{1}{m_1 + m_2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{m_1} 2 = \sqrt{m_1 + m_2} \Rightarrow 4m_1 = m_1 + m_2 \Rightarrow m_2 = 3m_1$$

6.B.47 α.

Καθώς η Θ.Ι. της ταλάντωσης συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, η ταχύτητα που αποκτά το συσσωμάτωμα, μετά την κρούση, συμπίπτει με τη $v_{\max}$ της ταλάντωσης.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την πλαστική κρούση και παίρνουμε

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_2 v_0 = (m_1 + m_2) V_{\kappa} \Rightarrow V_{\kappa} = \frac{v_0}{4}$$

Από τη σχέση ισότητας της V_{κ} με $v_{\max}$ παίρνουμε

$$v_{\max} = V_{\kappa} \Rightarrow \omega A = V_{\kappa} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A = \frac{v_0}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{4m}} A = \frac{v_0}{4} \Rightarrow A = \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

και η μέγιστη δύναμη που δέχεται το συσσωμάτωμα ισούται με

$$F_{\max} = kA = k \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow F_{\max} = \frac{v_0}{2} \sqrt{mk}$$

6.B.48 α.

Κατά την πλαστική κρούση, το σώμα Σ_1 έχει μηδενική ταχύτητα, γιατί βρίσκεται στην ακραία θέση της ταλάντωσής του. Το συσσωμάτωμα, μετά την κρούση, έχει επίσης μηδενική ταχύτητα, όπως προκύπτει από την ΑΔΟ στον άξονα x , γιατί σ' αυτόν τον άξονα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, οπότε παίρνουμε

$$p_{\alpha\rho\chi,x} = p_{\tau\epsilon\lambda,x} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow m_1 \cdot 0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = 0 \text{ m/s}$$

Άρα, το συσσωμάτωμα, μετά την κρούση, θα βρίσκεται στην ακραία θέση της νέας ταλάντωσης, καθώς η Θ.Ι. δεν αλλάζει και παραμένει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Κατά συνέπεια το νέο πλάτος ισούται με το αρχικό, $A_2 = A_1$.

Για τις μέγιστες επιταχύνσεις των σωμάτων, πριν και μετά την κρούση, $\alpha_{\max,1}$ και $\alpha_{\max,2}$, αντίστοιχα, ισχύει

$$\alpha_{\max,1} = \omega_1^2 A_1 = \frac{k}{m_1} A_1$$

$$\alpha_{\max,2} = \omega_2^2 A_2 = \frac{k}{m_1 + m_2} A_2 = \frac{k}{2m_1} A_1 = \frac{\alpha_{\max,1}}{2} \Rightarrow \alpha_{\max,1} = 2\alpha_{\max,2}$$

6.B.49 γ.

Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς παραμένει σταθερή και επειδή ισούται με $F_{\max} = kA$ θα μένει ίδιο

και το πλάτος της ταλάντωσης. Επίσης θα μένει ίδια και η μέγιστη ταχύτητα, $v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A$.

Άρα, το σώμα Σ_1 μετά την κρούση, γύρισε προς τα πίσω με ίδιο μέτρο ταχύτητας, δηλαδή $v'_1 = -v_1 = -v_{\max}$.

Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύει η σχέση

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \Rightarrow -v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \left(-\frac{v_1}{3} \right) \Rightarrow$$

$$-1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \left(-\frac{1}{3} \right) \Rightarrow m_2 = 3m_1$$