

Θέματα Δ

6.Δ.1

α. Από το πεδίο τιμών της απομάκρυνσης, $-0,6\text{m} \leq x \leq 0,6\text{m}$ προκύπτει ότι το πλάτος είναι $A=0,6\text{m}$.

Από τη δύναμη επαναφοράς σε συνάρτηση με την απομάκρυνση έχουμε

$$F = -100x = -Dx \Rightarrow D = 100\text{N/m}$$

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα είναι } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 10\text{rad/s}$$

$$\text{και η μέγιστη ταχύτητα } v_{\max} = \omega A = 6\text{m/s}.$$

$$\beta. F = -100x \Rightarrow -30\sqrt{3} = -100x \Rightarrow x = 0,3\sqrt{3}\text{m}$$

Από τις χρονικές εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας έχουμε

$$x = A\eta\mu\omega t \Rightarrow \eta\mu\omega t = \frac{x}{A} \Rightarrow \eta\mu^2\omega t = \frac{x^2}{A^2} \quad (1)$$

$$v = v_{\max}\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega t = \frac{v}{v_{\max}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega t = \frac{v^2}{v_{\max}^2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\eta\mu^2\omega t + \sigma\upsilon\nu^2\omega t = \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{v_{\max}^2} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow$$

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow v = \pm 3\text{m/s} \Rightarrow |v| = 3\text{m/s}$$

γ. Η ταχύτητα σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

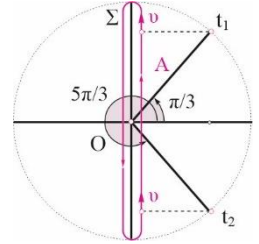
$$v = v_{\max}\sigma\upsilon\nu\omega t \Rightarrow v = 6\sigma\upsilon\nu 10t \Rightarrow 3 = 6\sigma\upsilon\nu 10t \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 10t = \frac{1}{2} \quad \text{ή}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin 10t$$

$$10t = \frac{\pi}{3} + 2\kappa\pi \xrightarrow{\kappa=0} t_1 = \frac{\pi}{30} \text{ s}$$

$$10t = \frac{5\pi}{3} + 2\kappa\pi \xrightarrow{\kappa=0} t_2 = \frac{5\pi}{30} \text{ s}$$

Οι δύο λύσεις βρίσκονται και από τον κύκλο αναφοράς, όπου η t_1 ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο και η t_2 ανήκει στο 4^ο τεταρτημόριο.



$$\delta. \frac{dW}{dt} = \frac{F_{\epsilon\pi} \cdot dx}{dt} = F_{\epsilon\pi} \cdot v \Rightarrow \frac{dW}{dt} = -D \cdot x \cdot v \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dW}{dt} \right| = |m\omega^2 \cdot A \cdot \eta \mu \omega t \cdot \omega A \cdot \sin \omega t| \Rightarrow$$

$$\left| \frac{dW}{dt} \right| = \frac{m\omega^3 A^2}{2} \cdot |\eta \mu 2\omega t|$$

Το μέτρο του ρυθμού παραγωγής ή κατανάλωσης έργου γίνεται μέγιστο όταν $\eta \mu 2\omega t = \pm 1$.

Από το $\eta \mu 2\omega t = 1$ έχουμε

$$\eta \mu 2\omega t = 1 \Rightarrow \eta \mu 2\varphi = \eta \mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\varphi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=0} \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\eta \xrightarrow{\kappa=1} \varphi = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

Από το $\eta \mu 2\omega t = -1$ έχουμε

$$\eta \mu 2\omega t = -1 \Rightarrow \eta \mu 2\varphi = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow 2\varphi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\kappa=1} \varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\eta \xrightarrow{\kappa=2} \varphi = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

6.Δ.2

A. α. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_{\text{ολ}}}} = 10 \text{ rad/s}$

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_2 είναι

$$D_2 = m_2 \omega^2 \Rightarrow D_2 = 100 \text{ N/m}$$

β. $\Sigma F = -D_2 x \Rightarrow$

$$F = m_2 g - D_2 x \Rightarrow F = 10 - 100x, -0,1 \text{ m} \leq x \leq +0,1 \text{ m}$$

B. α. Για την ταλάντωση του Σ_2 ισχύει $F = 10 - 100x$ (S.I.)

Το σώμα Σ_2 χάνει την επαφή με το Σ_1 όταν $F = 0 \text{ N}$ ή $x = 0,1 \text{ m}$, καθώς κινείται προς τα πάνω ($v > 0$).

β. Από τη σχέση ταχύτητας - απομάκρυνσης προκύπτει

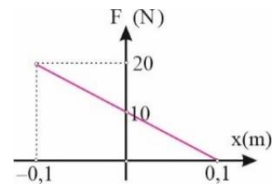
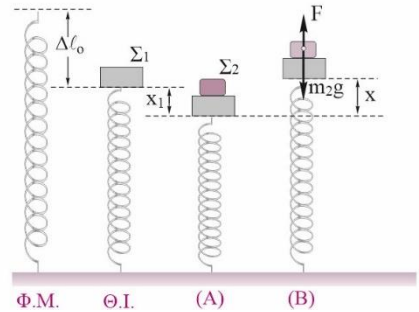
$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow v = \pm \sqrt{3} \text{ m/s} \Rightarrow v = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

γ. Η θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο μαζών είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k\Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = 0,1 \text{ m}$$

Άρα η απόσπαση του Σ_2 από το Σ_1 θα γίνει στο φυσικό μήκος του ελατηρίου. Έπειτα το Σ_2 θα εκτελέσει κατακόρυφη βολή προς τα πάνω και η ΑΔΜΕ δίνει το μέγιστο ύψος που θα φτάσει

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v^2 = m_2 g h \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = 0,15 \text{ m}$$



6.Δ.3

α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 20 \text{ rad / s}$$

Στη θέση ισορροπίας η ταχύτητα του Σ_1 είναι η μέγιστη της αρχικής ταλάντωσης, οπότε

$$v_{\max} = \omega A = 4 \text{ m / s}$$

β. Με εφαρμογή της ΑΔΟ μεταξύ των θέσεων 2 και 3 του σχήματος υπολογίζουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος

$$p_2 = p_3 \Rightarrow m_1 v_{\max} = (m_1 + m_2) V_K \Rightarrow V_K = 3 \text{ m / s}$$

γ. Η V_K είναι μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης. Η νέα γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 10\sqrt{3} \text{ rad / s}$$

και το νέο πλάτος

$$V_K = \omega' \cdot A' \Rightarrow A' = \frac{V_K}{\omega'} \Rightarrow A' = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

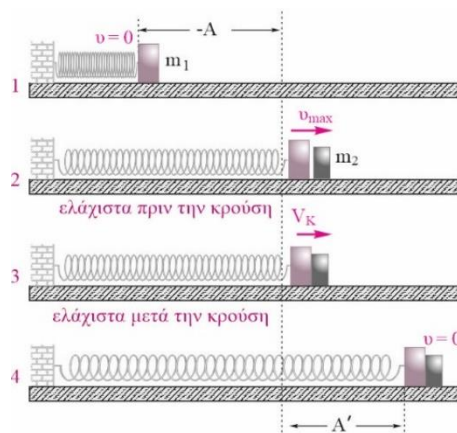
δ. Η θέση της σύγκρουσης είναι Θ.Ι. της ταλάντωσης και το συσσωμάτωμα κινείται προς τα θετικά, άρα δεν υπάρχει αρχική φάση και η εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με τον χρόνο δίνει

$$x = A \eta \mu \omega t \Rightarrow x = 0,1\sqrt{3} \cdot \eta \mu 10\sqrt{3}t \text{ (SI)} = 0,1\sqrt{3} \cdot \eta \mu (10\sqrt{3} \cdot 0,05\sqrt{3}\pi) \text{ m} \Rightarrow$$

$$x = 0,1\sqrt{3} \cdot \eta \mu (1,5\pi) \text{ m} \Rightarrow x = 0,1\sqrt{3} \text{ m}$$

Η δύναμη που δέχεται το συσσωμάτωμα είναι

$$F = -kx = -1200 \cdot 0,1\sqrt{3} \text{ N} \Rightarrow F = -120\sqrt{3} \text{ N}$$



6.Δ.4

Α. Η κίνηση του αυτοκινήτου κατά τη σύγκρουση είναι αντίστοιχη της κίνησης ενός οριζόντιου συστήματος μάζας - ελατηρίου, από τη θέση ισορροπίας μέχρι τη μέγιστη συσπείρωση. Η γωνιακή

συχνότητα είναι $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = 200 \text{ rad/s}$

και από τη μέγιστη ταχύτητα προκύπτει το πλάτος

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = 0,075 \text{ m}$$

Η χρονική διάρκεια της συσπείρωσης κατά τη σύγκρουση είναι

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{400} \text{ s}$$

Β. α. Η σταθερά επαναφοράς του παιδιού είναι

$$D_{\pi} = m\omega^2 \Rightarrow D_{\pi} = 8 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

β. $T_{\sigma\tau(\max)\pi} = \mu \cdot N = \mu \cdot mg \Rightarrow T_{\sigma\tau(\max)\pi} = 200 \text{ N}$

γ. $F_{\varepsilon\pi(\max)} = D_{\pi} \cdot A \Rightarrow F_{\varepsilon\pi(\max)} = 60.000 \text{ N}$

Αυτή είναι η μέγιστη δύναμη που πρέπει να ασκηθεί στο παιδί για να μην κινηθεί ως προς το κάθισμα. Από τα 60.000N, ασκούνται 200N λόγω στατικής τριβής και τα υπόλοιπα 59.800N από τη ζώνη.

δ. Στην περίπτωση αυτή η μέγιστη δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο παιδί είναι ίση με την $T_{\sigma,\max}=200\text{N}$. Είναι

$$F_{\varepsilon\pi(\max)} = D_{\pi} \cdot A_1 \Rightarrow A_1 = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$v_{1(\max)} = \omega \cdot A_1 \Rightarrow v_{1(\max)} = 0,05 \text{ m/s}$$

6.Δ.5

α. Για τη θέση ισορροπίας (α) ισχύει

$$\Sigma F=0 \quad \text{ή} \quad w-F_{ελ}-A=0 \quad \text{ή} \quad mg-k\Delta\ell_o-A=0 \quad \text{ή} \\ mg-k\Delta\ell_o-dgSx_1=0 \quad (1)$$

Για τη θέση (β) που ο κύλινδρος έχει εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας, έχουμε

$$\Sigma F = w-F'_{ελ}-A'=0 \quad \text{ή} \\ \Sigma F = mg-k(\Delta\ell_o+x)-dgS(x_1+x) \quad \text{ή} \\ \Sigma F = mg-k\Delta\ell_o-dgSx_1-x(k+dgS) \\ \text{που με τη βοήθεια της (1) δίνει}$$

$$\Sigma F = -(k+dgS)x$$

Η τελευταία σχέση ικανοποιεί τη συνθήκη της α.α.τ. με $D = k+dgS$.

$$\beta. \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k+dgS}} \quad \text{ή} \quad T = 0,2\pi \text{ s}$$

$$\gamma. \quad \text{Η γωνιακή συχνότητα είναι } \omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \text{ rad/s}$$

$$\text{και η μέγιστη ταχύτητα } v_{\max} = \omega A = \omega x_1 \Rightarrow v_{\max} = 1 \text{ m/s}.$$

Η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\pi/2 \text{ rad}$ και η εξίσωσης ταχύτητας - χρόνου δίνει

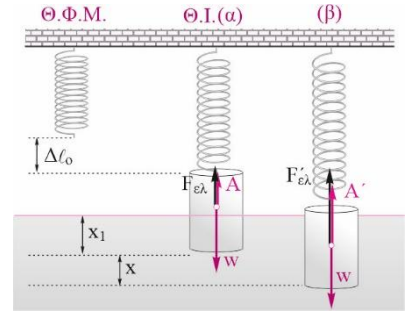
$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_o) = 1 \cdot \sin\left(10 \cdot 0,025\pi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow v = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m/s}$$

δ. Η απομάκρυνση εκείνη τη στιγμή είναι

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o) = 0,1\eta\mu\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = 0,1\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m}$$

και η δύναμη επαναφοράς ισούται με

$$F = -Dx = -m\omega^2 x \Rightarrow F = -5\sqrt{2} \text{ N}$$



6.Δ.6

α. Η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο σωμάτων είναι $T_{\sigma, \max} = \mu m_1 g = 0,64 \text{ N}$. Η στατική τριβή παίζει τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς για την ταλάντωση του Σ_1 .

Άρα

$$F_{\max} = T_{\sigma, \max} \Rightarrow D_1 A = m_1 \omega_{\max}^2 A = 0,64 \text{ N} \Rightarrow \omega_{\max} = 8 \text{ rad / s}$$

$$\beta. \Sigma F_{\text{ολ}} = -(m_1 + m_2) \omega^2 x \Rightarrow |\Sigma F_{\text{ολ, max}}| = (m_1 + m_2) \omega^2 A \Rightarrow |\Sigma F_{\text{ολ, max}}| = 1,92 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} \gamma. \frac{dW}{dt} &= \frac{F_{\varepsilon\pi} \cdot dx}{\Delta t} = F_{\varepsilon\pi} \cdot v \Rightarrow \frac{dW}{dt} = -D \cdot x \cdot v \Rightarrow \\ \frac{dW}{dt} &= -m \omega^2 \cdot A \cdot \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \cdot \omega A \cdot \sigma \upsilon \nu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow \\ \frac{dW}{dt} &= -\frac{m \omega^3 A^2}{2} \cdot \eta \mu 2(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Ο μέγιστος ρυθμός παραγωγής έργου είναι

$$\left| \frac{\Delta W}{\Delta t} \right|_{\max} = \frac{(m_1 + m_2) \omega^3 A^2}{2} = 0,384 \text{ J / s}$$

δ. Η εξωτερική δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σύστημα στα τεταρτημόρια 2° και 4° , όπου το σώμα εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση, ενώ στα 1° και 3° αφαιρεί ενέργεια. Τη στιγμή $t=0\text{s}$ η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\pi/2 \text{ rad}$, οπότε ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας γίνεται μέγιστος για 2° φορά όταν το σώμα κινείται από την ακραία αρνητική απομάκρυνση προς τη θέση ισορροπίας (4° τεταρτημόριο)

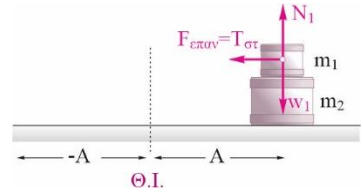
$$\begin{aligned} \eta \mu 2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) &= -1 \Rightarrow \eta \mu 2\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) = \eta \mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow 8t + \frac{\pi}{2} = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ \xrightarrow{\kappa=2} \Rightarrow t &= \frac{5\pi}{32} \text{ s} \end{aligned}$$

6.Δ.7

α. Τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ_1 φτάνει στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του για πρώτη φορά, δηλαδή σε $t=T/2$, το Σ_2 έχει κατέβει κατά $h=0,2\text{m}$, κάνοντας ελεύθερη πτώση. Άρα η σταθερά του ελατηρίου είναι

$$t_{\kappa\alpha\theta} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,2\text{s} = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 0,4\text{s}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = 250 \text{ N / m}$$



$$\beta. x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Η θέση ισορροπίας των δύο σωμάτων είναι πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση ισορροπίας,

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_{ολ} \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = \frac{2mg}{k}$$

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του Σ_1 είναι πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_1$ που ισούται, σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας, με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{mg}{k}$$

Οι δύο θέσεις ισορροπίας απέχουν μεταξύ τους κατά $\Delta\ell_0 - \Delta\ell_1$ που ισούται με το πλάτος της ταλάντωσης

$$A = \Delta\ell_0 - \Delta\ell_1 = \frac{mg}{k} \Rightarrow A = 0,04\text{m}$$

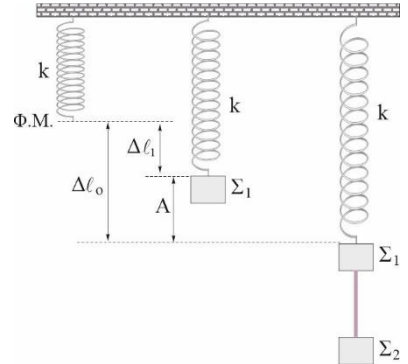
$$\text{Η γωνιακή συχνότητα είναι } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 5\sqrt{10}\text{rad/s}.$$

Τη στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα Σ_1 ξεκινά από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με τον χρόνο είναι

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,04\eta\mu(5\sqrt{10}t + \frac{\pi}{2}), (\text{S.I.})$$

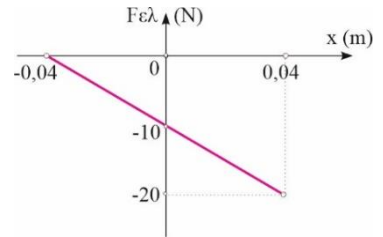


$$\gamma. \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -Dx, \quad \frac{dp}{dt} = \pm 10 \text{ kgm/s}^2$$

δ. Στην τυχαία απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$ και η δύναμη του ελατηρίου

$$F_{ελ} = -k(\Delta\ell_0 + x) = -k\Delta\ell_0 - kx \xrightarrow{(\text{I})} F_{ελ} = -10 - 250x \text{ (SI)}$$

$$-0,04\text{m} \leq x \leq 0,04\text{m} \quad (\text{τα θετικά προς τα κάτω})$$



6.Δ.8

Α. α. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει

$$A = 0,2\text{m}, \quad \omega = 5\text{rad/s} \quad \text{και} \quad \varphi_0 = \pi/2\text{rad}.$$

Η θέση ισορροπίας των δύο σωμάτων είναι πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που ισούται, σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας, με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_{ολ} \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του Σ_1 είναι πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_1$ που ισούται, σύμφωνα με τη σχέση ισορροπίας, με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{m_1 g}{k}$$

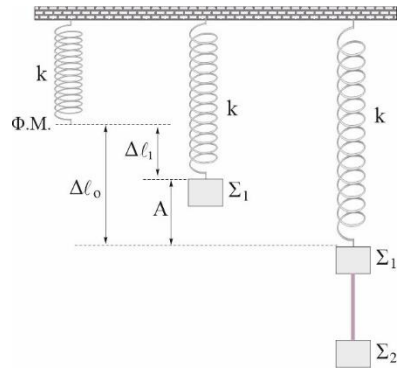
Οι δύο θέσεις ισορροπίας απέχουν μεταξύ τους κατά $\Delta\ell_0 - \Delta\ell_1$ που ισούται με το πλάτος της ταλάντωσης

$$A = \Delta\ell_0 - \Delta\ell_1 = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow k = \frac{m_2 g}{A} = 100 \text{ N/m}$$

$$\beta. m_1 \omega^2 = k \Rightarrow m_1 = 4 \text{ kg}$$

Β. α. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του Σ_1 είναι η δύναμη επαναφοράς που δέχεται

$$\frac{dp}{dt} = F_{επ} = -kx = -k(\Delta\ell - \Delta\ell_1) = -k\left(\Delta\ell - \frac{m_1 g}{k}\right) \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -10 \text{ kgm/s}^2$$



β. Η απομάκρυνση είναι $x = \Delta \ell - \Delta \ell_1 = 0,1\text{m}$ και το σώμα ανεβαίνει, δηλαδή κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας, άρα $v < 0$. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης έχουμε

$$0,1 = 0,2 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1) \\ 5t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \quad (2) \end{array} \right\} \xrightarrow{(2), k=0} 5t_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow$$

$$5t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{15}\text{s}$$

γ. Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας δίνει

$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = 1 \cdot \sin(5\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow v = -\frac{\sqrt{3}}{2}\text{m/s}$$

$$\text{Άρα } |v| = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{m/s}.$$

6.Δ.9

α. Το σώμα μάζας m ισορροπεί εξαιτίας τριών δυνάμεων, του βάρους του w , της δύναμης του ελατηρίου σταθεράς k_A και της δύναμης του ελατηρίου σταθεράς k_B . Η θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m απέχει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_A κατά x_A και από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_B κατά x_B . Η σχέση ισορροπίας δίνει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k_A x_A = k_B x_B + mg \Rightarrow k_B = 300\text{N/m}$$

β. Για τη θέση ισορροπίας ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\omega, A} - F_{\omega, B} - mg = 0 \Rightarrow k_B x_B + mg = k_A x_A \quad (1)$$

Στην τυχαία απομάκρυνση x προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας, με τα θετικά προς τα κάτω, η ΣF που ασκείται στο σώμα είναι

$$\Sigma F = mg + k_B (x_B - x) - k_A (x_A + x) \Rightarrow \Sigma F = mg + k_B x_B - k_A x_A - (k_B + k_A)x$$

η οποία με τη βοήθεια της (1) δίνει

$\Sigma F = -(k_B + k_A)x$, άρα ικανοποιείται η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα α.α.τ. με $D = k_B + k_A = 400 \text{ N/m}$ και περίοδο

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\text{kg}}{400\text{N/m}}} \Rightarrow T = 0,1\pi \text{ s}$$

γ. Τη στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα αφέθηκε από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\delta. \text{ Η γωνιακή συχνότητα είναι } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 20 \text{ rad/s}$$

$$\text{και η μέγιστη ταχύτητα } v_{\max} = \omega A = 0,4 \text{ m/s.}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με τον χρόνο είναι

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,02\eta\mu(20t + \frac{\pi}{2}), (\text{S.I.})$$

Όταν το σώμα διανύσει μήκος τροχιάς ίσο με 3cm θα βρεθεί στη θέση $x=-1\text{cm}$ με ταχύτητα αρνητική. Άρα

$$\begin{aligned} -1\text{cm} &= 2\text{cm} \cdot \eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} 20t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (1) \\ 20t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (2) \end{array} \right\} &\xrightarrow{(2), k=0} 20t_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow 20t_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{30} \text{ s} \end{aligned}$$

6.Δ.10

α. Για τη θέση ισορροπίας του συστήματος ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ,Α} + F_{ελ,Β} - mg\eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$k_1 x_1 + k_2 x_1 = mg\eta\mu\varphi \quad (1)$$

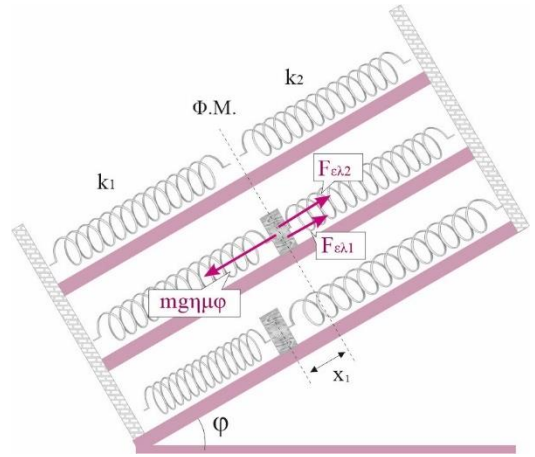
Στην τυχαία απομάκρυνση x , πάνω από τη θέση ισορροπίας και κάτω από τα φυσικά μήκη των ελατηρίων (με τα θετικά προς τα πάνω), η ΣF που ασκείται στο σώμα είναι

$$\Sigma F = k_2 (x_1 - x) + k_1 (x_1 - x) - mg\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\Sigma F = k_2 x_1 + k_1 x_1 - mg\eta\mu\varphi - (k_1 + k_2)x$$

η οποία με τη βοήθεια της (1) δίνει

$$\Sigma F = -(k_1 + k_2)x ,$$



άρα ικανοποιείται η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα α.α.τ. με

$$D = k_1 + k_2 = 200 \text{ N / m και περίοδο}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\text{kg}}{200\text{N / m}}} \Rightarrow T = 0,2\pi\text{s}$$

β. Η μέγιστη συσπείρωση του k_1 αντιστοιχεί στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης, οπότε

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{10}\text{s}$$

$$\gamma. x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα είναι } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 10\text{rad / s .}$$

Τη στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα αφέθηκε από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad .}$$

Από τη σχέση (1) θα προκύψει το πλάτος ταλάντωσης, αφού ισούται με την απόσταση μεταξύ των θέσεων φυσικού μήκους των ελατηρίων και της Θ.Ι.

$$k_1 x_1 + k_2 x_1 = mg \eta \mu \varphi \Rightarrow x_1 = \frac{mg \eta \mu \varphi}{k_1 + k_2} = 0,05 \text{ m}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με τον χρόνο είναι

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,05 \eta \mu(10t + \frac{\pi}{2}), (\text{S.I.})$$

δ. Η εξίσωση επιτάχυνσης - απομάκρυνσης δίνει

$$a = -\omega^2 x \Rightarrow x = -\frac{a}{\omega^2} = -0,025 \text{ m}$$

Όταν το σώμα βρεθεί για πρώτη φορά στη θέση $x = -0,025 \text{ m}$ θα έχει αρνητική ταχύτητα, δηλαδή θα επιλέξουμε λύση που βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο. Άρα

$$\begin{aligned} -0,025 &= 0,05 \eta \mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta \mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} = \eta \mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} 10t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (1) \\ 10t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (2) \end{array} \right\} &\xrightarrow{(2), k=0} 10t_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow 10t_1 = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{15} \text{ s} \end{aligned}$$

6.Δ.11

α. Στη θέση ισορροπίας τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος. Στην τυχαία απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας προς τα θετικά, η ΣF που ασκείται στο σώμα είναι

$$\Sigma F = -k_B x - k_A x \Rightarrow \Sigma F = -(k_A + k_B) x$$

άρα ικανοποιείται η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα α.α.τ. με

$$D = k_A + k_B = 400 \text{ N / m}$$

β. Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_A είναι

$$D_A = m_A \omega^2 = m_A \frac{D}{m_A + m_B} \Rightarrow D_A = 300 \text{ N / m}$$

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_B είναι

$$D_B = m_B \omega^2 = m_B \frac{D}{m_A + m_B} \Rightarrow D_B = 100 \text{ N / m}$$

$$\gamma. x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Η θέση που ελευθερώνουμε το σύστημα είναι ακραία θέση, άρα το πλάτος είναι $A=0,1\text{m}$.

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα είναι } \omega = \sqrt{\frac{D}{m_A + m_B}} = 10\text{rad/s}.$$

Τη στιγμή $t=0\text{s}$ το σύστημα αφέθηκε από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε σχέση με τον χρόνο είναι

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 0,1\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}), (\text{S.I.})$$

$$\delta. \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\Sigma_B} = \Sigma F_B = -D_B x, \quad \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\max} = -100 \frac{\text{N}}{\text{m}}(-0,1\text{m}) = 10\text{N}$$

ε. Η στατική τριβή που δέχεται το Σ_B έχει τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς. Άρα

$$T_{\sigma\tau} \leq \mu m_B g \Rightarrow \mu \geq \frac{10\text{N}}{10\text{N}} \Rightarrow \mu \geq 1$$

Άρα, $\mu_{\min}=1$.

6.Δ.12

α. Από τη σχέση απομάκρυνσης - ταχύτητας,

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \quad (1) \text{ με αντικατάσταση}$$

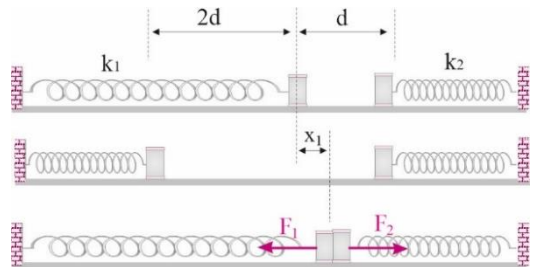
$x=d$ έχουμε

$$v_1 = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \sqrt{(2d)^2 - d^2} \Rightarrow$$

$$v_1 = 3\sqrt{3}\text{m/s}$$

β. Η ΑΔΟ για την πλαστική κρούση δίνει

$$V_K = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \sqrt{3}\text{ m/s}$$



γ. Για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος που βρίσκεται σε απόσταση x_1 από το φυσικό μήκος του ελατηρίου k_1 έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 (d - x_1) \quad (1)$$

Σε απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας, παίρνοντας θετικά προς τα δεξιά, έχουμε

$$\Sigma F = -k_1 (x_1 + x) + k_2 (d - x_1 - x) \Rightarrow \Sigma F = -k_1 x_1 + k_2 d - k_2 x_1 - (k_1 + k_2) x$$

η οποία με τη βοήθεια της (1) δίνει

$$\Sigma F = -(k_1 + k_2) x, \text{ άρα } D = k_1 + k_2 = 500 \text{ N/m}.$$

δ. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι σε απόσταση x_1 από το φυσικό μήκος του ελατηρίου k_1 που σύμφωνα με τη σχέση (1) είναι

$$k_1 x_1 = k_2 (d - x_1) \Rightarrow x_1 = 24 \text{ cm}$$

Άρα η κρούση έγινε στη θέση $x = d - x_1 = 6 \text{ cm}$ δεξιά από τη Θ.Ι. Εφαρμόζουμε πάλι τη σχέση (1) και έχουμε

$$V_k = \omega' \sqrt{A'^2 - x^2} = \sqrt{\frac{D}{m_{\text{ολ}}}} \sqrt{A'^2 - x^2} \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{m_{\text{ολ}}}{D} V_k^2 + x^2} \Rightarrow$$

$$A' = 6\sqrt{6} \text{ cm}$$

6.Δ.13

$$\text{Α. α. } T = 2\pi \sqrt{\frac{M+m}{k}} \Rightarrow T = 0,02 \pi \text{ s}$$

β. Η θέση ισορροπίας δεν αλλάζει με την κρούση. Άρα η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι μέγιστη για τη νέα ταλάντωση και ισούται με

$$V_k = v_{\text{max}} = \omega A \Rightarrow V_k = \frac{2\pi}{T} A = 10 \text{ m/s}$$

γ. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης ορμής για το σύστημα κατά την κρούση και έχουμε

$$mv = (M + m)V_k \Rightarrow v = \frac{(M + m)V_k}{m} \Rightarrow v = 100 \text{ m/s}$$

$$\text{Β. } x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow x = 0,1 \eta \mu 100t \text{ (S.I.)}$$

6.Δ.14

α. Το σώμα Σ_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση, ενώ το Σ_1 εκτελεί α.α.τ. με σταθερά επαναφοράς

$$D = k_1 + k_2 = 200 \text{ N/m}.$$

Η σύγκρουση γίνεται σε χρόνο $T_1/4$, δηλαδή ο χρόνος καθόδου του Σ_2 είναι $t_k = T_1/4$. Άρα

$$h = \frac{1}{2} g t_k^2, \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1 + k_2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{10} \text{ s}, \quad t_k = \frac{T}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{40} \text{ s}$$

$$h = \frac{1}{2} 10 \frac{\pi^2}{160} 2m = 0,625m$$

β. Η περίοδος της νέας ταλάντωσης είναι

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{D}}, \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{1,44}{200}} \text{ s}, \quad \frac{T_2}{T_1} = 1,2$$

γ. Η ταχύτητα του Σ_1 πριν την κρούση είναι η $v_{\max}$ της αρχικής ταλάντωσης και ισούται με

$$v_1 = v_{1\max} = \omega_1 A = \frac{2\pi}{T_1} x \Rightarrow v_{1\max} = 2,4\sqrt{2} \text{ m/s}$$

Η ΑΔΟ για την κρούση δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_{1\max} = (m_1 + m_2) V_k \Rightarrow V_k = \frac{5}{3} \sqrt{2} \text{ m/s}$$

Η ταλάντωση εξελίσσεται στο οριζόντιο επίπεδο, οπότε η θέση ισορροπίας δεν αλλάζει με την προσθήκη μάζας κατά την κρούση. Άρα η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι η $v_{\max}$ για τη νέα ταλάντωση. Άρα το νέο πλάτος είναι

$$V_k = \omega_2 A' = \frac{2\pi}{T_2} A' \Rightarrow V_k = \omega_2 A' \Rightarrow A' = \frac{T_2}{2\pi} V_k = 0,2m$$

$$\delta. \pi\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 V_k^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{500}{9} \%$$

6.Δ.15

α. Από τη συνθήκη ισορροπίας του συστήματος Σ_1 , Σ_2 και ελατηρίων έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ(1)} + F_{ελ(2)} - (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta = 0 \Rightarrow$$

$$k_1\Delta\ell_1 + k_2\Delta\ell_2 = (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta \quad (1)$$

Σε μία τυχαία θέση της ταλάντωσης έχουμε

$$\Sigma F = k_1(\Delta\ell_1 - x) + k_2(\Delta\ell_2 - x) - (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta \Rightarrow$$

$$\Sigma F = k_1\Delta\ell_1 + k_2\Delta\ell_2 - k_1x - k_2x - (m_1 + m_2)g\eta\mu\theta$$

Η οποία με τη βοήθεια της (1) γράφεται

$$\Sigma F = -(k_1 + k_2) \cdot x$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με τη συνθήκη για α.α.τ., $\Sigma F = -D \cdot x$, έχουμε

$$D = k_1 + k_2 = 400 \text{ N/m}$$

β. $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Τη στιγμή που αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να κινηθεί αυτό δεν έχει ταχύτητα, άρα είναι σε ακραία θέση, επομένως βρίσκοντας τη μετατόπιση της θέσης ισορροπίας θα βρούμε το πλάτος της ταλάντωσης.

Η αρχική συνθήκη ισορροπίας περιγράφεται από τη σχέση

$$\Sigma F' = 0 \Rightarrow m_1g\eta\mu\theta = F'_{ελ(1)} + F'_{ελ(2)} \Rightarrow$$

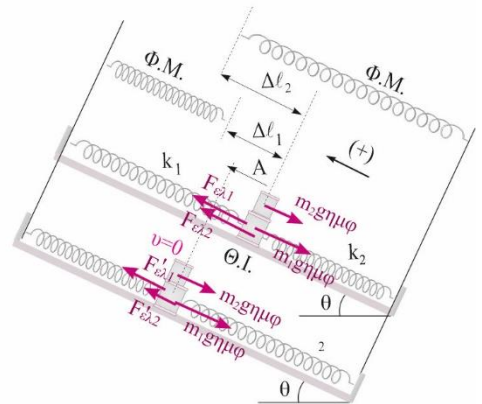
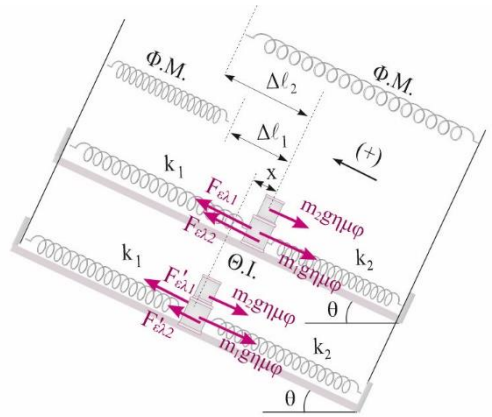
$$m_1g\eta\mu\theta = k_1(\Delta\ell_1 - A) + k_2(\Delta\ell_2 - A) \quad (2)$$

Από (1) και (2) παίρνουμε

$$A = \frac{m_2g\eta\mu\theta}{k_1 + k_2} \Rightarrow A = \frac{1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,6}{400 \text{ N/m}} \Rightarrow A = 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_1 + m_2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{400 \text{ N/m}}{4 \text{ kg}}} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$



Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου για το σύστημα είναι

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x = 15 \cdot 10^{-3} \eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

γ. Βρίσκουμε τη σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_2

$$D_2 = m_2\omega^2 \Rightarrow D_2 = 100 \text{ N/m}$$

Αφού το σώμα Σ_2 εκτελεί α.α.τ. ισχύει για αυτό $\Sigma F_2 = -D_2x$.

Τη δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο Σ_2 τη δημιουργούν η στατική τριβή και η συνιστώσα του βάρους του, οπότε έχουμε

$$T_{\sigma\tau} - m_2 g \eta\mu\theta = -D_2x \Rightarrow T_{\sigma\tau} = m_2 g \eta\mu\theta - D_2x \Rightarrow T_{\sigma\tau} = 6 - 100x \text{ (S.I.)}, -15 \cdot 10^{-3} \text{ m} \leq x \leq 15 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Άρα η γραφική παράσταση της στατικής τριβής σε συνάρτηση με την απομάκρυνση είναι όπως στο σχήμα.

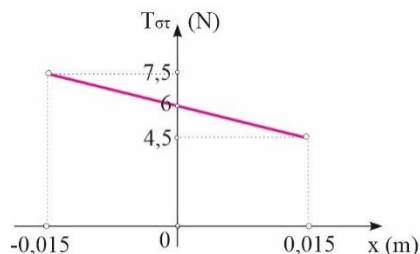
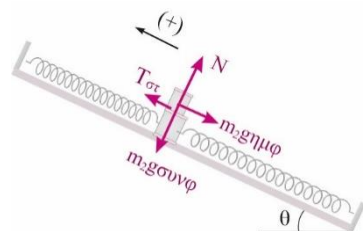
Στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης η στατική τριβή παίρνει τη μέγιστη τιμή της, 7,5N και στην ανώτερη θέση την ελάχιστη τιμή της, 4,5N.

δ. Στη διάρκεια της ταλάντωσης το μέτρο της στατικής τριβής μεταβάλλεται. Θα πρέπει η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής που αναπτύσσεται να είναι μικρότερη από την τιμή της οριακής τριβής που υπολογίζουμε με τη σχέση $T_{op} = \mu_s N$

$$T_{\sigma\tau\max} \leq \mu_s N \Rightarrow \mu_s \geq \frac{T_{\sigma\tau\max}}{m_2 g \sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow \mu_s \geq \frac{7,5}{1 \cdot 10 \cdot 0,8} \Rightarrow \mu_{s,\min} = \frac{15}{16}$$

$$\epsilon. T_{\sigma\tau} = 6 - 100x(3)$$

$$x = 15 \cdot 10^{-3} \eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) (4)$$

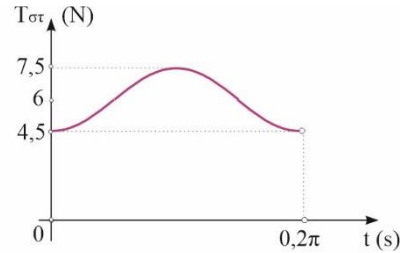


η χρονική εξίσωση της στατικής τριβής που ασκείται στο Σ_2 προκύπτει από τον συνδυασμό των (3), (4)

$$T_{\sigma\tau} = 6 - 100 \cdot 15 \cdot 10^{-3} \eta \mu(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

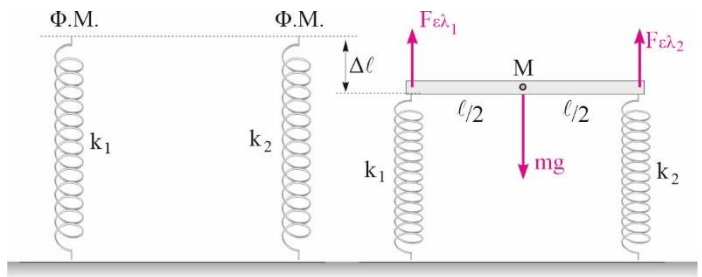
$$T_{\sigma\tau} = 6 - 1,5 \eta \mu(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}, \quad 0 \leq t \leq T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,2\pi \text{ s}$$

και η γραφική της παράσταση με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.



6.Δ.16

α. Η ράβδος αρχικά τοποθετείται οριζόντια και συνεχίζει να είναι οριζόντια σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, αυτό σημαίνει ότι στροφικά βρίσκεται σε ισορροπία, οπότε υπολογίζοντας τη συνολική ροπή ως προς το μέσο της, προκύπτει ότι οι ροπές που δέχεται από τα δύο ελατήρια είναι αντίθετες



$$\Sigma \tau_M = 0 \Rightarrow -F_{el(1)} \frac{l}{2} + F_{el(2)} \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow -k_1 x \frac{l}{2} + k_2 x \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k = 100 \text{ N/m}$$

β. Στη θέση ισορροπίας του συστήματος ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - F_{el(1)} - F_{el(2)} = 0 \Rightarrow mg - k_1 \Delta l - k_2 \Delta l = 0 \quad (1)$$

Σε τυχαία θέση που απέχει x από τη θέση ισορροπίας και βρίσκεται κάτω από αυτή η ΣF είναι

$$\Sigma F = mg - F_{el(1)} - F_{el(2)} \Rightarrow \Sigma F = mg - k_1(\Delta l + x) - k_2(\Delta l + x) \Rightarrow \Sigma F = -(k_1 + k_2)x$$

Συγκρίνοντας τη σχέση αυτή με τη συνθήκη για α.α.τ., $\Sigma F = -Dx$, συμπεραίνουμε ότι

$$D = k_1 + k_2 = 200 \text{ N/m}$$

Άρα η περίοδος της α.α.τ. είναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{2 \text{ kg}}{200 \text{ N/m}}} \Rightarrow T = 0,2\pi \text{ s} \text{ και } \omega = 10 \text{ rad/s}$$

γ. Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \varphi_0 = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Αφήνουμε τη ράβδο χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με την απόσταση ανάμεσα στο φυσικό μήκος και τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - F_{ελ(1)} - F_{ελ(2)} \Rightarrow mg = k_1\Delta\ell + k_2\Delta\ell \Rightarrow A = \Delta\ell = \frac{mg}{k_1 + k_2} \Rightarrow A = 0,1\text{m}$$

Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου για το σύστημα είναι

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0,1\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς είναι

$$\Sigma F = -Dy \Rightarrow \Sigma F = -20\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

δ. Επειδή η ράβδος είναι τοποθετημένη στα ελατήρια και όχι στερεωμένη, τα ελατήρια δεν μπορούν να την έλξουν, επομένως η επαφή χάνεται στη θέση του φυσικού μήκους των δύο ελατηρίων, άρα το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης για το οποίο οριακά δεν χάνεται η επαφή είναι $A=0,1\text{m}$.

ε. Η ράβδος μέχρι να χάσει την επαφή με τα ελατήρια εκτελεί α.α.τ, με πλάτος $0,2\text{m}$ και χάνει την επαφή στη θέση που απέχει $0,1\text{m}$ από τη θέση ισορροπίας. Βρίσκουμε στη θέση αυτή την ταχύτητα της ράβδου.

Από τις σχέσεις $x-t$, $v-t$ με ύψωση στο τετράγωνο και πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει η σχέση ταχύτητας - απομάκρυνσης $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow$

$$v = \pm 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \sqrt{(0,2\text{m})^2 - (0,1\text{m})^2} \Rightarrow v = \pm\sqrt{3}\text{m/s}$$

Εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από τη θέση φυσικού μήκους μέχρι το ανώτερο σημείο που φθάνει η ράβδος

$$A\Delta ME : U_{αρχ} + K_{αρχ} = U_{τελ} + K_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v^2}{2g} \Rightarrow h_{\max} = \frac{3}{20}\text{m} \Rightarrow h_{\max} = 0,15\text{m}$$

6.Δ.17

α. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια που αποθηκεύει το ελατήριο 1 είναι

$$U_{\epsilon\lambda,1(\max)} = \frac{1}{2} k_1 \Delta \ell_1^2 \Rightarrow U_{\epsilon\lambda,1(\max)} = \frac{1}{2} 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} (0,1\text{m})^2 \Rightarrow U_{\epsilon\lambda,1(\max)} = 0,5\text{J}$$

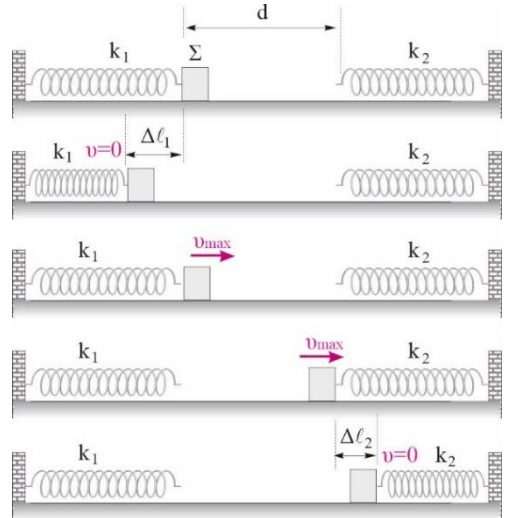
β. Το σώμα δεν είναι δεμένο στο ελατήριο, οπότε το ελατήριο δεν μπορεί να ασκήσει ελκτική δύναμη με αποτέλεσμα η επαφή να χάνεται στο φυσικό μήκος του ελατηρίου, δηλαδή στη θέση $x=0\text{m}$.

γ. Κατά την κίνηση του σώματος οι μόνες δυνάμεις που επηρεάζουν την κίνησή του είναι οι δυνάμεις των δύο ελατηρίων, που είναι συντηρητικές, οπότε με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από τη θέση που αφήνουμε ελεύθερο το σώμα μέχρι τη θέση που η συσπείρωση του ελατηρίου 2 είναι μέγιστη έχουμε

$$\Lambda\Delta\text{ΜΕ}(I \rightarrow II): U_{\epsilon\lambda(I)} + K_I = U_{\epsilon\lambda(II)} + K_{II} \Rightarrow U_{\epsilon\lambda(I)} = U_{\epsilon\lambda(II)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} k_1 \Delta \ell_1^2 = \frac{1}{2} k_2 \Delta \ell_2^2 \Rightarrow$$

$$\Delta \ell_2 = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \Delta \ell_1 \Rightarrow \Delta \ell_2 = \sqrt{\frac{100}{400}} 0,1\text{m} \Rightarrow \Delta \ell_2 = 0,05\text{m}$$



δ. Το σώμα από το άκρο του ελατηρίου 1 μέχρι να φθάσει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου 2, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με ταχύτητα ίση με αυτή που είχε τη στιγμή που χάθηκε η επαφή με το ελατήριο 1.

$$v_{\max} = \omega \Delta \ell_1 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \Delta \ell_1 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{100\text{N/m}}{1\text{kg}}} 0,1\text{m} \Rightarrow v_{\max} = 1\text{m/s}$$

Το συνολικό χρονικό διάστημα της ΕΟΚ είναι

$$\Delta t_{\text{ΕΟΚ}} = \frac{2d}{v_{\max}} \Rightarrow \Delta t_{\text{ΕΟΚ}} = \frac{\pi}{5} \text{s} \Rightarrow \Delta t_{\text{ΕΟΚ}} = \frac{\pi}{5} \text{s}$$

Το χρονικό διάστημα στο οποίο το σώμα είναι σε επαφή με το ελατήριο 1 είναι

$$\Delta t_1 = \frac{1}{2} T_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1}} \Rightarrow \Delta t_1 = \pi \sqrt{\frac{1}{100}} \text{s} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\pi}{10} \text{s}$$

Το χρονικό διάστημα στο οποίο το σώμα είναι σε επαφή με το ελατήριο 2 είναι

$$\Delta t_2 = \frac{1}{2} T_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_2}} \Rightarrow \Delta t_2 = \pi \sqrt{\frac{1}{400}} s \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\pi}{20} s$$

Άρα η περίοδος του φαινομένου είναι

$$T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_{\text{ΕΟΚ}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{10} s + \frac{\pi}{20} s + \frac{\pi}{5} s \Rightarrow T = \frac{7\pi}{20} s \Rightarrow T = 0,35\pi s$$

ε. Στο χρονικό διάστημα από 0 έως $T_1/4 = 0,05\pi s$ το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με αρχική φάση

$$\pi/2 \text{ rad.}$$

Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

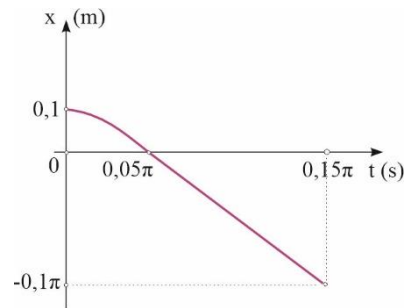
$$x_1 = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x_1 = 0,1 \eta \mu(10t + \frac{\pi}{2}) (\text{S.I.}), 0s \leq t < 0,05\pi s$$

Στο υπολειπόμενο χρονικό διάστημα μέχρι να έρθει σε επαφή με το ελατήριο 2 το σώμα κάνει ΕΟΚ με ταχύτητα $v_{\text{max}} = 1 \text{ m/s}$.

Η εξίσωση κίνησης του σώματος στο διάστημα αυτό είναι

$$x_2 = v \cdot (t - t_0) = -1 \cdot (t - 0,05\pi) (\text{S.I.}) \Rightarrow x_2 = 0,05\pi - t (\text{S.I.}), 0,05\pi s \leq t \leq 0,15\pi s$$

Άρα η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.



6.Δ.18

α. Η αρχική συσπίρωση του ελατηρίου είναι

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta \ell = m_1 g \Rightarrow \Delta \ell = \frac{m_1 g}{k} \Rightarrow \Delta \ell = \frac{20 \text{ N}}{200 \text{ N/m}} \Rightarrow \Delta \ell = 0,1 \text{ m}$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του Σ_1 είναι

$$U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 \Rightarrow U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} 200 \cdot (0,1)^2 (\text{S.I.}) \Rightarrow U_{\text{ελ}} = 1 \text{ J}$$

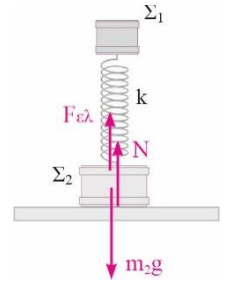
β. Το σώμα Σ_1 χάνει την επαφή του με το ελατήριο, όταν η δύναμη που δέχεται από αυτό γίνει μηδενική. Η δύναμη από το ελατήριο γίνεται μηδέν στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, δηλαδή πρέπει $A \leq \Delta \ell = 0,1 \text{ m}$.

Οπότε έχουμε

$$A \leq \Delta \ell \Rightarrow \frac{v_{\max}}{\omega} \leq \Delta \ell \Rightarrow v_{\max} \leq \omega \Delta \ell \Rightarrow v_{\max} \leq \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Delta \ell \Rightarrow v_{\max} \leq \sqrt{100} \cdot 0,1 \text{ m/s}$$

Άρα, για την οριακή περίπτωση έχουμε $v_{\max} = 1 \text{ m/s}$.

γ. Η επαφή του Σ_2 με το έδαφος θα χαθεί όταν η δύναμη της κάθετης στήριξης από το έδαφος γίνει μηδενική. Αυτό συμβαίνει όταν το Σ_1 βρεθεί σε κάποια θέση πάνω από αυτή του φυσικού μήκους του ελατηρίου, διότι σε αυτή τη θέση η δύναμη του ελατηρίου που ασκείται στο Σ_2 έχει φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα.



Η συνθήκη ισορροπίας για το Σ_2 δίνει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N + F_{\epsilon\lambda} = m_2 g \Rightarrow N = m_2 g - F_{\epsilon\lambda}$$

$$N \geq 0 \Rightarrow m_2 g - F_{\epsilon\lambda} \geq 0 \Rightarrow m_2 g \geq k \Delta \ell' \Rightarrow$$

$$\Delta \ell' \leq \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow \Delta \ell' \leq \frac{10}{200} \text{ m} \Rightarrow \Delta \ell' \leq 0,05 \text{ m} \Rightarrow \Delta \ell'_{\max} = 0,05 \text{ m}$$

όπου $\Delta \ell'_{\max}$ είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό μήκος, επομένως σε αυτή την περίπτωση, επειδή το ελατήριο είναι σε έκταση, το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι

$$A_{\max} = \Delta \ell + \Delta \ell'_{\max} \Rightarrow A_{\max} = 0,15 \text{ m}$$

δ. Βρίσκουμε την εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου για το Σ_1

$$x = A \eta \mu \omega t \Rightarrow x = 0,15 \eta \mu \sqrt{\frac{200}{2}} t \text{ (SI)} \Rightarrow x = 0,15 \eta \mu 10 t \text{ (S.I.)}$$

Επειδή το Σ_1 κάνει απλή αρμονική ταλάντωση για τη δύναμη ελατηρίου που του ασκείται θα ισχύει ότι

$$\Sigma F = m_1 g + F_{\epsilon\lambda} \Rightarrow -kx = m_1 g + F_{\epsilon\lambda} \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = -kx - m_1 g \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = -200 \cdot 0,15 \eta \mu 10 t - 20 \text{ (SI)} \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = -20 - 30 \eta \mu 10 t \text{ (S.I.)}$$

Η δύναμη που δέχεται το Σ_2 από το ελατήριο είναι κάθε στιγμή αντίθετη της δύναμης που δέχεται το Σ_1 από το ελατήριο. Επομένως το μέτρο της δύναμης στήριξης N είναι

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow N + F'_{\epsilon\lambda} - m_2 g = 0 \Rightarrow N = m_2 g - F'_{\epsilon\lambda} \Rightarrow N = 10 + 20 + 30 \eta \mu 10 t \text{ (SI)} \Rightarrow N = 30 + 30 \eta \mu 10 t \text{ (S.I.)}$$

Όταν η N γίνει μηδενική για πρώτη φορά θα έχουμε

$$0 = 30 + 30\eta\mu 10t \Rightarrow \eta\mu 10t = -1 = \eta\mu \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 10t = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \quad (1) \\ 10t = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{2} \quad (2) \end{array} \right\} \xrightarrow{(1), k=0}$$

$$10t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 0,15\pi \text{ s}$$

6.Δ.19

α. Αρχικά το άθροισμα των επιμηκύνσεων των δύο ελατηρίων είναι ίσο με 0,3m, άρα έχουμε

$$x_{01} + x_{02} = 0,3\text{m} \quad (1)$$

Οι δυνάμεις που ασκεί το ένα ελατήριο στο άλλο είναι δυνάμεις δράσης - αντίδρασης, οπότε έχουμε

$$F_{ελ,1} = F_{ελ,2} \Rightarrow k_1 x_{01} = k_2 x_{02} \Rightarrow x_{01} = 2x_{02} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$x_{01} = 0,2\text{m}$$

$$x_{02} = 0,1\text{m}$$

β. Σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης η δύναμη που δέχεται το σώμα στην οριζόντια διεύθυνση είναι

$$\Sigma F = -k_1 x_1 \quad (3)$$

Οι επιμηκύνσεις των ελατηρίων κάθε στιγμή συνδέονται με τη σχέση

$$F_{ελ,1} = F_{ελ,2} \Rightarrow k_1 x_1 = k_2 x_2 \Rightarrow x_1 = 2x_2 \quad (4)$$

Η απομάκρυνση του σώματος από την αρχική θέση ισορροπίας του είναι

$$x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = x_1 + \frac{k_1}{k_2} x_1 \Rightarrow x = \frac{k_1 + k_2}{k_2} x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x \quad (5)$$

Η σχέση (3) με τη βοήθεια της (5) γίνεται

$$\Sigma F = -\frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} x$$

Εάν συγκρίνουμε τη σχέση αυτή με τη συνθήκη για α.α.τ., $\Sigma F = -D \cdot x$, προκύπτει

$$D = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} \Rightarrow D = \frac{100 \cdot 200}{100 + 200} \text{ N/m} \Rightarrow D = \frac{200}{3} \text{ N/m}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{\frac{200}{3}}} \text{ s} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{9}{200}} \text{ s} \Rightarrow T = 2\pi\frac{3}{10\sqrt{2}} \text{ s} \Rightarrow T = 2\pi\frac{3\sqrt{2}}{20} \text{ s} \Rightarrow T = 0,3\sqrt{2}\pi \text{ s}$$

γ. Όταν η συσπείρωση του ελατηρίου 1 είναι $x_1=0,1\text{m}$ τότε η συσπείρωση του ελατηρίου 2 θα είναι

$$x_2 = \frac{k_1}{k_2} x_1 \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{2} = 0,05\text{m}$$

Την ίδια στιγμή η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο ελατηρίων είναι

$$U_{\text{ολ}} = U_{\text{ελ,1}} + U_{\text{ελ,2}} \Rightarrow U_{\text{ολ}} = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \Rightarrow U_{\text{ολ}} = \left(\frac{1}{2}100 \cdot 0,1^2 + \frac{1}{2}200 \cdot 0,05^2 \right) \text{ J} \Rightarrow U_{\text{ολ}} = 0,75\text{J}$$

δ. Από τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα με την απομάκρυνση έχουμε

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \Rightarrow |v| = \frac{2\pi}{T} \sqrt{A^2 - x^2} = \frac{2\pi}{0,3\sqrt{2}\pi} \sqrt{0,3^2 - 0,15^2} \text{ (SI)} \Rightarrow |v| = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ m/s}$$