

Θέματα Β

7.B.1 α.

Το σωστό πεδίο ορισμού είναι $-0,1\text{m} \leq x \leq 0,1\text{m}$ και η δυναμική ενέργεια ισούται με

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \text{ και με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει } U = 64x^2.$$

7.B.2 β.

$$\frac{U}{K} = \frac{U}{E-U} = \frac{\frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2} = \frac{(A/2)^2}{A^2 - (A/2)^2} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{1}{3}$$

7.B.3 β.

$$\frac{U}{K} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{U}{E-U} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2 - x^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow 25x^2 = 9A^2 \Rightarrow x = \pm \frac{3}{5}A$$

7.B.4 γ.

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό τη χρονική στιγμή t_1

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -m\omega^2x = -m\omega^2 A \eta \mu \omega t = -m \frac{4\pi^2}{T^2} A \eta \mu \frac{2\pi}{T} \frac{3T}{4} = -m \frac{4\pi^2}{T^2} A \eta \mu \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{4m\pi^2 A}{T^2}$$

7.B.5 γ.

$$v_1 = v_{\max} \sin \omega t = \omega A \sin \nu \frac{2\pi}{T} \frac{3T}{8} = \omega A \sin \nu \frac{3\pi}{4} \Rightarrow v_1 = -\omega A \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$K = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{m\omega^2 A^2}{4} = \frac{m4\pi^2 A^2}{4T^2} \Rightarrow K = \frac{m\pi^2 A^2}{T^2}$$

7.B.6 i. β. ii. γ.

i. Η ΑΔΕΤ για την ταλάντωση δίνει

$$U + K = E \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m(0,8v_{\max})^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 + 0,64\frac{1}{2}m v_{\max}^2 = \frac{1}{2}DA^2 \Rightarrow x^2 = 0,36A^2 \Rightarrow x = \pm 0,6A$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, το σώμα επιταχύνεται, οπότε κατευθύνεται προς τη θέση ισορροπίας, άρα βρίσκεται στο 2^ο ή 4^ο τεταρτημόριο και επειδή η δύναμη επαναφοράς έχει θετικό πρόσημο βρίσκεται σε αρνητική απομάκρυνση (4^ο τεταρτημόριο), άρα $x = -0,6\text{m}$.

$$\text{ii. } |\alpha| = \frac{\alpha_{\max}}{2} \Rightarrow |\omega^2 x| = \frac{1}{2} \omega^2 A \Rightarrow x = \pm \frac{A}{2}$$

$$\frac{K}{E} = \frac{E - U}{E} \Rightarrow \frac{K}{E} = \frac{\frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2}{\frac{1}{2}DA^2} = \frac{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2}{A^2} \Rightarrow \frac{K}{E} = \frac{3}{4}$$

7.B.7 i. β. ii. β. iii. α.

i. Τη χρονική στιγμή $t=0$ s η κινητική ενέργεια του σώματος είναι μηδέν, οπότε το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση και η αρχική φάση μπορεί να είναι $\pi/2$ rad ή $3\pi/2$ rad. Στις προτεινόμενες τιμές υπάρχει η $\phi=\pi/2$ rad.

$$\text{ii. Από το διάγραμμα } K_{\max}=32\text{J, οπότε } K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \Rightarrow 2 \cdot 32\text{J} = mv_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = 8\text{m/s}$$

iii. Η χρονική στιγμή που αναγράφεται στο διάγραμμα ισούται με το $T/4$. Άρα

$$\frac{\pi}{10} = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 0,4\pi \Rightarrow \frac{1}{f} = 0,4\pi \Rightarrow f = \frac{2,5}{\pi} \text{ Hz}$$

7.B.8 γ.

$$\frac{dW_{F_{\text{επ}}}}{dt} = \frac{F_{\text{επ}} dx}{dt} = F_{\text{επ}} v$$

Για να είναι θετικός ο ρυθμός παραγωγής έργου από την $F_{\text{επ}}$ πρέπει να έχει ίδιο πρόσημο με την ταχύτητα, v .

Τη χρονική στιγμή $t=0$ s η $F_{\text{επ}}$ είναι μηδέν και στη συνέχεια παίρνει θετικές τιμές, οπότε το σώμα τη στιγμή $t=0$ s διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κατευθυνόμενο προς την ακραία αρνητική απομάκρυνση, έτσι το χρονικό διάστημα από 0 s έως t_1 αντιστοιχεί σε κίνηση στο 3^ο τεταρτημόριο, ενώ η χρονική στιγμή t_2 βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο. Η $F_{\text{επ}}$ και η ταχύτητα, v , έχουν ίδιο πρόσημο στο 2^ο και στο 4^ο τεταρτημόριο, άρα σωστή επιλογή είναι η χρονική στιγμή t_2 .

7.B.9 γ.

$$\frac{F_{\max}}{U_{\max}} = \frac{DA}{\frac{1}{2}DA^2} \Rightarrow \frac{F_{\max}}{U_{\max}} = \frac{2}{A} \quad (1)$$

Από το διάγραμμα προκύπτει $u_{\max}=1\text{m/s}$ και $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{6}\text{s} - \frac{\pi}{15}\text{s} \Rightarrow T = 0,4\pi\text{s}$, οπότε έχουμε

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{v_{\max} T}{2\pi} = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,4\pi\text{s}}{2\pi} \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε $\frac{F_{\max}}{U_{\max}} = 10 \frac{\text{N}}{\text{J}}$.

7.B.10 α.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t=0s$ το σώμα έχει ταχύτητα $-0,5m/s$ και όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, τη χρονική στιγμή $\pi/15 s$, έχει ταχύτητα $-1m/s$. Με την ΑΔΕΤ βρίσκουμε την U της ταλάντωσης τη στιγμή $t=0s$

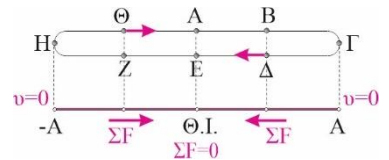
$$U + K = E \Rightarrow U + K = K_{\max} \Rightarrow U = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(1^2 - 0,5^2)(SI) \Rightarrow U = \frac{3m}{8}(SI)$$

$$\Delta U = U_{\text{τελ.}} - U_{\text{αρχ.}} \Rightarrow \Delta U = 0 - \frac{3m}{8} \Rightarrow \Delta U = -\frac{3m}{8}(SI)$$

7.B.11 i. α. ii. γ.

$$i. \frac{dK}{dt} = \frac{W_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F dx}{dt} \text{ συνφ} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \Sigma F v \text{ συνφ}$$

Όταν τα ΣF και v είναι ομόρροπα, τότε $\frac{dK}{dt} > 0$. Αυτό γίνεται στις θέσεις Θ και Δ .



$$ii. \text{ Σε μια α.α.τ, ισχύει } E_{\text{μηχ}} = \text{σταθ. Επομένως } \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{dK}{dt}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι μηδενικός όπου $\Sigma F = 0N$ ή $v = 0m/s$, δηλαδή στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης και στη θέση ισορροπίας.

7.B.12 β.

Από την κλίση της γραφικής παράστασης $\phi-t$ προκύπτει η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης,

$$\text{αφού } \phi = \omega t, \text{ άρα } \omega = \frac{\phi}{t} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}, \text{ οπότε } T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 8s.$$

Σε μια περίοδο της α.α.τ. η κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται δύο φορές, δηλαδή κάθε μισή περίοδο, δηλαδή κάθε $T/2 = 4s$.

7.B.13 α.

Αφού τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ η κινητική ενέργεια του σώματος είναι μηδέν και το σώμα έχει απομάκρυνση θετική, θα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση, άρα η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\pi/2 \text{ rad}$

$$x = A \eta \mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow A = A \eta \mu \phi_0 \Rightarrow \eta \mu \phi_0 = 1 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Έτσι η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας με τον χρόνο είναι

$$U = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} D A^2 \eta \mu^2 \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Τη χρονική στιγμή $t=2T/3$, η δυναμική ενέργεια έχει ίδια αριθμητική τιμή με το τετράγωνο του πλάτους της ταλάντωσης, άρα η σταθερά επαναφοράς είναι ίση με

$$U = \frac{1}{2} D A^2 \eta \mu^2 \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2} D A^2 \eta \mu^2 \left(\frac{2\pi}{T} \frac{2T}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$A^2 = \frac{1}{2} D A^2 \eta \mu^2 \frac{11\pi}{6} \Rightarrow D = \frac{2}{\left(-\frac{1}{2} \right)^2} = 8 \text{ N / m}$$

7.B.14 γ.

Οι δύο θέσεις είναι τυχαίες θέσεις της ταλάντωσης και η ΑΔΕΤ δίνει

$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \Rightarrow \frac{1}{2} D x_1^2 + \frac{K_2}{2} = \frac{1}{2} D x_2^2 + K_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} D (2x_2)^2 = \frac{1}{2} D x_2^2 + \frac{K_2}{2} \Rightarrow 3 \frac{1}{2} D x_2^2 = \frac{K_2}{2} \Rightarrow 3U_2 = \frac{K_2}{2} \Rightarrow \frac{K_2}{U_2} = 6$$

7.B.15 γ.

Από τη σχέση των ενεργειών των ταλαντώσεων παίρνουμε

$$E_2 = 2E_1 \Rightarrow K_{2\max} = 2K_{1\max} \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_{2\max}^2 = 2 \frac{1}{2} m_1 v_{1\max}^2 \Rightarrow$$

$$m_2 v_{2\max}^2 = 2 \cdot 4 m_2 v_{1\max}^2 \Rightarrow v_{2\max} = 2\sqrt{2} v_{1\max} \Rightarrow \omega_2 A_2 = 2\sqrt{2} \omega_1 A_1 \quad (1)$$

Από τις μέγιστες επιταχύνσεις που είναι ίσες προκύπτει

$$\alpha_{\max 2} = \alpha_{\max 1} \Rightarrow \omega_2^2 A_2 = \omega_1^2 A_1 \quad (2)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (2) και (1) κατά μέλη προκύπτει $\omega_2 = \frac{\omega_1}{2\sqrt{2}}$ και με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει $A_2 = 8A_1$.

7.B.16 α.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $A_1=0,8A_2$ και ότι

$$E_1 = 2E_2 \Rightarrow \frac{1}{2}D_1A_1^2 = 2\frac{1}{2}D_2A_2^2 \Rightarrow D_1(0,8A_2)^2 = 2D_2A_2^2 \Rightarrow$$

$$D_2 = 0,32D_1 \Rightarrow m_2\omega_2^2 = 0,32m_1\omega_1^2 \xrightarrow{m_1=2m_2}$$

$$\omega_2^2 = 0,64\omega_1^2 \Rightarrow \omega_2 = 0,8\omega_1 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_2} = 0,8\frac{2\pi}{T_1} \Rightarrow T_2 = 1,25T_1$$

7.B.17 α.

Αφού τη χρονική στιγμή $t_0=0s$ η επιτάχυνση του σώματος ισούται με $a=-\omega u_{\max}=-\omega^2A=-a_{\max}$, το σώμα θα βρίσκεται στην ακραία θετική θέση, άρα η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\pi/2$ rad.

Η δυναμική ενέργεια γίνεται ίση με το τριπλάσιο της κινητικής ενέργειας στις θέσεις που προκύπτουν από την ΑΔΕΤ

$$E = U + K \Rightarrow E = U + \frac{U}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{4}{3}\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}A$$

Δεκτή είναι η αρνητική απομάκρυνση, γιατί το σώμα, ξεκινώντας από την ακραία θετική θέση,

φτάνει πρώτα στη θέση $x = \frac{\sqrt{3}}{2}A$ και έπειτα στη $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}A$.

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο παίρνουμε

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}A = A\eta\mu\left(\omega t_2 + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(\omega t_2 + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi}{T}t_2 + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \quad (1) \\ \frac{2\pi}{T}t_2 + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3} \quad (2) \end{array} \right\}$$

Για αρνητική ταχύτητα (συνφ<0), δεκτή είναι η (2) και για $\kappa=1$ παίρνουμε

$$\frac{2\pi}{T}t_2 + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_2 = \frac{5T}{12}$$

7.B.18 β.

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ισούται με

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} = -F_{\varepsilon\pi}v = -(-Dx)v \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Dxv \quad (1)$$

Η ταχύτητα στη θέση $x=A/2$ προκύπτει από την ΑΔΕΤ

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow m\omega^2 A^2 = m\omega^2 \left(\frac{A}{2}\right)^2 + mv^2 \Rightarrow v = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\omega A$$

Δεκτή είναι η θετική ταχύτητα και η (1) δίνει

$$\frac{dU}{dt} = Dxv = D \frac{A}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \omega A = \frac{1}{2}DA^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \omega \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{E\omega\sqrt{3}}{2}$$

7.B.19 γ.

Η δυναμική ενέργεια γίνεται ίση με το τετραπλάσιο της κινητικής ενέργειας στις θέσεις που προκύπτουν από την ΑΔΕΤ

$$E = U + K \Rightarrow E = U + \frac{U}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}DA^2 = \frac{5}{4}\frac{1}{2}Dx^2 \Rightarrow x = \pm 0,4\sqrt{5}A$$

Η απόσταση των δύο θέσεων είναι

$$d = x_2 - x_1 \Rightarrow 0,4\sqrt{5}A - (-0,4\sqrt{5}A) \Rightarrow d = 0,8\sqrt{5}A$$

7.B.20 α.

Η δύναμης επαναφοράς είναι συντηρητική δύναμη, οπότε το έργο της ισούται με το αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας. Άρα

$$W_{F,επ} = U_{αρχ} - U_{τελ} \Rightarrow -\frac{E}{2} = U_{αρχ} - U_{τελ} \Rightarrow -\frac{\frac{1}{2}DA^2}{2} = \frac{1}{2}Dx_1^2 - \frac{1}{2}Dx_2^2 \Rightarrow -\frac{A^2}{2} = x_1^2 - \frac{1}{2}(2x_1)^2 \Rightarrow x_1^2 - 4x_1^2 = -\frac{A^2}{2} \Rightarrow x_1 = A \frac{\sqrt{6}}{6}$$

7.B.21 α.

Αφού τη χρονική στιγμή $t_0=0s$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x=+A$, η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\pi/2$ rad

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Η δυναμική ενέργεια σε συνάρτηση με τον χρόνο δίνεται από τη σχέση

$$U = \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = E\sigma\upsilon\eta^2\omega t$$

Η δυναμική ενέργεια είναι ίση με την κινητική ενέργεια, άρα από την ΑΔΕΤ προκύπτει

$$E = U + K \Rightarrow E = U + U \Rightarrow U = \frac{E}{2} \Rightarrow E \sin^2 \omega t = \frac{E}{2} \Rightarrow \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sin \omega t = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega t = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} t = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \kappa \frac{T}{2} \pm \frac{T}{8}$$

Άρα, η δυναμική ενέργεια γίνεται ίση με την κινητική ενέργεια τις στιγμές $T/8, 3T/8, 5T/8, 7T/8$, δηλαδή κάθε $T/4$.

7.B.22 β.

Η κινητική ενέργεια σε σχέση με το τετράγωνο της απομάκρυνσης, x^2 , προκύπτει από την ΑΔΕΤ

$$E = U + K \Rightarrow K = E - U \Rightarrow K = E - \frac{1}{2} D x^2$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι η συνάρτηση είναι φθίνουσα 1^{ου} βαθμού.

Στη θέση $x=0$ η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη και ισούται με E , άρα από το διάγραμμα προκύπτει ότι $E=\alpha$ και στις ακραίες θέσεις μηδενίζεται, άρα $A^2=\beta$.

Από τη σχέση της ενέργειας της ταλάντωσης προκύπτει η σταθερά επαναφοράς

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} D \beta \Rightarrow D = \frac{2\alpha}{\beta}$$

7.B.23 γ.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι $E_1=3E_2$ (1) και ότι για τις μέγιστες ταχύτητες ισχύει

$$v_{2\max} = 2v_{1\max} \Rightarrow \omega_2 A_2 = 2\omega_1 A_1 \Rightarrow 2\pi f_2 A_2 = 2 \cdot 2\pi f_1 A_1 \Rightarrow$$

$$2\pi f_1 A_2 = 2 \cdot 2\pi f_1 A_1 \Rightarrow A_2 = A_1$$

Η σχέση (1) δίνει

$$E_1 = 3E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} D_1 A_1^2 = 3 \frac{1}{2} D_2 A_2^2 \Rightarrow D_1 = 3D_2$$

Άρα, για τις μέγιστες δυνάμεις που δέχονται τα σώματα Σ_1 και Σ_2 , ισχύει

$$F_{1\max} = D_1 A_1 = 3D_2 A_2 \Rightarrow F_{1\max} = 3F_{2\max}$$

7.B.24 β.

Η ενέργεια της ταλάντωσης ισούται με το έργο της εξωτερικής δύναμης που έθεσε το σύστημα σε ταλάντωση. Επειδή η δύναμη είναι σταθερή το έργο της είναι ίσο με $F x_1$.

7.B.25 α.

Η ΑΔΕΤ για την αρχική ταλάντωση δίνει την κινητική ενέργεια K_1 του σώματος στη θέση $x=A/2$

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + K_1 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow K_1 = \frac{3}{4}\frac{1}{2}kA^2$$

Στη θέση αυτή η κινητική ενέργεια γίνεται

$$K_1' = 5K_1 = \frac{15}{8}kA^2$$

και με χρήση πάλι της ΑΔΕΤ για τη νέα ταλάντωση παίρνουμε

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}kx^2 + K_1' \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}kA^2 + \frac{15}{8}kA^2 \Rightarrow$$

$$A'^2 = \frac{1}{4}A^2 + \frac{15}{4}A^2 \Rightarrow A' = 2A$$

7.B.26 γ.

Η θέση x είναι τυχαία θέση της ταλάντωσης και θα προκύψει από την ΑΔΕΤ

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow mv_0^2 = kx^2 + m\frac{v_0^2}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{3m}{k}}$$

Το σώμα ξεκινάει από τη Θ.Ι. προς τα θετικά και αποκτάει για 1^η φορά ταχύτητα $v=-v_0/2$ στη θετική απομάκρυνση (2^ο τεταρτημόριο), ενώ αποκτάει για 2^η φορά ταχύτητα $v=-v_0/2$ στην αρνητική απομάκρυνση (3^ο τεταρτημόριο), άρα δεκτή είναι η απάντηση γ.

7.B.27 α.

Το έργο της δύναμης ισούται με την ενέργεια της ταλάντωσης. Άρα

$$W_F = E \Rightarrow Fx_1 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2Fx_1}{k}} \quad (1)$$

Το σώμα σταματάει στιγμιαία αφού μετατοπιστεί ακόμα κατά x_1 , οπότε η ακραία θέση θα απέχει κατά $2x_1$ από τη Θ.Ι. που θα είναι στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι ίσο με $A=2x_1$. Η σχέση (1) δίνει

$$A = \sqrt{\frac{2Fx_1}{k}} = 2x_1 \Rightarrow \frac{2Fx_1}{k} = 4x_1^2 \Rightarrow x_1 = \frac{F}{2k}$$

7.B.28 α.

Το σώμα Σ όταν αφήνεται το αριστερό ελατήριο βρίσκεται στη θέση ισορροπίας, που ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Άρα, έχει μέγιστη κινητική ενέργεια και αυτή η ενέργεια γίνεται μέγιστη κινητική και για τη 2^η ταλάντωση του σώματος, όταν συμπιέζει το δεξιό ελατήριο. Άρα έχουμε

$$K_{1\max} = K_{2\max} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{1\max}^2 = \frac{1}{2}mv_{2\max}^2 \Rightarrow v_{1\max} = v_{2\max} \Rightarrow \omega_1 d_1 = \omega_2 d_2 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{k_1}{m}}d_1 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}d_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{k_1}{m}}d_1 = \sqrt{\frac{4k_1}{m}}d_2 \Rightarrow d_1 = 2d_2 \Rightarrow d_2 = d_1/2$$

7.B.29 γ.

Μέχρι τη θέση κατάρνησής της η F παράγει έργο που ισούται με την ενέργεια της ταλάντωσης, $W_F = E_T$. Η θέση της κατάρνησης είναι τυχαία θέση της ταλάντωσης, αφού η Θ.Ι. είναι στο φυσικό μήκος του ελατηρίου. Άρα η ταχύτητα του σώματος σε εκείνη τη θέση προκύπτει από την ΑΔΕΤ που ακολουθεί

$$W_F = E_T \Rightarrow Fd = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow 2kd \cdot d = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = d\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος εκείνη τη στιγμή ισούται με

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{F,\varepsilon\pi}}{dt} = F_{\varepsilon\pi}v_1 = -kdd\sqrt{\frac{3k}{m}} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -kd^2\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

7.B.30 α.

Το σώμα Σ₁ δεν κινείται οριακά, άρα ισχύει,

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_{\sigma} = F_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow T_{\sigma,\max} = F_{\varepsilon\lambda,\max} \Rightarrow \mu_{\sigma}m_1g = F_{\varepsilon\lambda,\max} \quad (1)$$

Η ταλάντωση του Σ₂ εξελίσσεται στο οριζόντιο επίπεδο, οπότε η θέση ισορροπίας συμπίπτει με το φυσικό μήκος του ελατηρίου και η δύναμη του ελατηρίου συμπίπτει με τη δύναμη επαναφοράς. Από τη σχέση (1) παίρνουμε

$$\mu_{\sigma}m_1g = F_{\varepsilon\lambda,\max} \Rightarrow \mu_{\sigma}m_1g = F_{\varepsilon\pi,\max} = kA \Rightarrow A = \frac{\mu_{\sigma}m_1g}{k}$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης του Σ₂ είναι ίση με

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{\mu_{\sigma}m_1g}{k}\right)^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}\frac{\mu_{\sigma}^2m_1^2g^2}{k}$$

7.B.31 i. β. ii. γ.

i. Σε ένα διάγραμμα $F_{ελ}-x$ στην κλίση αντιστοιχεί η σταθερά του ελατηρίου, αφού $F_{ελ}=kx$, οπότε από το διάγραμμα που δίνεται προκύπτει

$$F_{ελ1} = F_{ελ2} \quad \text{ή} \quad k_1 x_1 = k_2 x_2 = k_2 2x_1 \quad \text{ή} \quad k_1 = 2k_2 \quad (1)$$

Έχουμε κατακόρυφα ελατήρια και στο κάτω άκρο τους κρεμασμένα σώματα ίδιου βάρους. Από τη συνθήκη ισορροπίας για κάθε σώμα βρίσκουμε τις επιμηκύνσεις των δύο ελατηρίων από το φυσικό τους μήκος

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = k_1 \Delta \ell_1 \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{mg}{k_1} \quad \text{και} \quad \Delta \ell_2 = \frac{mg}{k_2}$$

Παίρνοντας υπόψη τη σχέση (1) προκύπτει $\Delta \ell_2 = 2\Delta \ell_1$. Η ταλάντωση του $m - k_1$ γίνεται με πλάτος $A_1 = \Delta \ell_1$ και του $m - k_2$ με πλάτος $A_2 = \Delta \ell_2 = 2A_1$.

Για τις μέγιστες ταχύτητες έχουμε

$$v_{\max 1} = \omega_1 A_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} A_1 \quad (2)$$

$$v_{\max 2} = \omega_2 A_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}} A_2 \Rightarrow v_{\max 2} = \sqrt{\frac{k_1/2}{m}} 2A_1 \xrightarrow{(2)} v_{\max 2} = v_{\max 1} \sqrt{2}$$

ii. Για τις ενέργειες των δύο ταλαντώσεων ισχύει

$$E_1 = \frac{1}{2} k_1 A_1^2 \quad (3)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} k_2 A_2^2 = \frac{1}{2} \frac{k_1}{2} (2A_1)^2 \xrightarrow{(3)} E_2 = 2E_1$$

7.B.32 α.

Στην κλίση ενός διαγράμματος $F_{ελ}-x$ αντιστοιχεί η σταθερά του ελατηρίου, οπότε από το διάγραμμα προκύπτει $F_{ελ1} = 2F_{ελ2}$ ή $k_1 x = 2k_2 x$ ή $k_1 = 2k_2$ (1)

Από τις ίδιες παραμορφώσεις των δύο ελατηρίων στην ισορροπία των σωμάτων έχουμε

$$\Delta \ell_1 = \Delta \ell_2 \Rightarrow \frac{m_1 g}{k_1} = \frac{m_2 g}{k_2} \Rightarrow \frac{m_1}{2k_2} = \frac{m_2}{k_2} \Rightarrow m_1 = 2m_2 \quad (2)$$

Από τις ίδιες ενέργειες ταλάντωσης έχουμε

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} k_1 A_1^2 = \frac{1}{2} k_2 A_2^2 \xrightarrow{(1)} 2k_2 A_1^2 = k_2 A_2^2 \Rightarrow A_1 \sqrt{2} = A_2 \quad (3)$$

Για τις γωνιακές συχνότητες των δύο ταλαντώσεων έχουμε

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \text{ και } \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{k_1/2}{m_1/2}} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1$$

Για τις μέγιστες ταχύτητες έχουμε

$$\frac{v_{\max 1}}{v_{\max 2}} = \frac{\omega_1 A_1}{\omega_2 A_2} \xrightarrow{(3)} \frac{v_{\max 1}}{v_{\max 2}} = \frac{A_1}{A_1 \sqrt{2}} \Rightarrow v_{\max 2} = \sqrt{2} v_{\max 1}$$

7.B.33 γ.

Η ενέργεια ταλάντωσης βρίσκεται από τη σχέση $E = \frac{1}{2} k A^2$.

Το πλάτος κάθε ταλάντωσης ισούται με την επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος μέχρι τη θέση ισορροπίας του συστήματος. Από τη συνθήκη ισορροπίας για κάθε σύστημα έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k_A \Delta \ell_A = 0 \Rightarrow \Delta \ell_A = \frac{mg}{k_A} \text{ και } \Delta \ell_B = \frac{mg}{k_B}$$

Για τις δύο ενέργειες ταλάντωσης έχουμε

$$E_A = \frac{1}{2} k_A \Delta \ell_A^2 = \frac{1}{2} k_A \left(\frac{mg}{k_A} \right)^2 \Rightarrow E_A = \frac{m^2 g^2}{2k_A} \text{ και } E_B = \frac{m^2 g^2}{2k_B}.$$

Επειδή $k_A > k_B$ θα είναι $E_A < E_B$.

7.B.34 γ.

Το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με την επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος μέχρι τη θέση ισορροπίας του συστήματος. Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k \Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{mg}{k}, \text{ οπότε } A = \Delta \ell_0 \text{ και η μέγιστη δυναμική ενέργεια της τα-}$$

λάντωσης είναι $U_{\max} = \frac{1}{2} k \Delta \ell_0^2$

Το ελατήριο έχει τη μέγιστη δυναμική ενέργεια όταν βρίσκεται σε μέγιστη παραμόρφωση και αυτό συμβαίνει όταν το σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης, που απέχει A από τη θέση ισορροπίας και $2A$ από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, οπότε έχουμε

$$U_{(\varepsilon \lambda) \max} = \frac{1}{2} k (2\Delta \ell_0)^2 \Rightarrow U_{(\varepsilon \lambda) \max} = 4 \frac{1}{2} k \Delta \ell_0^2 \Rightarrow U_{(\varepsilon \lambda) \max} = 4 U_{\max}$$

7.B.35 α.

Το πλάτος κάθε ταλάντωσης ισούται με την επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος μέχρι τη θέση ισορροπίας του συστήματος. Από τη συνθήκη ισορροπίας για κάθε σύστημα έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_A g - k_A \Delta \ell_A = 0 \Rightarrow \Delta \ell_A = \frac{m_A g}{k_A} \quad \text{και} \quad \Delta \ell_B = \frac{m_B g}{k_B}$$

Με διαίρεση κατά μέλη των δύο σχέσεων παίρνουμε

$$\frac{\Delta \ell_A}{\Delta \ell_B} = \frac{\frac{2m_B g}{4k_B}}{\frac{m_B g}{k_B}} \Rightarrow \frac{\Delta \ell_A}{\Delta \ell_B} = \frac{1}{2}$$

Και για τις ενέργειες ταλάντωσης έχουμε

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{\frac{1}{2} k_A \Delta \ell_A^2}{\frac{1}{2} k_B \Delta \ell_B^2} = \frac{4k_B}{k_B} \left(\frac{\Delta \ell_A}{\Delta \ell_B} \right)^2 \Rightarrow \frac{E_A}{E_B} = 1 \Rightarrow E_A = E_B$$

7.B.36 β.

Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος $m_B - k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_B g - k \Delta \ell_0 = 0 \quad (1)$$

Μετά την προσθήκη της μάζας m_A το ελατήριο συμπιέζεται επιπλέον κατά $\Delta \ell_1$ που βρίσκεται από τη νέα συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_A + m_B)g - k(\Delta \ell_0 + \Delta \ell_1) = 0 \xrightarrow{(1)} m_A g = k \Delta \ell_1 \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{m_A g}{k}$$

Η απότομη αφαίρεση της μάζας m_A θα προκαλέσει ταλάντωση του συστήματος γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας και θα έχει ως κάτω ακραία θέση, τη θέση αφαίρεσης της μάζας m_A . Άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = \Delta \ell_1 = \frac{m_A g}{k}$ και η ενέργεια

$$E = \frac{1}{2} k \Delta \ell_1^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{m_A g}{k} \right)^2 \Rightarrow E = \frac{m_A^2 g^2}{2k}$$

7.B.37 α.

Η ταλάντωση του συστήματος $m_2 - k$ γίνεται γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$, που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{m_2 g}{k} \quad (1)$$

Η ταλάντωση του συστήματος ξεκίνησε από θέση που απέχει $\Delta\ell$ από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, που υπολογίζεται από τη συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k\Delta\ell = 0 \Rightarrow \Delta\ell = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

Το πλάτος ταλάντωσης θα είναι ίσο με τη διαφορά των δύο επιμηκύνσεων

$$A = \Delta\ell - \Delta\ell_0 \Rightarrow A = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow A = \frac{m_1 g}{k}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, η πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης συμπίπτει με το φυσικό μήκος του ελατηρίου, άρα $A = \Delta\ell_0$. Τη στιγμή που σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση, το ελατήριο βρίσκεται σε μέγιστη συμπίεση και η παραμόρφωσή του από το φυσικό μήκος είναι $\Delta\ell_0 + A = 2A$, οπότε έχει ενέργεια

$$U_{ελ} = \frac{1}{2}k(2A)^2 \xrightarrow{(2)} U_{ελ} = 4E_T$$

Άρα $E_T / U_{ελ} = 1/4$.

7.B.38 γ.

Η ταλάντωση του συστήματος $m - k$ γίνεται γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$, που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg}{k} \quad (1)$$

Από τη μέγιστη τιμή της δύναμης επαναφοράς βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης

$$F_{επ\max} = kA \Rightarrow 2mg = kA \Rightarrow A = \frac{2mg}{k} \xrightarrow{(1)} A = 2\Delta\ell_0$$

$$\frac{K_{\max}}{U_{(ελ)\max}} = \frac{E_T}{U_{(ελ)\max}} = \frac{\frac{1}{2}k(2\Delta\ell_0)^2}{\frac{1}{2}k(\Delta\ell_0 + 2\Delta\ell_0)^2} \Rightarrow \frac{K_{\max}}{U_{(ελ)\max}} = \frac{4}{9}$$

7.B.39 β.

Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος των δύο μαζών είναι κάτω από τα φυσικά μήκη των ελατηρίων κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \quad (1)$$

Μετά το κόψιμο των νημάτων, οι νέες θέσεις ισορροπίας είναι πιο πάνω από τις παλιές. Το αριστερό σύστημα θα έχει θέση ισορροπίας πιο πάνω κατά x_1 και το δεξιό κατά x_2 , που ισούνται με:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1g - k(\Delta\ell_0 - x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} x_1 = \frac{m_2g}{k}$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2g - k(\Delta\ell_0 - x_2) = 0 \xrightarrow{(1)} x_2 = \frac{m_1g}{k}$$

Το κόψιμο του κάθε νήματος θα προκαλέσει ταλάντωση του συστήματος γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας και το πλάτος της κάθε ταλάντωσης είναι:

$$A_1 = x_1 = \frac{m_2g}{k} \text{ και } A_2 = x_2 = \frac{m_1g}{k}$$

και οι ενέργειες των δύο ταλαντώσεων έχουν λόγο

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}kA_1^2}{\frac{1}{2}kA_2^2} = \frac{\frac{1}{2}k\left(\frac{m_2g}{k}\right)^2}{\frac{1}{2}k\left(\frac{m_1g}{k}\right)^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}$$

7.B.40 β.

Η αρχική θέση ισορροπίας των δύο συστημάτων είναι κάτω από τα φυσικά μήκη των ελατηρίων κατά $\Delta\ell_1$ και $\Delta\ell_2$, που βρίσκονται από τις σχέσεις:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1g - k_1\Delta\ell_1 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{m_1g}{k_1}$$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2g - k_2\Delta\ell_2 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_2 = \frac{m_2g}{k_2}$$

Για τις δύο παραπάνω επιμηκύνσεις ισχύει

$$\Delta\ell_1 = 2\Delta\ell_2 \Rightarrow \frac{m_1g}{k_1} = 2\frac{m_2g}{k_2} \Rightarrow \frac{m_1}{k_1} = 2\frac{m_2}{k_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 2\frac{k_1}{k_2} \quad (1)$$

Αφού εκτρέπουμε τα σώματα Σ_1 και Σ_2 μέχρις ότου τα ελατήρια αποκτήσουν το φυσικό τους μήκος, το πλάτος της κάθε ταλάντωσης ισούται με: $A_1 = \Delta\ell_1$ και $A_2 = \Delta\ell_2$.

Για τις ενέργειες των δύο ταλαντώσεων ισχύει $E_2 = 2E_1$, άρα

$$E_2 = 2E_1 \Rightarrow \frac{1}{2}k_2 A_2^2 = 2 \frac{1}{2}k_1 A_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2}k_2 \left(\frac{m_2 g}{k_2} \right)^2 = 2 \frac{1}{2}k_1 \left(\frac{m_1 g}{k_1} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{m_2^2}{k_2} = 2 \frac{m_1^2}{k_1} \Rightarrow \frac{m_1^2}{m_2^2} = \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_2} \xrightarrow{(1)} 4 \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_2} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{8}$$

7.B.41 α.

Η θέση ισορροπίας στο 1^ο πείραμα είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{mg}{k} \quad (1)$$

Αφού εκτρέπουμε το σώμα μέχρις ότου το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με $A_1 = \Delta \ell_0$.

Στο 2^ο πείραμα, το σύστημα εκτελεί ταλάντωση με θέση ισορροπίας που βρίσκεται στο φυσικό μήκος του ελατηρίου, καθώς εκεί ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - F - k\Delta \ell = 0 \Rightarrow mg - mg - k\Delta \ell = 0 \Rightarrow \Delta \ell = 0$$

Έτσι το πλάτος της 2^{ης} ταλάντωσης ισούται με την απόσταση της παλιάς Θ.Ι., που το σώμα ξεκινάει να ταλαντώνεται χωρίς ταχύτητα, άρα αποτελεί ακραία θέση, μέχρι τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Άρα $A_2 = \Delta \ell_0 = A_1$.

Συμπερασματικά, τα δύο πειράματα έχουν ίδιο πλάτος ταλάντωσης και διαφορετικές θέσεις ισορροπίας.

7.B.42 α.

Η θέση ισορροπίας του συστήματος Σ-κ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg\eta\mu\varphi - k\Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{mg\eta\mu\varphi}{k} = \frac{mg}{2k} \quad (1)$$

Αφού κατεβάζουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε χωρίς ταχύτητα, η θέση αυτή είναι ακραία και το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με $A = \frac{mg}{k}$.

Α' τρόπος

Το σώμα εγκαταλείπει το ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου με κινητική ενέργεια που προκύπτει από την ΑΔΕΤ

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\Delta\ell_0^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{2k}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3m^2g^2}{8k} \quad (1)$$

Το σώμα στη συνέχεια κινείται στο πλάγιο επίπεδο κατά d μέχρι να σταματήσει στιγμιαία με την επίδραση του βάρους του και το ΘΜΚΕ δίνει

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_w \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -mgd\eta\mu\varphi \Rightarrow mgd\frac{1}{2} = \frac{3m^2g^2}{8k} \Rightarrow$$

$$d = \frac{3mg}{4k}$$

Β' τρόπος

Στο κάτω άκρο το ελατήριο είναι συμπιεσμένο κατά

$$\Delta\ell = \Delta\ell_0 + A = \frac{mg}{2k} + \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{3mg}{2k}$$

Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ της θέσης ελευθέρωσης και της ακραίας θέσης που φτάνει το σώμα δίνει

$$E_{\text{MHX}(\alpha\rho\chi)} = E_{\text{MHX}(\tau\epsilon\lambda)} \Rightarrow \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 = mgs\eta\mu\varphi \Rightarrow \frac{1}{2}k\left(\frac{3mg}{2k}\right)^2 = mgs\frac{1}{2} \Rightarrow s = \frac{9mg}{4k}$$

Το σώμα εγκαταλείπει το ελατήριο στο φυσικό του μήκος, δηλαδή σε απόσταση $\frac{3mg}{2k}$ από το σημείο ελευθέρωσης. Άρα, πιο πάνω από το σημείο ελευθέρωσης θα διανύσει απόσταση

$$d = s - \frac{3mg}{2k} = \frac{9mg}{4k} - \frac{3mg}{2k} \Rightarrow d = \frac{3mg}{4k}$$

7.B.43 α.

Η αρχική θέση ισορροπίας του σώματος είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg}{k} \quad (1)$$

Στη θέση ισορροπίας, η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη και προκύπτει από τον ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου

$$\frac{dU_{\epsilon\lambda}}{dt} = 2mgv_0 \Rightarrow -\frac{dW_{F,\epsilon\lambda}}{dt} = -F_{\epsilon\lambda}v_{\max} = -(-k\Delta\ell_0)v_{\max} = 2mgv_0 \Rightarrow$$

$$k\frac{mg}{k}v_{\max} = 2mgv_0 \Rightarrow v_{\max} = 2v_0$$

Με εφαρμογή της ΑΔΕΤ μεταξύ της θέσης εκτόξευσης και της θέσης ισορροπίας της ταλάντωσης παίρνουμε

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} k \Delta \ell_0^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow 4 m v_0^2 = k \left(\frac{mg}{k} \right)^2 + m v_0^2 \Rightarrow v_0 = g \sqrt{\frac{m}{3k}}$$

7.B.44 α.

Α' τρόπος

Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ₁ ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg + T - k \Delta \ell_{01} = 0 \Rightarrow \Delta \ell_{01} = \frac{mg + T}{k} = \frac{mg + 2mg}{k} \Rightarrow \Delta \ell_{01} = \frac{3mg}{k} \quad (1)$$

Μετά το κόψιμο του νήματος, η νέα θέση ισορροπίας είναι πιο πάνω από την παλιά κατά x_1 , που ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k(\Delta \ell_{01} - x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} mg = k \left(\frac{mg + T}{k} - x_1 \right) \Rightarrow x_1 = \frac{T}{k} \Rightarrow x_1 = \frac{2mg}{k}$$

Το κόψιμο του νήματος θα προκαλέσει ταλάντωση του συστήματος Σ₁-k γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας και το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_1 = x_1 = \frac{2mg}{k}$.

Η θέση ισορροπίας του σώματος Σ₂ είναι πιο πάνω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου και ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - T + k \Delta \ell_{02} = 0 \Rightarrow \Delta \ell_{02} = \frac{T - mg}{k} = \frac{2mg - mg}{k} \Rightarrow \Delta \ell_{02} = \frac{mg}{k} \quad (2)$$

Μετά το κόψιμο του νήματος, η νέα θέση ισορροπίας είναι πιο κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά x_2 που ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - kx_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{mg}{k}$$

Το κόψιμο του νήματος θα προκαλέσει ταλάντωση του συστήματος Σ₂-k γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας και το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A_2 = \Delta \ell_{02} + x_2 = \frac{2mg}{k}$.

Άρα, οι δύο ταλαντώσεις έχουν ίσα πλάτη και ίσες σταθερές επαναφοράς και κατά συνέπεια ίσες ενέργειες και ο λόγος τους είναι ίσος με 1

$$E_1 = \frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} k A_2^2 = E_2 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 1$$

Β' τρόπος

Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ₁ ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg + T - F_{1,ελ} = 0 \Rightarrow T = F_{1,ελ} - mg$$

Όταν καταργηθεί η τάση, T , του νήματος, στο σώμα Σ_1 θα ασκείται συνολική δύναμη $F_{1,ελ} - mg$ που θα παίξει τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς, άρα η μέγιστη τιμή της $F_{επ,1}$ είναι ίση με την τάση του νήματος, $F_{επ(max)1} = T = 2mg$

Όμοια, στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - T + F_{2,ελ} = 0 \Rightarrow T = F_{2,ελ} + mg$$

Όταν καταργηθεί η τάση, T , του νήματος, στο σώμα Σ_2 θα ασκείται συνολική δύναμη $F_{2,ελ} + mg$ που θα παίξει τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς, άρα η μέγιστη τιμή της $F_{επ,2}$ είναι ίση με την τάση του νήματος, $F_{επ(max)2} = T = 2mg$

Τα δύο συστήματα έχουν ίδια $F_{επ(max)}$ και ίδια σταθερά ελατηρίου, άρα έχουν δια πλάτη ταλάντωσης ($F_{επ(max)} = kA$) και ίδιες ενέργειες ταλάντωσης, άρα $E_1/E_2 = 1$.

7.B.45 i. β. ii. α.

i. Η θέση ισορροπίας του σώματος, όταν ακουμπάει στο δάπεδο γίνεται με το ελατήριο επιμηκυτό κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - N - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg - N}{k} = \frac{mg - \frac{mg}{2}}{k} \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg}{2k} \quad (1)$$

Όταν ανεβάζουμε το σώμα στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση με πλάτος όσο είναι η απόσταση του φυσικού μήκους του ελατηρίου από τη νέα Θ.Ι. που είναι ίση με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_1 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_1 = A = \frac{mg}{k}$$

Άρα η Θ.Ι. βρίσκεται κάτω από το επίπεδο του δαπέδου και το σώμα όταν συγκρούεται με το δάπεδο βρίσκεται σε θετική απομάκρυνση $x_1 = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_0 = \frac{mg}{2k}$. Η ΑΔΕΤ δίνει την ταχύτητα του

σώματος ελάχιστα πριν συγκρουστεί με το δάπεδο

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = k\left(\frac{mg}{2k}\right)^2 + mv^2 \Rightarrow$$

$$\frac{3m^2g^2}{4k} = mv^2 \Rightarrow v = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{3m}{k}}$$

ii. Αφού τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση, έστω τη θετική, (θετικά προς τα πάνω) η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\pi/2$ rad.

Τη χρονική στιγμή που φτάνει το σώμα στο δάπεδο έχει απομάκρυνση θετική και ταχύτητα αρνητική και από την εξίσωση της απομάκρυνσης με τον χρόνο έχουμε

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_1 = \Delta\ell_1\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{mg}{2k} = \frac{mg}{k}\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} \omega t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} & (1) \\ \omega t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} & (2) \end{cases}$$

Για αρνητική ταχύτητα (συνφ<0), δεκτή είναι η (2) και για κ=0 παίρνουμε

$$\omega t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}}t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

7.B.46 γ.

Η ταλάντωση εξελίσσεται στο οριζόντιο επίπεδο, οπότε η προσθήκη μάζας δεν επηρεάζει τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, που συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Επειδή η κρούση γίνεται στη θέση ισορροπίας οι ταχύτητες πριν και μετά την κρούση θα αποτελούν τις μέγιστες ταχύτητες των δύο ταλαντώσεων.

Με εφαρμογή της ΑΔΟ παίρνουμε

$$m_1 v_{\max 1} = (m_1 + m_2) v_{\max 2} \Rightarrow v_{\max 2} = \frac{v_{\max 1}}{2}$$

Η ενέργεια ταλάντωσης συμπίπτει με τη μέγιστη κινητική ενέργεια της ταλάντωσης, οπότε έχουμε:

$$E_1 = K_{\max 1} = \frac{1}{2} m_1 v_{\max 1}^2$$

$$E_2 = K_{\max 2} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\max 2}^2 \Rightarrow E_2 = \frac{1}{2} (2m_1) \left(\frac{v_{\max 1}}{2} \right)^2 \Rightarrow E_2 = \frac{E_1}{2} \Rightarrow E_1 = 2E_2$$

7.B.47 i. α. ii. γ.

i. Έχουμε δύο διαφορετικά συστήματα αρμονικής ταλάντωσης τα οποία έχουν την ίδια θέση ισορροπίας, στο φυσικό μήκος του ελατηρίου, οπότε από το διάγραμμα προκύπτει ότι το σύστημα m_1 -k έχει πλάτος ταλάντωσης d και το σύστημα m_2 -k έχει πλάτος d/2. Επίσης, από το διάγραμμα και τον άξονα των χρόνων βρίσκουμε τις δύο περιόδους

$$\frac{T_1}{4} = 1s \Rightarrow T_1 = 4s \quad \text{και} \quad T_2 = 8s \Rightarrow T_2 = 2T_1$$

Όμως $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$ και $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}}$, οπότε έχουμε

$$T_2 = 2T_1 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 2 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow \frac{m_1 + m_2}{k} = 4 \frac{m_1}{k} \Rightarrow m_2 = 3m_1$$

ii. Οι δύο ταλαντώσεις έχουν την ίδια σταθερά επαναφοράς $D=k$, οπότε για τις ενέργειες ταλάντωσης έχουμε

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}kA_1^2}{\frac{1}{2}kA_2^2} = \frac{d^2}{(d/2)^2} \Rightarrow E_1 = 4E_2$$

7.B.48 γ.

Η ταλάντωση εξελίσσεται στο οριζόντιο επίπεδο, οπότε η προσθήκη μάζας δεν επηρεάζει τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, που συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Επειδή η κρούση γίνεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης και η πλαστελίνη δεν έχει αρχική ορμή, οι ταχύτητες πριν και μετά την κρούση θα είναι μηδέν. Άρα, το πλάτος της νέας ταλάντωσης θα είναι ίσο με το πλάτος της αρχικής ταλάντωσης.

Για τα μέτρα των μέγιστων επιταχύνσεων έχουμε:

$$\alpha_{\max 1} = \omega_1^2 A_1 = \frac{k}{m_1} A \quad (1) \text{ και}$$

$$\alpha_{\max 2} = \omega_2^2 A_2 = \frac{k}{m_2 + m_1} A = \frac{k}{3m_1 + m_1} A \Rightarrow$$

$$\alpha_{\max 2} = \frac{k}{4m_1} A \xrightarrow{(1)} \alpha_{\max 2} = \frac{\alpha_{\max 1}}{4} \Rightarrow \alpha_{\max 1} = 4\alpha_{\max 2}$$

7.B.49 γ.

Μετά την κρούση η ταλάντωση εξελίσσεται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από θέση ισορροπίας που συμπίπτει με το φυσικό μήκος του ελατηρίου, έτσι η ταχύτητα που αποκτά το σώμα Β μετά την κρούση αποτελεί τη $v_{\max}$ της ταλάντωσης.

Από την κεντρική ελαστική κρούση έχουμε

$$v_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v \Rightarrow v_B = \frac{v}{2}$$

$$\text{Όμως } v_{\max} = v_B = \frac{v}{2} \Rightarrow \omega A = \frac{v}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} A = \frac{v}{2} \Rightarrow A = \frac{vT}{4\pi}$$

7.B.50 α.

Μετά την κρούση η ταλάντωση εξελίσσεται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από θέση ισορροπίας που συμπίπτει με το φυσικό μήκος του ελατηρίου, έτσι η ταχύτητα που αποκτά το συσσωμάτωμα μετά την κρούση αποτελεί τη $v_{\max}$ της ταλάντωσης.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση έχουμε

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow mv_0 = 2mV_{\kappa} \Rightarrow V_{\kappa} = \frac{v_0}{2}$$

$$\text{Όμως } v_{\max} = V_{\kappa} = \frac{v_0}{2} \text{ και}$$

$$E_T = \frac{1}{2} 2mV_{\kappa}^2 = \frac{1}{2} 2m \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 \Rightarrow E_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mv_0^2$$

$$\text{Άρα, } \pi\% = \frac{E_T}{E_{\beta\lambda}} 100\% = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mv_0^2}{\frac{1}{2} mv_0^2} 100\% \Rightarrow \pi\% = 50\%$$

7.B.51 γ.

Οι δύο ταλαντώσεις εξελίσσονται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από θέση ισορροπίας που συμπίπτει με το φυσικό μήκος του ελατηρίου, έτσι οι ταχύτητες που αποκτούν και στις δύο περιπτώσεις μετά την κρούση αποτελούν τη $v_{\max}$ της κάθε ταλάντωσης. Ίδιες μέγιστες συσπειρώσεις συνεπάγεται ίδια πλάτη ταλάντωσης και άρα ίδιες ενέργειες ταλάντωσης. Συμβολίζουμε με v_2' την ταχύτητα του σώματος μάζας M μετά την ελαστική κρούση και με V_{κ} την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την πλαστική κρούση. Είναι

$$E_A = E_B \Rightarrow K_{A(\max)} = K_{B(\max)} \Rightarrow \frac{1}{2} M v_2'^2 = \frac{1}{2} (M + m) V_{\kappa}^2 \quad (1)$$

Από τον τύπο της κεντρικής ελαστικής κρούσης έχουμε

$$v_2' = \frac{2m}{M + m} v_0 \quad (2)$$

Από την Α.Δ.Ο. για την πλαστική κρούση έχουμε

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow mv_0 = (M + m) V_{\kappa} \Rightarrow V_{\kappa} = \frac{mv_0}{M + m} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση των (2) και (3) στην (1) παίρνουμε

$$\frac{1}{2} M \left(\frac{2m}{M + m} v_0 \right)^2 = \frac{1}{2} (M + m) \left(\frac{mv_0}{M + m} \right)^2 \Rightarrow \frac{m}{M} = 3$$

7.B.52 α.

Το σώμα Σ_2 μάζας m_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση από ύψος $h=3\Delta\ell_0$ και συγκρούεται με το Σ_1 , με ταχύτητα που προκύπτει από το ΘΜΚΕ

$$K_{2\text{τελ}} - K_{2\text{αρχ}} = W_{w2} \Rightarrow \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - 0 = m_2 gh \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος Σ_1 - k είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{m_1 g}{k} \quad (2)$$

Η κρούση είναι πλαστική, άρα η ΑΔΟ δίνει

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{v_2}{2} = \frac{\sqrt{2gh}}{2} \quad (3)$$

Μετά την πλαστική κρούση, η νέα θέση ισορροπίας είναι πιο κάτω από την παλιά κατά x_1 , που ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k(\Delta\ell_0 + x_1) = 0 \xrightarrow{(2)} x_1 = \frac{m_2 g}{k} = \frac{mg}{k}$$

Με εφαρμογή της ΑΔΕΤ μεταξύ της θέσης που έγινε η κρούση και της ακραίας θέσης της ταλάντωσης έχουμε

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow kA^2 = k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2m\left(\frac{\sqrt{2gh}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2m}{k} \frac{2g3\Delta\ell_0}{4}} = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 3\left(\frac{mg}{k}\right)^2} \Rightarrow A = \frac{2mg}{k}$$

7.B.53 β.

Με εφαρμογή της ΑΔΕΤ μεταξύ της θέσης που έγινε η κρούση και της ακραίας θέσης της ταλάντωσης βρίσκουμε τη σχέση για την ταχύτητά του εκείνη τη στιγμή, που είναι θετική

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \Rightarrow kA^2 = k\left(\frac{A}{2}\right)^2 + m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{k}{m_1}} A$$

Η κρούση είναι πλαστική, άρα η ΑΔΟ δίνει

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{v_1}{4}$$

Μετά την πλαστική κρούση, η θέση ισορροπίας παραμένει ίδια με την αρχική, στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και η νέα ΑΔΕΤ δίνει το νέο πλάτος

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{A}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} 4 m_1 \left(\frac{v_1}{4} \right)^2 \Rightarrow$$

$$k A'^2 = \frac{k A^2}{4} + 4 m_1 \frac{1}{16} \frac{3}{4} \frac{k}{m_1} A^2 \Rightarrow A' = \frac{A}{4} \sqrt{7}$$

7.B.54 α.

Αφού τη χρονική στιγμή $t_0=0s$ η απομάκρυνση του σώματος είναι $x=A_1$, η ταλάντωση έχει αρχική φάση $\pi/2$ rad

$$x = A_1 \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A_1 = A_1 \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Τη στιγμή $t=T/6$ η απομάκρυνση είναι

$$x = A_1 \eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A_1 \eta \mu \left(\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{6} + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow x = \frac{A_1}{2}$$

και η ταχύτητά του

$$v_1 = A_1 \omega \sigma \nu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A_1 \omega \sigma \nu \left(\frac{2\pi T}{T} \frac{T}{6} + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow v_1 = -A_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{2\pi}{T} = -\frac{A_1 \pi}{T} \sqrt{3}$$

Για να είναι το νέο πλάτος $A_2=A_1/2$, πρέπει η θέση της κρούσης να γίνει ακραία θέση για τη νέα ταλάντωση, άρα το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έμεινε στιγμιαία ακίνητο. Η ΑΔΟ δίνει για το μέτρο της ταχύτητας v_2 του Σ_2

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 |v_1| - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V = 0 \Rightarrow$$

$$m_1 |v_1| = m_2 v_2 \Rightarrow m_1 \frac{A_1 \pi}{T} \sqrt{3} = \sqrt{3} m_1 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{\pi A_1}{T}$$

7.B.55 i. β. ii. α.

i. Αφού το βλήμα εξέρχεται με κινητική ενέργεια μειωμένη κατά 75%, η νέα ταχύτητά του v_2' είναι

$$K_2' = K_2 - \frac{75}{100} K_2 \Rightarrow K_2' = \frac{25}{100} K_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow v_2' = \frac{1}{2} v_2$$

Αφού κατά την κρούση, αναπτύσσεται θερμότητα ίση με τη μισή αρχική κινητική ενέργεια του βλήματος, η ΑΔΕ δίνει για την ταχύτητα του Σ_1 μετά την κρούση

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_2 = K_2' + K_1' + Q \Rightarrow K_2 = \frac{K_2}{4} + K_1' + \frac{K_2}{2} \Rightarrow K_1' = \frac{K_2}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \Rightarrow m_1 v_1'^2 = \frac{1}{4} m_2 v_2'^2 \quad (1)$$

Η ΑΔΟ για την κρούση δίνει

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 \frac{v_2}{2} \Rightarrow m_1 v_1' = m_2 \frac{v_2}{2} \quad (2)$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε $v_1' = \frac{v_2}{2}$ και $m_1 = m_2$.

ii. Η ταχύτητα του Σ_1 μετά την κρούση, είναι μέγιστη για την ταλάντωση που ακολουθεί, άρα

$$v_1' = v_{\max} \Rightarrow \frac{v_2}{2} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A \Rightarrow A = \frac{v_2}{2} \sqrt{\frac{m_1}{k}}$$

7.B.56 i. γ. ii. α.

i. Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος $\Sigma_2 - k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g - k \Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{m_2 g}{k} \quad (1)$$

Η κρούση είναι πλαστική, άρα η ΑΔΟ δίνει

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = \frac{v_1}{2}$$

Μετά την πλαστική κρούση, η νέα θέση ισορροπίας είναι πιο κάτω από την παλιά κατά x_1 , που ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2) g - k (\Delta \ell_0 + x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} x_1 = \frac{m_1 g}{k} = \frac{m g}{k}$$

Αφού το συσσωμάτωμα σταματά στιγμιαία στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με $A = \Delta \ell_0 + x_1 = \frac{2mg}{k}$.

Η εφαρμογή της ΑΔΕΤ μεταξύ της θέσης που έγινε η κρούση και της ακραίας θέσης της ταλάντωσης δίνει

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow k\left(\frac{2mg}{k}\right)^2 = k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2m\frac{v_1^2}{4} \Rightarrow$$

$$v_1 = g\sqrt{\frac{6m}{k}}$$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ισούται με

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{dW_{F_{\varepsilon\pi}}}{dt} = -F_{\varepsilon\pi} V = -(-kx_1)V = kx_1 \frac{v_1}{2} = k \frac{mg}{k} \frac{g}{2} \sqrt{\frac{6m}{k}} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{mg^2}{2} \sqrt{\frac{6m}{k}}$$

7.B.57 α.

Η αρχική θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg}{k} \quad (1)$$

Το σώμα Σ_2 μάζας m_2 εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα κάτω από ύψος $h = \Delta\ell_0$ και συγκρούεται με το Σ_1 , με ταχύτητα που προκύπτει από το ΘΜΚΕ

$$K_{2\text{τελ}} - K_{2\text{αρχ}} = W_{w2} \Rightarrow \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_2v_0^2 = m_2gh \Rightarrow$$

$$m_2v_2^2 - m_22gh = 2m_2gh \Rightarrow v_2 = 2g\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2)$$

Η κρούση είναι πλαστική, άρα η ΑΔΟ δίνει

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_2v_2 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{v_2}{2} = g\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3)$$

Μετά την πλαστική κρούση, η νέα θέση ισορροπίας είναι πιο κάτω από την παλιά κατά x_1 , που ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k(\Delta\ell_0 + x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} x_1 = \frac{m_2g}{k} = \frac{mg}{k}$$

Η εφαρμογή της ΑΔΕΤ μεταξύ της θέσης που έγινε η κρούση και της ακραίας θέσης της ταλάντωσης δίνει

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow kA^2 = k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2m\left(g\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2m}{k}g^2\frac{m}{k}} = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2\left(\frac{mg}{k}\right)^2} \Rightarrow A = \frac{mg}{k}\sqrt{3}$$

7.B.58 i. γ. ii. α.

i. Η εφαρμογή της ΑΔΕΤ μεταξύ της ακραίας θέσης της ταλάντωσης και της θέσης που έγινε η κρούση δίνει το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}kA_1^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 \Rightarrow k(2d)^2 = kd^2 + m_1v_1^2 \Rightarrow$$

$$3kd^2 = m_1v_1^2 \Rightarrow v_1 = d\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Για την κεντρική ελαστική κρούση ισχύουν:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 = \frac{m - 3m}{m + 3m}v_1 \Rightarrow v_1' = -\frac{v_1}{2}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 = \frac{2m}{m + 3m}v_1 \Rightarrow v_2' = \frac{v_1}{2}$$

Η νέα ταλάντωση έχει ίδια θέση ισορροπίας με την αρχική, το Σ_1 μετά την κρούση βρίσκεται σε ίδια απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και η ΑΔΕΤ δίνει το πλάτος της νέας ταλάντωσης

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2}kA_2^2 = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_1v_1'^2 \Rightarrow A_2^2 = d^2 + \frac{m}{k}\left(\frac{-d\sqrt{\frac{3k}{m}}}{2}\right)^2 = d^2 + \frac{3}{4}d^2 \Rightarrow A_2 = \frac{d}{2}\sqrt{7}$$

ii. Σε χρόνο μιας περιόδου το Σ_1 επανέρχεται στη θέση της κρούσης, ενώ το σώμα Σ_2 , που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, διανύει απόσταση που είναι ίση με

$$x_2 = v_2T = \frac{d\sqrt{\frac{3k}{m}}}{2}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow x_2 = \pi d\sqrt{3}$$

7.B.59 i. α. ii. β.

i. Η ΑΔΟ για την κρούση δίνει

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_2v_2 = m_1v_1' - m_2\frac{v_2}{4} \Rightarrow mv_2 = 2mv_1' - m\frac{v_2}{4} \Rightarrow v_1' = \frac{5v_2}{8}$$

Το Σ_1 μετά την κρούση βρίσκεται στη Θ.Ι., άρα η ταχύτητα v_1' αποτελεί την v_{max} της ταλάντωσης. Το πλάτος θα προκύψει από την ΑΔΕΤ

$$E = K_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \Rightarrow A = \frac{5v_2}{8} \sqrt{\frac{2m}{k}}$$

ii. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του Σ_2 , που μετατράπηκε σε θερμότητα ισούται με

$$\pi\% = \frac{Q}{K_2} 100\% = \frac{K_2 - K_2' - K_1'}{K_2} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2} 100\% \Rightarrow$$

$$\pi\% = \frac{m v_2'^2 - m \left(\frac{v_2}{4} \right)^2 - 2m \left(\frac{5v_2}{8} \right)^2}{m v_2'^2} 100\% = \left(1 - \frac{1}{16} - \frac{50}{64} \right) 100\% \Rightarrow \pi\% = \frac{125}{8} \%$$

7.B.60 β.

Έστω ότι το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας όταν κόβεται το νήμα. Εκείνη τη στιγμή ασκούνται στη ράβδο τρεις δυνάμεις: το βάρος της, το βάρος του σώματος, που λόγω της ισορροπίας του στον κατακόρυφο άξονα, μεταφέρεται στη ράβδο και η δύναμη από την άρθρωση Α. Ελάχιστα πριν συμβεί το κόψιμο του νήματος, η ράβδος ισορροπεί, λόγω της τάσης του νήματος και η συνθήκη ισορροπίας ως προς την άρθρωση δίνει

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T_{\theta\phi} L - w_{\sigma} \frac{L}{2} - w_{\Sigma} \left(\frac{L}{2} + x \right) = 0 \Rightarrow$$

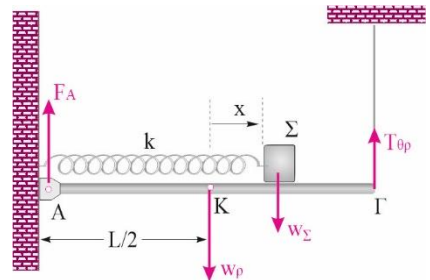
$$T_{\theta\phi} L = mg \frac{L}{2} + mg \left(\frac{L}{2} + x \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{4mg}{3} L = mgL + mgx \Rightarrow x = \frac{L}{3}$$

Η θέση του σώματος, όταν κόβεται το νήμα, είναι τυχαία θέση για την ταλάντωση και η ΑΔΕΤ δίνει

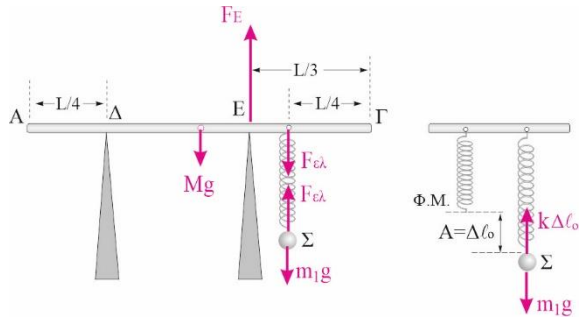
$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0'^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow m \frac{k}{m} \left(\frac{2L}{3} \right)^2 = k \left(\frac{L}{3} \right)^2 + m v^2 \Rightarrow$$

$$k \frac{3L^2}{9} = m v^2 \Rightarrow v = L \sqrt{\frac{k}{3m}}$$



7.B.61 γ.

Η σανίδα θα ανατραπεί στη θέση που οριακά παύει να ισχύει η σχέση ισορροπίας $\Sigma \tau = 0$. Εκείνη τη στιγμή χάνεται η επαφή από το αριστερό στήριγμα, καθώς το ελατήριο έχει αρχικά το φυσικό του μήκος και μετά μόνο επιμηκύνεται. Τη στιγμή που μηδενίζεται η δύναμη από το αριστερό στήριγμα ασκούνται στη ράβδο τρεις δυνάμεις: το βάρος της, η δύναμη στήριξης από το δεξιό στήριγμα και η δύναμη του ελατηρίου.



Παίρνουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τις ροπές ως προς το δεξιό στήριγμα και βρίσκουμε τη δύναμη του ελατηρίου

$$\Sigma \tau_{(E)} = 0 \Rightarrow Mg \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) - F_{ελ} \left(\frac{L}{3} - \frac{L}{4} \right) = 0 \Rightarrow Mg \frac{L}{6} = F_{ελ} \frac{L}{12} \Rightarrow F_{ελ} = 2mg$$

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g - k \Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{m_1 g}{k} = \frac{1,5mg}{k}$$

Αφού εκτρέπουμε το σώμα μέχρις ότου το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό του μήκος, το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με $A = \Delta \ell_0 = \frac{1,5mg}{k}$.

Βρίσκουμε την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας όπου $F_{ελ} = 2mg$,

$$F_{ελ} = 2mg \Rightarrow k(\Delta \ell_0 + x) = 2mg \Rightarrow 1,5mg + kx = 2mg \Rightarrow x = \frac{mg}{2k}$$

δηλαδή το σώμα βρίσκεται κάτω από τη θέση ισορροπίας κατά $mg/2k$.

Ο λόγος της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου προς τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης σ' αυτή τη θέση είναι ίσος με

$$\frac{U_{ελ}}{U_{ταλ}} = \frac{\frac{1}{2} k (\Delta \ell_0 + x)^2}{\frac{1}{2} k x^2} = \frac{\left(\frac{1,5mg}{k} + \frac{mg}{2k} \right)^2}{\left(\frac{mg}{2k} \right)^2} = \frac{2^2}{\left(\frac{1}{2} \right)^2} \Rightarrow \frac{U_{ελ}}{U_{ταλ}} = 16$$

7.B.62 α.

Στη θέση ισορροπίας της σανίδας, η σχέση ισορροπίας $\Sigma \tau = 0$ ως προς το δεξιό της άκρο, δίνει

$$\Sigma \tau_{(\Delta)} = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{2} - TL = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{2}$$

Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος $m - k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg + T - k\Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{mg + T}{k} = \frac{3mg}{2k} \quad (1)$$

Μετά το κόψιμο του νήματος, η νέα θέση ισορροπίας είναι πιο πάνω από την παλιά κατά x_1 , που ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k(\Delta \ell_0 - x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} mg = k \left(\frac{mg + T}{k} - x_1 \right) \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{T}{k} \Rightarrow x_1 = \frac{mg}{2k}$$

Το κόψιμο του νήματος θα προκαλέσει ταλάντωση του συστήματος γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας και το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = x_1 = \frac{mg}{2k}$.

Άρα, η ενέργεια της ταλάντωσης E είναι ίση με

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{2k} \right)^2 \Rightarrow E = \frac{m^2 g^2}{8k}$$

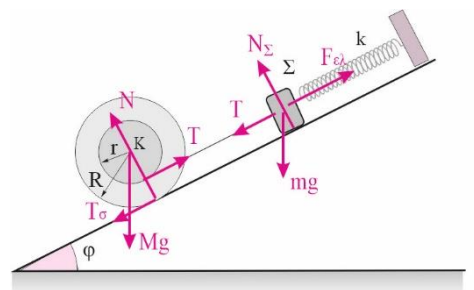
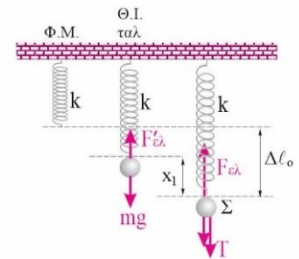
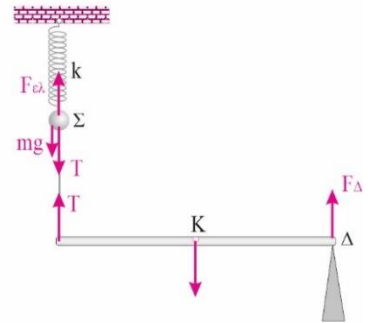
7.B.63 i. α. ii. α.

i. Στην τροχαλία, ασκούνται τέσσερις δυνάμεις: το βάρος της στο κέντρο της, η κάθετη δύναμη στήριξης, η στατική τριβή από το δάπεδο και η δύναμη της τάσης του νήματος.

Παίρνουμε τη συνθήκη ισορροπίας για τις ροπές ως προς το κέντρο K και βρίσκουμε

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow Tr - T_\sigma R = 0 \Rightarrow T_\sigma = \frac{T}{2} \quad (1)$$

Από την ενέργεια της ταλάντωσης E προκύπτει το πλάτος της είναι ίσο με



$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \frac{m^2 g^2}{2k} = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \frac{mg}{k}$$

Η συνέχεια μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

Α' τρόπος

Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος $m - k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg\eta\mu\phi + T - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg\eta\mu\phi + T}{k} \quad (2)$$

Μετά το κόψιμο του νήματος, η νέα θέση ισορροπίας είναι πιο πάνω από την παλιά κατά x_1 , που ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg\eta\mu\phi - k(\Delta\ell_0 - x_1) = 0 \xrightarrow{(2)}$$

$$mg\eta\mu\phi = k\left(\frac{mg\eta\mu\phi + T}{k} - x_1\right) \Rightarrow x_1 = \frac{T}{k} \quad (3)$$

Το κόψιμο του νήματος θα προκαλέσει ταλάντωση του συστήματος γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας και το πλάτος της ταλάντωσης είναι

$$A = x_1 = \frac{mg}{k} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι

$$x_1 = \frac{T}{k} = \frac{mg}{k} \Rightarrow T = mg$$

$$\text{και από την (1)} \quad T_\sigma = \frac{T}{2} = \frac{mg}{2}.$$

Β' τρόπος

Όταν κόπηκε το νήμα, το σώμα βρισκόταν κάτω από τη θέση ισορροπίας του κατά $x_1 = \frac{mg}{k}$ και

η μέγιστη δύναμη επαναφοράς που δέχτηκε στο ξεκίνημα της ταλάντωσης είναι αντίθετη της τάσης του νήματος που υπήρχε, οπότε

$$T = F_{\varepsilon\pi(\max)} \Rightarrow T = kA = k\frac{mg}{k} \Rightarrow T = mg$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (1) προκύπτει $T_\sigma = \frac{mg}{2}$.

ii. Από την ισορροπία των δυνάμεων στον άξονα του πλαγίου επιπέδου έχουμε

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_\sigma + mg\eta\mu\phi - T = 0 \Rightarrow T_\sigma + mg\eta\mu\phi - 2T_\sigma = 0 \Rightarrow mg\eta\mu\phi = T_\sigma = \frac{mg}{2} \Rightarrow \eta\mu\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = 30^\circ$$

