

Θέματα Δ

7.Δ.1

α. Η ταχύτητα του Σ_1 πριν την κρούση είναι

$$v_1 = \omega_1 A_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A_1 \Rightarrow v_1 = 3,2 \text{ m/s}$$

η οποία αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης.

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για το σύστημα των Σ_1 και Σ_2 λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_K \Rightarrow V_K = 0,8 \text{ m/s}$$

$$\beta. x = A_2 \eta \mu \omega_2 t, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 8 \text{ rad/s}$$

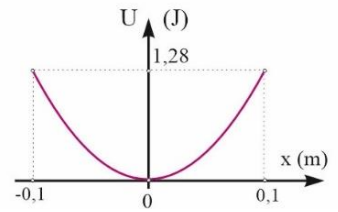
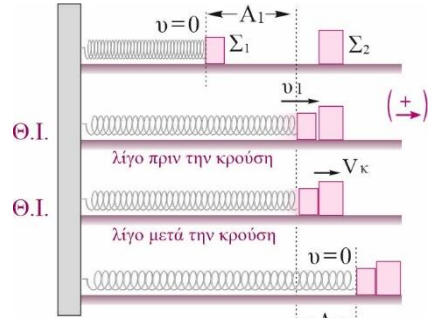
$$v_{2\max} = \omega_2 A_2 \Rightarrow A_2 = 0,1 \text{ m}$$

$$x = 0,1 \cdot \eta \mu 8t, \text{ (S.I.)}$$

$$\gamma. U = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow U = 128 x^2, \quad -0,1 \text{ m} \leq x \leq +0,1 \text{ m}$$

και η γραφική της παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

$$\delta. U + K = E_T \Rightarrow \Delta U + \Delta K = \Delta E_T = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U = -0,32 \text{ J}$$



7.Δ.2

α. Ένα σώμα που κάνει α.α.τ. διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με τη μέγιστη κινητική ενέργεια, οπότε έχουμε

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot K_{\max}}{m}} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{2} \text{ m/s}$$

β. Από τον τύπο της μέγιστης ταχύτητας έχουμε

$$v_{\max} = \omega \cdot A \Rightarrow A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{v_{\max} \cdot T}{2\pi} \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

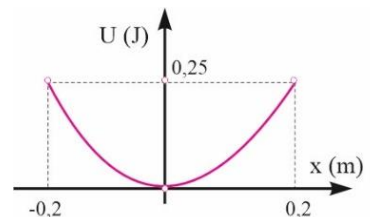
γ. Βρίσκουμε τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{50} \text{ rad/s}$$

$$U = \frac{1}{2} D x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$U = 6,25 \cdot x^2 \quad -0,2 \text{ m} \leq x \leq 0,2 \text{ m}$$

και η γραφική της παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

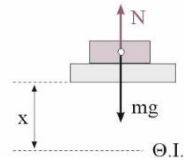


$$\delta. F_{\epsilon\pi} = -Dx = -m\omega^2 A \eta \mu \omega t \quad \text{ή} \quad F_{\epsilon\pi} = -2,5 \cdot \eta \mu \sqrt{50} t \quad (\text{SI})$$

$$\epsilon. \Sigma F = F_{\epsilon\pi} \Rightarrow N - mg = -Dx \Rightarrow$$

$$N = 2,5 - 12,5x = 2,5 - 12,5 \cdot 0,2 \eta \mu \sqrt{50} t \quad (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$N = 2,5 - 2,5 \sqrt{50} t \quad (\text{SI})$$



7.Δ.3

α. Η ενέργεια ταλάντωσης ενός συστήματος $m - k$ βρίσκεται

$$\text{από τη σχέση } E = \frac{1}{2} k A^2 \quad (1)$$

Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος $m - k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k \Delta \ell_0 = 0 \quad (2)$$

Μετά την άσκηση της πρόσθετης δύναμης το ελατήριο συμπιέζεται επιπλέον κατά x_1 και η νέα συνθήκη ισορροπίας μας δίνει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg + F - k(\Delta \ell_0 + x_1) = 0 \xrightarrow{(2)} F = kx_1 \Rightarrow k = \frac{F}{x_1} = \frac{2\text{N}}{0,04\text{m}} \Rightarrow k = 50\text{N/m}$$

Η απότομη αφαίρεση της πρόσθετης δύναμης θα προκαλέσει ταλάντωση του συστήματος γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας και θα έχει ως κάτω ακραία θέση, τη θέση κατάργησης της δύναμης. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = x_1 = 0,04\text{m}$.

Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε $E_T = 0,04\text{J}$.

$$\beta. \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5\text{rad/s}$$

$$\gamma. x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$$

$$A = 0,04\text{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5\text{rad/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα ξεκινάει από τη μέγιστη θετική απομάκρυνση, άρα υπάρχει αρ-
χική φάση

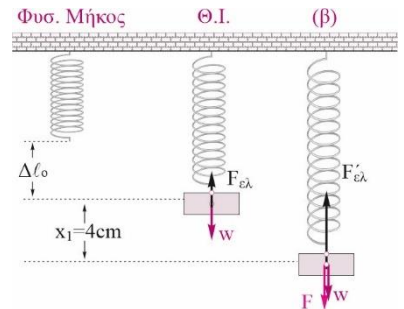
$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad και η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι}$$

$$x = 0,04 \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{S.I.})$$

$$\delta. U_{\epsilon\lambda} = \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 \quad (3)$$

όπου $\Delta \ell$ η παραμόρφωση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος.

Από τη σχέση (2) βρίσκουμε την αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου



$$\Delta \ell_0 = \frac{mg}{k} = \frac{20N}{50N/m} \Rightarrow \Delta \ell_0 = 0,4m$$

οπότε η μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου είναι

$$\Delta \ell_{\max} = \Delta \ell_0 + A = 0,4m + 0,04m \Rightarrow \Delta \ell_{\max} = 0,44m$$

και με αριθμητική αντικατάσταση στη σχέση (3) προκύπτει $U_{\varepsilon\lambda(\max)} = 4,84J$.

7.Δ.4

$$\alpha. E_{\chi\eta\mu} = W_{F_{\varepsilon\lambda}(A \rightarrow B)}$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ μεταξύ της θέσης ισορροπίας και της θέσης που το ελατήριο έχει πρόσθετη επιμήκυνση 20cm

$$K_B - K_A = W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_w, (1)$$

$$W_{F_{\varepsilon\lambda}(A \rightarrow B)} = U_{\varepsilon\lambda(A)} - U_{\varepsilon\lambda(B)} \Rightarrow W_{F_{\varepsilon\lambda}(A \rightarrow B)} = \frac{1}{2}k\Delta \ell_0^2 - \frac{1}{2}k\Delta \ell^2 = \frac{1}{2}k(\Delta \ell_0^2 - \Delta \ell^2) (2)$$

$$E_{\chi\eta\mu} = E_T = \frac{1}{2}kA^2, \quad A = \Delta \ell - \Delta \ell_0 = 0,2m$$

$$\Delta \ell_0 = \frac{mg}{k} = 0,1m, \quad \Delta \ell = \Delta \ell_1 + 0,2m = 0,3m$$

$$\xrightarrow{(2)} W_{F_{\varepsilon\lambda}(A \rightarrow B)} = \frac{1}{2}200(0,1^2 - 0,3^2) \Rightarrow W_{F_{\varepsilon\lambda}(A \rightarrow B)} = -8J$$

$$W_{w(A \rightarrow B)} = mg(\Delta \ell_2 - \Delta \ell_1) = 20N \cdot 0,2m \Rightarrow W_{w(A \rightarrow B)} = 4J$$

$$\xrightarrow{(1)} 0 = W_{F_{\varepsilon\lambda}(A \rightarrow B)} - 8J + 4J \Rightarrow W_{F_{\varepsilon\lambda}(A \rightarrow B)} = E_{\chi\eta\mu} = 4J$$

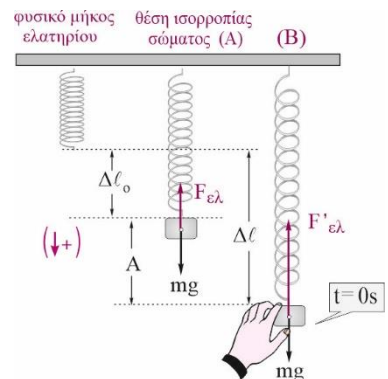
$$\beta. x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0), \quad A = 0,2m, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\text{rad/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0s$ το σώμα ξεκινάει από τη μέγιστη θετική απομάκρυνση, άρα υπάρχει αρ-
χική φάση $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$ και η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(\text{S.I.})$$

$$\gamma. K = 15U, \quad K + U = E_T \Rightarrow U = \frac{1}{16}E_T \Rightarrow x = \pm \frac{A}{4} \Rightarrow x = \pm 0,05m$$

$$\Delta x = +0,05m - (-0,05m) \Rightarrow \Delta x = 0,1m$$



$$\delta. \frac{dv}{dt} = a = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -100x$$

$$x_1 = +0,05\text{m}, \quad \frac{dv}{dt} = -5\text{m/s}^2$$

$$x_2 = -0,05\text{m}, \quad \frac{dv}{dt} = +5\text{m/s}^2$$

7.Δ.5

$$\alpha. \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} - w - T = 0 \Rightarrow$$

$$T = k\Delta\ell - mg = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,4\text{m} - 10\text{N} \Rightarrow T = 30\text{N}$$

$$\beta. x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Η ταλάντωση θα γίνει γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta\ell_0 = \frac{mg}{k} = \frac{10\text{N}}{100\text{N/m}} \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,1\text{m}$$

Άρα το πλάτος ταλάντωσης είναι

$$A = \Delta\ell - \Delta\ell_0 = 0,4\text{m} - 0,1\text{m} \Rightarrow A = 0,3\text{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\text{rad/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα ξεκινάει από τη μέγιστη θετική απομάκρυνση, άρα έχει αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$ και η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$y = 0,3\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(\text{S.I.})$$

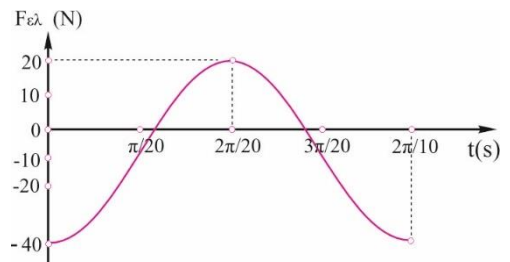
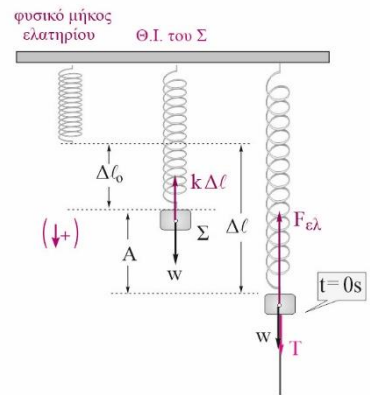
γ. Η χρονική εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου θα είναι

$$\Sigma F = F_{ελ} \Rightarrow F_{ελ} + mg = -ky \Rightarrow$$

$$F_{ελ} = -10 - 100 \cdot 0,3\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(\text{S.I.}) \Rightarrow$$

$$F_{ελ} = -10 - 30\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(\text{S.I.})$$

και η γραφική της παράσταση με τον χρόνο είναι όπως στο σχήμα.



δ. $U_{\text{ελα}}=0\text{J}$ στη Θ.Ι. της ταλάντωσης. Στη θέση αυτή το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta\ell=0,1\text{m}$ και το σώμα έχει ταχύτητα $v_{\text{max}}=\omega A=3\text{m/s}$

$$\frac{dU_{\text{ελα}}}{dt} = -\frac{dW_{F_{\text{ελα}}}}{dt} = -F_{\text{ελα}} \frac{dx}{dt} = -k \cdot \Delta\ell_1 \cdot v \Rightarrow \frac{dU_{\text{ελα}}}{dt} = -30\text{J/s}$$

7.Δ.6

α. Για το Σ_2 : $\Sigma F=0$ ή $T-m_2g=0$ ή $T=30\text{N}$

β. $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Η ταλάντωση του συστήματος $m_1 - k$ γίνεται γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_1$, που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1g - k\Delta\ell_1 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{m_1g}{k} \quad (1)$$

Η ταλάντωση του συστήματος $m_1 - k$ ξεκίνησε από θέση που απέχει $\Delta\ell_0$ από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, που υπολογίζεται από τη συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k}$$

Το πλάτος ταλάντωσης θα είναι ίσο με τη διαφορά των δύο επιμηκύνσεων

$$A = \Delta\ell_0 - \Delta\ell_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_1g}{k} \Rightarrow A = \frac{m_2g}{k} = \frac{30\text{N}}{400\text{N/m}} \Rightarrow A = 0,075\text{m}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα ξεκινάει από τη μέγιστη θετική απομάκρυνση, άρα έχει αρχική

φάση $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$ και η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$y = 0,075\eta\mu\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

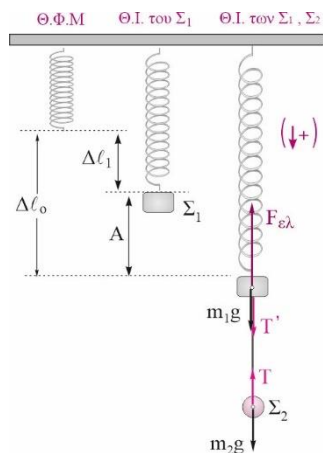
γ. Θα συμβεί τη χρονική στιγμή $t=3T/4=0,375\text{ s}$.

δ. Τη στιγμή $t_1=10\text{s}$ η απομάκρυνση είναι

$$y = 0,075\eta\mu\left(40\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0,075\text{m}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -ky \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -400 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,075\text{m} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -30\text{N}$$



7.Δ.7

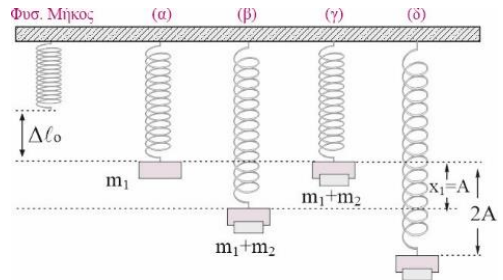
Θέση (α): Θέση ισορροπίας του συστήματος όταν στο ελατήριο κρέμεται το Σ_1 .

Θέση (β): Θέση ισορροπίας του συστήματος όταν στο ελατήριο κρέμονται τα Σ_1 και Σ_2 .

Θέση (γ): Θέση που ελευθερώνεται το σύστημα.

Θέση (α): $\Sigma F=0$ ή $m_1 g - k \Delta \ell_o = 0$ (1)

Θέση (β): $\Sigma F=0$ ή $(m_1 + m_2)g - k(\Delta \ell_o + x_1) = 0$



η οποία με τη βοήθεια της (1) δίνει $x_1 = \frac{m_2 g}{k} = 0,04 \text{ m}$.

α. Το σύστημα πρόκειται να ταλαντωθεί γύρω από τη θέση ισορροπίας (β). Η θέση (γ) που ελευθερώνεται το σύστημα αποτελεί την πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης. Άρα το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = x_1 = 0,04 \text{ m}$ και η μέγιστη απόσταση κάτω από την αρχική θέση ισορροπίας είναι $2A = 0,08 \text{ m}$.

β. $F_{\epsilon\pi\alpha\nu} = -kx$ με το x να δηλώνει απόσταση από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, άρα

$$F_{\epsilon\pi\alpha\nu(\max)} = |-kA| \Rightarrow F_{\epsilon\pi\alpha\nu(\max)} = 10 \text{ N}$$

$F_{\epsilon\lambda\alpha\tau} = -k\Delta\ell$ με το $\Delta\ell$ να δηλώνει απόσταση από το Φ.Μ. του ελατηρίου

$$F_{\epsilon\lambda\alpha\tau(\max)} = |-k(\Delta\ell_o + 2A)| \quad (2)$$

Από την (1) προκύπτει

$$\Delta\ell_o = \frac{m_1 g}{k} = 0,08 \text{ m}$$

Οπότε η (2) με αντικατάσταση δίνει $F_{\epsilon\lambda(\max)} = 40 \text{ N}$.

$$\gamma. (m_1 + m_2)\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{250}{3}} \text{ rad/s}$$

δ. Το σώμα ελευθερώθηκε την $t=0\text{s}$ από τη θέση $x=+A$, άρα έχει αρχική φάση $\phi_0 = \pi/2 \text{ rad}$.

$$x = 0,04 \cdot \eta\mu\left(\sqrt{\frac{250}{3}} t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

7.Δ.8

α. $x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Από τη συνθήκη της αρχικής ισορροπίας του συστήματος $m_1 - k$ υπολογίζουμε τη μάζα του δίσκου

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow$$

$$m_1 = \frac{k\Delta\ell_0}{g} = \frac{(50 \text{ N/m}) \cdot 0,1 \text{ m}}{10 \text{ m/s}^2} \Rightarrow m_1 = 0,5 \text{ kg}$$

Η ταλάντωση του συστήματος γίνεται γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_1$, που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k\Delta\ell_1 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} = \frac{(0,5 \text{ kg} + 1,5 \text{ kg}) \cdot 10 \text{ m/s}^2}{50 \text{ N/m}} \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0,4 \text{ m}$$

Το πλάτος ταλάντωσης θα είναι ίσο με τη διαφορά των δύο επιμηκύνσεων

$$A = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_0 \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 5 \text{ rad/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ το σώμα ξεκινάει από τη μέγιστη θετική απομάκρυνση, άρα έχει αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ και η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$y = 0,3\eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

β. $F_{\text{ελ}} = -kx$. Θα έχουμε $F_{\text{ελ}(\min)}$ όταν το x παίρνει τη μέγιστη θετική του τιμή όταν βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση

$$F_{\text{ελ}(\min)} = -50(+0,3) \text{ N} \quad \text{ή} \quad F_{\text{ελ}(\min)} = -15 \text{ N}$$

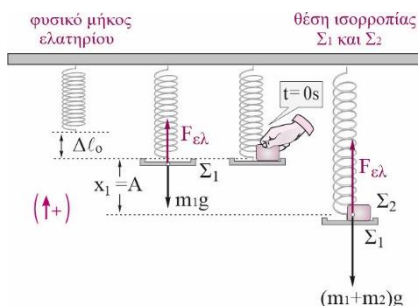
$$\Sigma F = -kx \quad \text{ή} \quad F_{\text{ελ}} - w = -kx \quad \text{ή} \quad F_{\text{ελ}} = 20 \text{ N} - 50x$$

Θα έχουμε $F_{\text{ελ}(\min)}$ όταν το x παίρνει τη μέγιστη θετική του τιμή

$$F_{\text{ελ}(\min)} = 20 \text{ N} - 50(+0,3) \text{ N} \quad \text{ή} \quad F_{\text{ελ}(\min)} = +5 \text{ N}$$

$$\gamma. \quad \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -kx$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής μηδενίζεται κάθε φορά που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του. Αφού ξεκινά από θέση ακραίας απομάκρυνσης θα χρειαστεί $T/4$ για να περάσει για 1^η φορά από τη θέση ισορροπίας και άλλη μισή περίοδο για 2^η φορά, οπότε



$$\Delta t = \frac{3}{4}T = \frac{3}{4} \frac{2\pi}{5} s \Rightarrow \Delta t = \frac{3\pi}{10} s$$

$$\delta. K + U = E_T \Rightarrow \frac{E_T}{4} + U = E_T \Rightarrow U = \frac{3}{4}E_T \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{3}{4} \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow x = \pm \frac{A\sqrt{3}}{2}$$

Επειδή το σώμα ελευθερώνεται στη θέση $x=+A$, η μικρότερη χρονική στιγμή είναι όταν το σώμα

διέρχεται από τη θέση $A \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$A \frac{\sqrt{3}}{2} = A \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \eta \mu \frac{\pi}{3} = \eta \mu \left(5t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} = 5t + \frac{\pi}{2} \quad (1) \quad , \quad 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 5t + \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Η σχέση (2) δίνει για $k=0$ τη μικρότερη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{30} s$.

7.Δ.9

$$\alpha. v = \sqrt{2gh} = \sqrt{15} \text{ m/s}$$

$$\Lambda\Delta O: p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow V = \frac{mv}{M+m} = \frac{\sqrt{15}}{16} \text{ m/s}$$

$$\beta. \Pi\Theta I: Mg = k\Delta\ell \quad , \quad (1)$$

$$\Theta I: Mg + mg = k\Delta\ell + kx_1 \quad , \quad (2)$$

$$(1), (2): mg = kx_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{160} m$$

$$\gamma. \Lambda\Delta E T: \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}(m+M)V^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = 0,025 \text{ m}$$

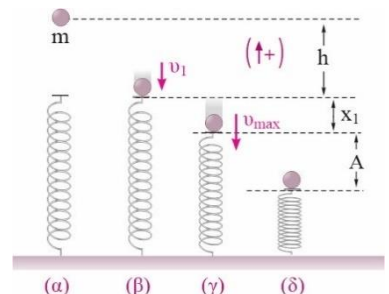
$$\delta. F_{\epsilon\lambda}^{\max} = k(\Delta\ell + x_1 + A) = 20 \text{ N}$$

7.Δ.10

α. Το σώμα θα εκτελέσει ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη θέση (γ).

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης ενέργειας για την ταλάντωση στις θέσεις (β) και (δ)

$$E_{\tau\alpha\lambda}^{\beta} = E_{\tau\alpha\lambda}^{\delta} \Rightarrow U_{\beta} + K_{\beta} = U_{\delta} \Rightarrow \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad (1)$$



Η ταχύτητα v_1 βρίσκεται από τους νόμους της ελεύθερης πτώσης

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{1,5} \text{ m/s}$$

Το x_1 βρίσκεται από τη συνθήκη ισορροπίας του συστήματος για τη θέση (γ)

$$x_1 = \frac{mg}{k} = 0,05 \text{ m}$$

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $A=0,1 \text{ m}$.

β. Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$x = 0,1 \mu\text{m} 10\sqrt{2}t(\text{S.I.})$$

γ. Η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη στιγμή αυτή είναι

$$x = 0,1 \mu\text{m} \left(10\sqrt{2} \cdot 0,2 \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \right) \Rightarrow x = 0,1 \mu\text{m} \frac{4\pi}{3} \text{ m} \Rightarrow x = -0,05\sqrt{3} \text{ m}$$

Το πηλίκο της δυναμικής προς την κινητική ενέργεια την ίδια στιγμή είναι

$$\frac{U}{K} = \frac{U}{E-U} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{2}kx^2}{\frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{x^2}{A^2 - x^2} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{0,75 \cdot 10^{-2}}{10^{-2} - 0,75 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \frac{U}{K} = 3$$

$$\delta. \frac{|F_{\epsilon\pi}|}{|F_{\epsilon\lambda}|} = \frac{k \cdot A}{k \cdot (A + x_1)} = \frac{0,1}{0,15} \Rightarrow \frac{|F_{\epsilon\pi}|}{|F_{\epsilon\lambda}|} = \frac{2}{3}$$

7.Δ.11

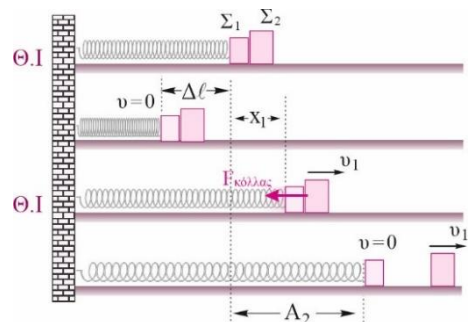
$$\alpha. D = k = 225 \text{ N/m}, D_2 = m_2 \omega^2 = m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} \Rightarrow D_2 = 125 \text{ N/m}$$

$$\beta. v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A \Rightarrow v_{\max} = 3 \text{ m/s}$$

$$\gamma. \text{ Για το } \Sigma_2: \Sigma F = -D_2 x \quad \text{ ή } \quad \Sigma F = -125x \quad (\text{SI}) \quad (1)$$

Τον ρόλο της $F_{\epsilon\pi\alpha\nu}$ για το Σ_2 μετά το πέρασμα από τη $\Theta.1$. τον παίζει η δύναμη της κόλλας η οποία μπορεί να φτάσει μέχρι την τιμή 25N. Από την (1) έχουμε

$$-25 \text{ N} = -125x_1 \quad \text{ ή } \quad x_1 = 0,2 \text{ m}$$



δ. Στη θέση αποκόλλησης τα σώματα έχουν ταχύτητα που βρίσκεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης

$$U + K = E_T \Rightarrow \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_1^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_{\max}^2 - \frac{k x_1^2}{m_1 + m_2}} = \sqrt{5} \text{ m/s}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης ενέργειας για τη νέα ταλάντωση

$$U + K = E_T \Rightarrow \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} k A_2^2 \Rightarrow A_2 = \frac{\sqrt{14}}{15} \text{ m}$$

7.Δ.12

α. Εφαρμόζουμε για το Σ_2 το ΘΜΚΕ μεταξύ των θέσεων (Α) όπου το Σ_2 έχει ταχύτητα v_0 και (Β) όπου το Σ_2 ελάχιστα πριν την κρούση έχει ταχύτητα v_1

$$K_B - K_A = W_w \Rightarrow \frac{1}{2} m_2 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_0^2 = -m_2 g h \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζουμε για το σύστημα των Σ_1, Σ_2 την ΑΔΟ λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_2 v_1 = (m_1 + m_2) V_k \Rightarrow V_k = 2 \text{ m/s}$$

β. Από τη συνθήκη της αρχικής ισορροπίας του συστήματος $m_1 - k$ υπολογίζουμε την αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου

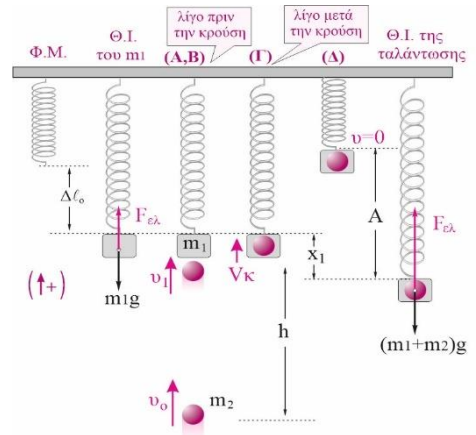
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k \Delta \ell_0 - m_1 g = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{m_1 g}{k} = 0,1 \text{ m}$$

Η ταλάντωση του συστήματος γίνεται γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από την αρχική θέση ισορροπίας κατά x_1 , που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k(\Delta \ell_0 + x_1) - (m_1 + m_2)g = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{m_2 g}{k} = 0,1 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση



$$E_{\text{ταλ}}^{\Gamma} = E_{\text{ταλ}}^{\Lambda} \Rightarrow \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{\kappa}^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow A = 0,3 \text{ m}$$

γ. Στην τυχαία θέση που βρίσκεται σε απομάκρυνση x πάνω από τη θέση ισορροπίας, η επιμήκυνση $\Delta \ell$ του ελατηρίου είναι ίση με $\Delta \ell = \Delta \ell_0 + x_1 - x$.

Για να είναι ίσες η δυναμική ενέργεια ελατηρίου και η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης θα πρέπει $U_{\text{ελ}} = U_{\text{ταλ}}$

$$U_{\text{ελ}} = U_{\text{ταλ}} \Rightarrow \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow (\Delta \ell_0 + x_1 - x)^2 = x^2 \Rightarrow$$

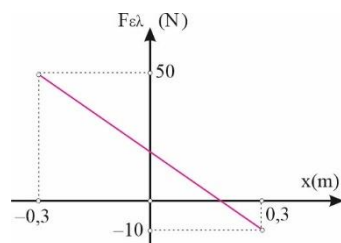
$$(0,2 \text{ m} - x)^2 = x^2 \Rightarrow 0,2 \text{ m} - x = \pm x$$

Η σχέση αυτή έχει λύση μόνο τη $x=0,1 \text{ m}$.

$$\delta. \Sigma F = -kx \Rightarrow F_{\text{ελ}} - (m_1 + m_2)g = -kx \Rightarrow$$

$$F_{\text{ελ}} = 20 - 100x, (\text{S.I.}) \quad -0,3 \text{ m} \leq x \leq 0,3 \text{ m}$$

και η γραφική της παράσταση είναι όπως στο σχήμα.



7.Δ.13

α. $\omega = 10 \text{ rad/s}$, άρα $T = (\pi/5) \text{ s}$

Τη χρονική στιγμή $t = (\pi/10) \text{ s} = T/2$ το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. με αρνητική ταχύτητα. Από την ενέργεια της ταλάντωσης είναι

$$E_T = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow k = \frac{2E_T}{A^2} = 1200 \text{ N/m}$$

$$v_{\text{max}} = \omega A = 1 \text{ m/s},$$

$$E_T = \frac{1}{2} m_1 v_{\text{max}}^2 \Rightarrow m_1 = \frac{2E_T}{v_{\text{max}}^2} = 12 \text{ kg}$$

$$\beta. E_T' = \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} 1200 (0,1\sqrt{6})^2 \Rightarrow E_T' = 36 \text{ J}$$

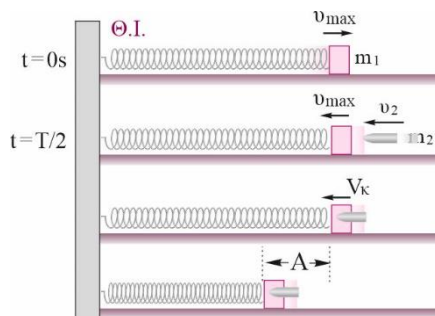
$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{200}{3}} \text{ rad/s}$$

γ. Το συσσωμάτωμα μετά την κρούση έχει ενέργεια E_T' και ταχύτητα V_{κ}

$$E_T' = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_{\kappa}^2 \Rightarrow V_{\kappa} = 2 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για το σύστημα των m_1, m_2 λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση

$$m_1 v_{\text{max}} + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V_{\kappa} \Rightarrow v_2 = 4 \text{ m/s}$$



$$\delta. W_F = \Delta K \Rightarrow W_F = 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_K^2 \Rightarrow$$

$$W_F = 0 - E'_T \Rightarrow W_F = -36 \text{ J}$$

7.Δ.14

α. Εφαρμόζουμε για το Σ_2 το ΘΜΚΕ μεταξύ των θέσεων (Α) όπου το Σ_2 έχει ταχύτητα v_0 και (Β) όπου το Σ_2 ελάχιστα πριν την κρούση έχει ταχύτητα v_1

$$K_B - K_A = W_w \Rightarrow \frac{1}{2}m_2v_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_0^2 = -m_2gh \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \Rightarrow v_1 = 10 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζουμε για το σύστημα των Σ_1, Σ_2 την ΑΔΟ λίγο πριν και λίγο μετά την κρούση

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_2v_1 = (m_1 + m_2)V_K \Rightarrow$$

$$V_K = 1,5 \text{ m/s}$$

β. Για την αρχική ισορροπία του συστήματος $m_1 - k$ έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k\Delta\ell_0 - m_1g = 0$$

Η ταλάντωση του συστήματος γίνεται γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από την αρχική θέση ισορροπίας κατά x_1 , που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow k(\Delta\ell_0 + x_1) - (m_1 + m_2)g = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{m_2g}{k} = 0,5 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση

$$K + U = E_T \Rightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_K^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow$$

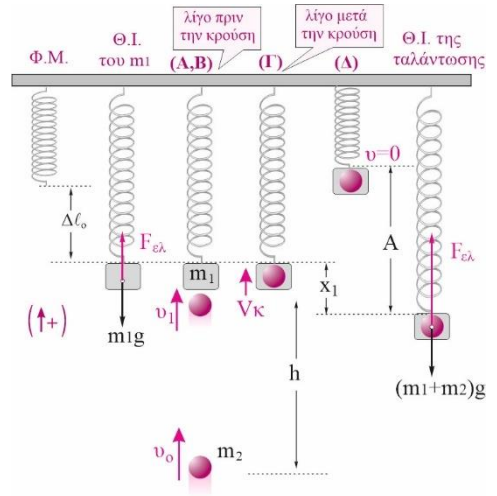
$$A = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)V_K^2 + kx_1^2}{k}} \Rightarrow A = 1 \text{ m}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ s το συσσωμάτωμα βρίσκεται πάνω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης, άρα βρισκόμαστε στο 1° ή 2° τεταρτημόριο. Από τις προτεινόμενες τιμές δεκτή είναι η $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$

καθώς η $\frac{7\pi}{6} \text{ rad}$ ανήκει στο 3° τεταρτημόριο και αντιστοιχεί σε αρνητική απομάκρυνση.

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος είναι

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = -kxv, \quad (1)$$



$$\left. \begin{array}{l} K = 15U \\ K + U = E_T \end{array} \right\} \Rightarrow 16U = E_T \Rightarrow 16 \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow x = \frac{A}{4}, (x > 0, v < 0)$$

Το μέτρο της ταχύτητας v του σώματος όταν αυτό απέχει x από τη Θ.Ι. βρίσκεται από τη σχέση

$$|v| = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = \sqrt{3} \sqrt{1^2 - 0,25^2} \text{ m/s} \Rightarrow |v| = \frac{3\sqrt{5}}{4} \text{ m/s} \Rightarrow v = -\frac{3\sqrt{5}}{4} \text{ m/s}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) παίρνουμε

$$\frac{dK}{dt} = -60 \cdot 0,25 \cdot \left(-\frac{3\sqrt{5}}{4} \right) \text{ J/s} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = +11,25\sqrt{5} \text{ J/s}$$

$$\delta. W_F = \Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot (v_{\text{max}}^2 - v_{\kappa}^2) \Rightarrow$$

$$W_F = 7,5 \text{ J}$$

7.Δ.15

$$\alpha. v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{k}{m}} A = 2,4 \text{ m/s}$$

β. Με εφαρμογή της ΑΔΟ βρίσκουμε την ταχύτητα του Σ_2 μετά τη διάσπαση

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m v_{\text{max}} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = 0 \text{ m/s}$$

γ. Η θέση A που έγινε η διάσπαση θα αποτελεί την κάτω ακραία θέση της νέας ταλάντωσης. Η νέα ταλάντωση έχει θέση ισορροπίας μετατοπισμένη κατά x_1 σε σχέση με την αρχική και πλάτος ίσο με $A' = x_1$. Από τις συνθήκες ισορροπίας για τις δύο θέσεις βρίσκεται η μετατόπιση x_1 .

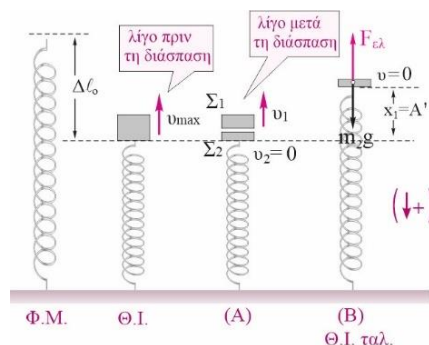
$$\text{Αρχική Θ.Ι.: } \Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k\Delta\ell_0 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Τελική Θ.Ι.: } \Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g - (k\Delta\ell_0 - x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} x_1 = \frac{m_1 g}{k} = \frac{1,5 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2}{128 \text{ N/m}} \Rightarrow x_1 = \frac{15}{128} \text{ m}$$

$$A' = x_1 = \frac{15}{128} \text{ m}, \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = \sqrt{\frac{128 \text{ N/m}}{0,5 \text{ kg}}} \Rightarrow \omega' = 16 \text{ rad/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ s το σώμα ξεκινάει από τη μέγιστη θετική απομάκρυνση άρα έχει αρχική

φάση $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ και η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι



$$y = \frac{15}{128} \eta \mu \left(16t + \frac{\pi}{2} \right) (\text{S.I.})$$

δ. Επειδή η διάσπαση είναι ακαριαία, η δυναμική ενέργεια δε μεταβάλλεται, οπότε η όποια ε-
λευθέρωση ενέργειας πηγαιίνει σε μεταβολή της κινητικής ενέργειας

$$\Delta E = E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 \Rightarrow$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} 1,5 \cdot 3,2^2 \text{ J} - \frac{1}{2} 2 \cdot 2,4^2 \text{ J} \Rightarrow \Delta E = 1,92 \text{ J}$$

7.Δ.16

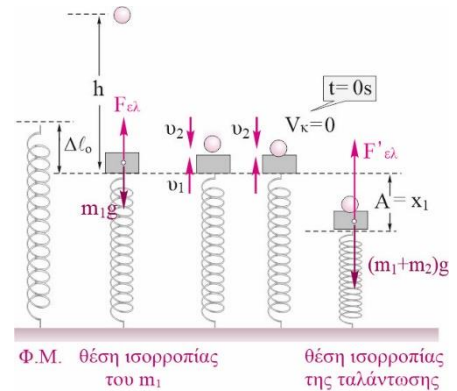
α. $2A = 0,3 \text{ m} \Rightarrow A = 0,15 \text{ m}$

$$K_1 + U_1 = E_T \Rightarrow K_1 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

$$k = \frac{2K_1}{A^2 - x_1^2} = \frac{2 \cdot 2}{0,15^2 - 0,05^2} \frac{\text{N}}{\text{m}} \Rightarrow k = 200 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

β. $\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{10} \text{ s} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5} \text{ s}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow m_1 = \frac{T^2 k}{4\pi^2} \Rightarrow m_1 = 2 \text{ kg}$$



γ. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ λίγο πριν και αμέσως μετά την κρούση

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V_K, \quad (1)$$

Το m_2 εκτελεί ελεύθερη πτώση με εξισώσεις

$$h = \frac{1}{2} g t^2, \quad (2), \quad v_2 = g t, \quad (3)$$

Συνδυάζοντας τις (2), (3) παίρνουμε

$$v_2 = \sqrt{2gh} = 3 \text{ m/s}$$

Το m_1 διέρχεται από τη Θ.Ι. με ταχύτητα

$$v_1 = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A \Rightarrow v_1 = 1,5 \text{ m/s}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε

$$2 \cdot 1,5 - 1 \cdot 3 = 3 \cdot V_K \Rightarrow V_K = 0 \text{ m/s}$$

δ. Από τις συνθήκες ισορροπίας έχουμε

$$(m_1 + m_2)g = k(\Delta \ell_0 + A) \Rightarrow A = \frac{m_2 g}{k} = 0,05 \text{ m}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad} , \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{200}{3}} \text{ rad/s}$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης είναι

$$x = 0,05 \cdot \eta\mu\left(\sqrt{\frac{200}{3}}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

ε. Η αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου είναι

$$m_1 g = k \cdot \Delta \ell_0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{m_1 g}{k} = 0,1 \text{ m}$$

Όταν το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη Θ.Ι. η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k (\Delta \ell_0 + A)^2 = 2,25 \text{ J}$$

$$\text{στ. } \frac{dW}{dt} = F_{ελ} \cdot v = -k x \cdot v$$

Όταν το σώμα διέρχεται από τη Θ.Ι. του, $x=0\text{m}$ άρα $\frac{dW}{dt} = 0 \text{ J/s}$.

7.Δ.17

α. Για να φτάσει το Σ_1 στη θέση ισορροπίας χρειάζεται χρονικό διάστημα

$$\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

Από τον τύπο της ελεύθερης πτώσης έχουμε

$$h = \frac{1}{2} g \Delta t^2 = 0,5 \text{ m}$$

β. Η εφαρμογή της ΑΔΟ για την κρούση δίνει

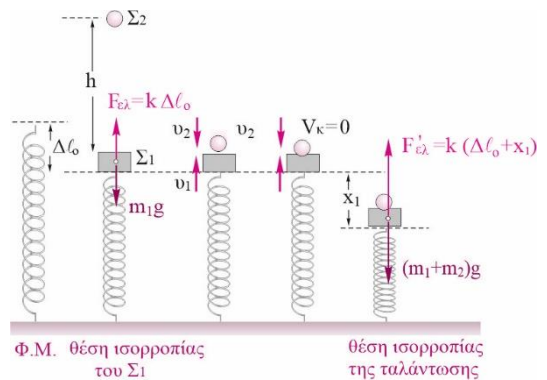
$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_k \quad (1)$$

$$\text{Για το } \Sigma_1: v_1 = v_{\max} = \omega_1 A_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A_1 \Rightarrow v_1 = \frac{\pi}{4} \text{ m/s}$$

Για το Σ_2 , ελεύθερη πτώση: $v_2 = g \Delta t = \pi \text{ m/s}$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει $V_k = 0 \text{ m/s}$.

γ. Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος m_1 - k είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g - k \Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow m_1 g = k \Delta \ell_0 \quad (2)$$

Μετά την προσθήκη της μάζας m_2 ξεκινά ταλάντωση γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από την αρχική κατά x_1 , που βρίσκεται από τη νέα συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k(\Delta \ell_0 + x_1) = 0 \xrightarrow{(2)} m_2 g = kx_1 \Rightarrow x_1 = \frac{m_2 g}{k}$$

Η θέση της πλαστικής κρούσης αποτελεί την πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης, άρα το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος είναι $A = x_1 = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow A = 0,1 \text{ m}$.

δ. Το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι μέγιστο όταν το σώμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση

$$F_{ελ(\max)} = k \Delta \ell_{\max} = k(\Delta \ell_0 + x_1 + A) = k(\Delta \ell_0 + x_1) + kA \Rightarrow F_{ελ(\max)} = (m_1 + m_2)g + kA \Rightarrow F_{ελ(\max)} = 60 \text{ N}$$

7.Δ.18

α. Το σώμα από τη στιγμή που εφαρμόζεται η δύναμη μέχρι τη στιγμή που καταργείται, εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση διαρκώς ελαττούμενη. Στο σχήμα, οι θέσεις (γ), (δ) δηλώνουν κατάσταση ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κατάργηση της δύναμης.

Η ταχύτητα v_1 βρίσκεται με Θ.Μ.Κ.Ε μεταξύ των θέσεων (α) και (γ)

$$K_\gamma - K_\alpha = W_F + W_{F_{ελ}} \quad (1)$$

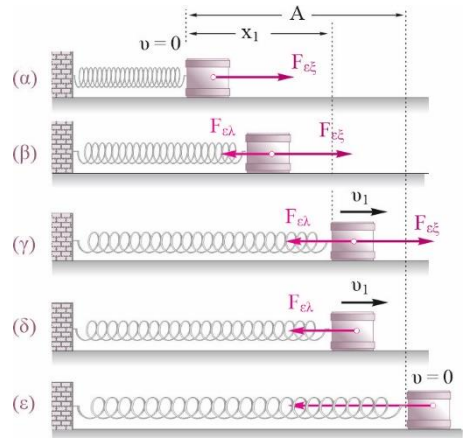
Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - 0 = F \cdot x_1 - \frac{1}{2} k x_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{6} \text{ m/s}$$

β. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα στη διεύθυνση της κίνησης είναι η $F_{ελ}$, επομένως σε μια τυχαία θέση

$$\Sigma F = F_{ελ} = -kx$$

$$\gamma. \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\sqrt{2} \text{ rad/s}$$



Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση στις θέσεις (δ) και (ε)

$$E_{\text{ταλ}}^{\delta} = E_{\text{ταλ}}^{\epsilon} \Rightarrow U_{\delta} + K_{\delta} = U_{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

δ. Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$, έχουμε $x > 0$ και $v > 0$, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης θα βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο. Από τις τιμές που μας δίνονται, δεκτή είναι η $\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -kx$$

Το σώμα μεγιστοποιεί τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του στις ακραίες θέσεις, δηλαδή κάθε φορά που η φάση της ταλάντωσης γίνεται $(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Στην περίπτωση μας την $t=0\text{s}$, έχουμε

αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$, οπότε η 2^η φορά θα είναι όταν το σώμα αποκτήσει φάση ίση με $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$. Άρα, έχουμε

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 10\sqrt{2} t \text{ (SI)} \Rightarrow t = \frac{\pi\sqrt{2}}{15} \text{ s}$$

7.Δ.19

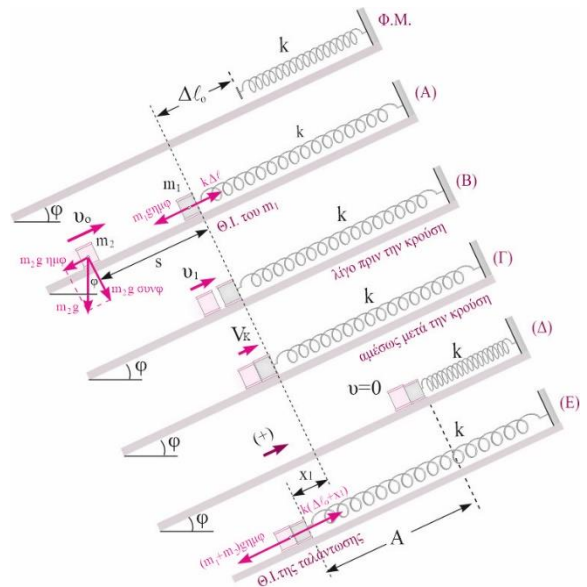
α. $k = D = (m_1 + m_2) \omega^2 \Rightarrow k = 200 \text{ N/m}$

β. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε για το Σ_2 από το σημείο εκτόξευσης μέχρι τη θέση που συγκρούεται με το Σ_1

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{v_0^2 - 2g(s-A)\eta\mu\varphi} = \\ &= \sqrt{2^2 - 2 \cdot 10 \cdot 0,3 \frac{1}{2}} \text{ (SI)} \Rightarrow v_1 = 1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Η εφαρμογή της ΑΔΟ δίνει

$$\begin{aligned} p_{\text{αρχ}} &= p_{\text{τελ}} \Rightarrow \\ m_2 v_1 + 0 &= (m_1 + m_2) V_{\kappa} \Rightarrow \\ V_{\kappa} &= 0,5\sqrt{3} \text{ m/s} \end{aligned}$$



γ. Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος $m_1 - k$ είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g \eta \mu \phi - k \Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow m_1 g \eta \mu \phi = k \Delta\ell_0 \quad (1)$$

Μετά την προσθήκη της μάζας m_2 η νέα ταλάντωση εξελίσσεται γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από την αρχική κατά x_1 , που βρίσκεται από τη νέα συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2) g \eta \mu \phi - k(\Delta\ell_0 + x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} m_2 g \eta \mu \phi = k x_1 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{m_2 g \eta \mu \phi}{k} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{1}{2}}{200 \text{ N/m}} \Rightarrow x_1 = 0,025 \text{ m}$$

Άρα, η κάτω ακραία θέση της αρχικής ταλάντωσης όπου έγινε η κρούση, συμπίπτει με τη θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης και η V_k που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, συμπίπτει με τη $v_{\max}$ της νέας ταλάντωσης

$$v_{\max} = V_k = \omega A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{V_k}{\omega} = \frac{0,5\sqrt{3} \text{ m}}{10 \text{ rad/s}} \Rightarrow A_2 = 0,05\sqrt{3} \text{ m}$$

δ. Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, οπότε θα σταματήσει για 1^η φορά μετά από $T/4$

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{20} \text{ s}$$

$$\epsilon. \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -kx \quad (2)$$

Η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$x = A_2 \eta \mu(\omega t) \Rightarrow x = 0,05\sqrt{3} \eta \mu(10t) \text{ (SI)}$$

και με αριθμητική αντικατάσταση $t=\pi/60 \text{ s}$ δίνει $x = 0,025\sqrt{3} \text{ m}$.

Από τη (2) με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει

$$\frac{dp}{dt} = -200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,025\sqrt{3} \text{ m} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -5\sqrt{3} \text{ kgm/s}^2$$

7.Δ.20

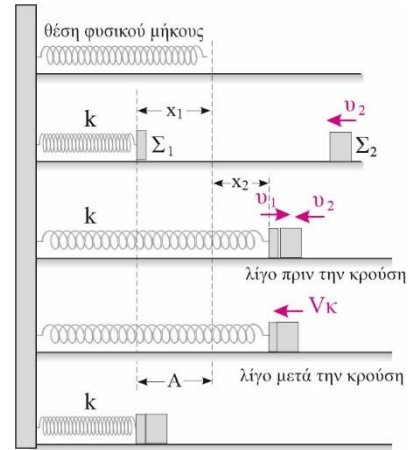
α. Με εφαρμογή της ΑΔΕΤ για την αρχική ταλάντωση μεταξύ της ακραίας θέσης και της θέσης ελάχιστα πριν την κρούση έχουμε

$$K + U = E_T \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow$$

$$|v_1| = \omega\sqrt{x_1^2 - x_2^2} \Rightarrow |v_1| = 1 \text{ m/s}$$

β. Μετά την κρούση η νέα γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = 5 \text{ rad/s}$$



Με εφαρμογή της ΑΔΕΤ για τη νέα ταλάντωση μεταξύ της ακραίας θέσης και της θέσης αμέσως μετά την κρούση έχουμε

$$K + U = E_T \Rightarrow |V_k| = \omega'\sqrt{A^2 - x_2^2} \Rightarrow |V_k| = 0,5 \text{ m/s}$$

γ. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για το σύστημα ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)V_k$$

Ανάλογα με τη φορά κίνησης του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, παίρνουμε δύο λύσεις, $v_2 = -\frac{1}{3} \text{ m/s}$ και $v_2 = 1 \text{ m/s}$. Όμως η φορά κίνησης του Σ_2 έχει αποσαφηνιστεί από την εκφώνηση, οπότε δεχόμαστε την τιμή $v_2 = 1 \text{ m/s}$ και αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται προς τα αριστερά.

δ. Η περίοδος της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{4}{100}} \text{ s} \Rightarrow T = 0,4\pi \text{ s}$$

Άρα ο αριθμός των ταλαντώσεων στο ζητούμενο χρονικό διάστημα είναι

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{4\pi}{0,4\pi} = 10$$

Σε κάθε πλήρη ταλάντωση η δυναμική ενέργεια μεγιστοποιείται δύο φορές, στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης, συνεπώς ο αριθμός των μεγιστοποιήσεων της δυναμικής ενέργειας είναι 20.

7.Δ.21

α. Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την κίνηση του Σ_1 δίνει

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow m_1 g R = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gR} = 6 \text{ m/s}$$

β. Η διατήρηση της ορμής για την πλαστική κρούση δίνει

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_K \Rightarrow V_K = 2 \text{ m/s}$$

γ. Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και δεν μεταβάλλεται μετά την προσθήκη της μάζας, οπότε η ταχύτητα του συσσωματώματος αποτελεί τη $v_{\max}$ της ταλάντωσης

$$V_K = v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A \Rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

δ. Το σώμα μηδενίζει την ταχύτητά του κάθε φορά που περνά από ακραία θέση, δηλαδή κάθε φορά που η φάση της ταλάντωσης γίνεται $(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Στην περίπτωση μας, αν θεωρήσουμε τη στιγμή της κρούσης ως $t=0\text{s}$, το συσσωμάτωμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, οπότε δεν έχουμε αρχική φάση. Άρα, η 2^η φορά θα είναι όταν η ταλάντωση αποκτήσει φάση ίση με $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$. Άρα, έχουμε

$$\varphi = \omega \Delta t \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = \sqrt{\frac{300}{1+2}} \Delta t \text{ (SI)} \Rightarrow \Delta t = \frac{3\pi}{20} \text{ s}$$

7.Δ.22

α. Η ταχύτητα που έχει το Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση συμπίπτει με τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης

$$v_1 = v_{\max} = \omega A \quad \text{ή} \quad v_1 = 2 \text{ m/s}$$

β. Από τους τύπους την κεντρικής ελαστικής κρούσης έχουμε για τις ταχύτητες των δύο σωμάτων:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -1 \text{ m/s}, \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 1 \text{ m/s}$$

γ. Η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση, άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$x = A\eta\mu\omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 10 \text{ rad/s}$$

Η ταχύτητα v_1' αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης, καθώς η θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης έμεινε ίδια με την αρχική, οπότε έχουμε

$$v_1' = v_{\max}' = \omega A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{v_1'}{\omega} = 0,1 \text{ m και η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου γράφεται}$$

$$x = 0,1\eta\mu 10t(\text{S.I.})$$

δ. Το σώμα ακινητοποιείται για 2^η φορά την $t=3T/4$. Η κίνηση του m_2 είναι ευθύγραμμη ομαλή και σε χρόνο t θα διανύσει $x_2 = v_2' t = 0,15\pi \text{ m}$. Τα σώματα τη στιγμή t απέχουν $d=x_2-A_1=0,37 \text{ m}$.

7.Δ.23

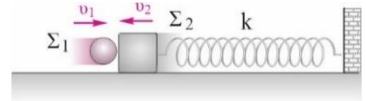
α. Η ταχύτητα v_1 του Σ_1 βρίσκεται με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow 2g(\ell - \ell \sin\varphi) = v_1^2 \Rightarrow v_1 = 1 \text{ m/s}$$

Για το Σ_2 έχουμε

$$v_2 = v_{\max} = \omega A_1 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} A_1 \Rightarrow v_2 = 3 \text{ m/s}$$

β. Επειδή $v_1 < v_2$, μόνο αν τα σώματα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις θα συγκρουστούν.



$$\gamma. p_2' = m_2 v_2' \quad (1)$$

$$\text{με } v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} + \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

$$\text{Με αντικατάσταση στην } v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad v_1' = 0 \text{ m/s,}$$

προκύπτει $m_1 = 7 \text{ kg}$.

$$\text{Με αντικατάσταση στη (2) προκύπτει } v_2' = 4 \text{ m/s.}$$

$$\text{Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει } p_2' = 4 \text{ kg m/s.}$$

$$\delta. \Delta t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2} \sqrt{\frac{m_2}{k}} \Rightarrow \Delta t = 0,05\pi \text{ s}$$

$$\epsilon. W_F = K_1^{\text{τελ}} - K_1^{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - 0 \quad (3)$$

$$v_1'' = \frac{2m_2 v_2'}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 1}{8} (-4) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_1'' = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Άρα } W_F = 3,5 \text{ J.}$$

7.Δ.24

α. Από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για τη σφαίρα προκύπτει

$$v = \sqrt{2gh} = 4 \text{ m/s}$$

$$\beta. \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(m+M)V_K^2 \quad (1)$$

Από τη διατήρηση της ορμής για την κρούση

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow mv = (m+M)V_K \quad (2)$$

$$\text{Όμως } \Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{50}} \text{ s με } T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{K}} \text{ άρα}$$

$$m+M=4\text{kg} \text{ ή } M=3\text{kg}$$

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $Q=\Delta K=6\text{J}$.

γ. Η Θ.Ι. της ταλάντωσης είναι η (Ε).

Η μέγιστη συσπείρωση από το Φ.Μ. όπως προκύπτει από το σχήμα είναι

$$x_{\max} = \Delta\ell_o + x_1 + A$$

$$\text{Θέση (B): } \Sigma F = 0 \text{ ή } \Delta\ell_o = \frac{Mg}{k} = 0,15\text{m} \quad (3)$$

$$\text{Θέση (E): } \Sigma F' = 0 \text{ ή } (M+m)g = k(\Delta\ell_o + x_1) \quad (4)$$

$$\text{Από (3), (4) έχουμε: } mg = kx_1 \Rightarrow x_1 = \frac{mg}{k} = 0,05\text{m}$$

Το Α είναι το πλάτος ταλάντωσης που θα βρεθεί από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση

$$E_{\text{ταλ}}^{(\Gamma)} = E_{\text{ταλ}}^{(\Delta)} \Rightarrow \frac{1}{2}(M+m)V_K^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{(M+m)V_K^2 + kx_1^2}{k}} = 0,15\text{m}$$

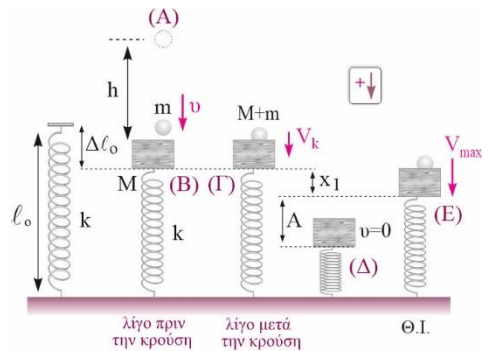
$$\text{Άρα } x_{\max} = \Delta\ell_o + x_1 + A = 0,35\text{m}.$$

$$\delta. \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow \Sigma F = 0\text{N}$$

Άρα το σύστημα διέρχεται από τη Θ.Ι. (Ε) με ταχύτητα μέγιστου μέτρου

$$v = v_{\max} = \omega A \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{M+m}} A = 0,75\sqrt{2}\text{m}$$

$$K = \frac{1}{2}(M+m)v^2 = 2,25\text{J}$$



7.Δ.25

α. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ μεταξύ των θέσεων (Α) και (Β)

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow mv_0 = (m+M)V \quad \text{ή}$$

$$V = \frac{mv_0}{m+M} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}$$

β. Στη θέση (Α) ισορροπεί το σώμα Μ

$$Mg = k\Delta\ell_0 \quad (1)$$

Η νέα θέση ισορροπίας του συσσωματώματος είναι η

θέση (Δ).

$$\Theta.Ι. (M+m)g = k(\Delta\ell_0 + x_1) \quad \text{ή} \quad mg = kx_1 \quad \text{ή} \quad x_1 = \frac{mg}{k} = 0,1\text{m}$$

$$E_{\text{ταλ}}^{(B)} = E_{\text{ταλ}}^{(\Gamma)} \Rightarrow \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = 0,2\text{m}$$

γ. Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$, έχουμε $x>0$ και $u>0$, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης θα βρίσκεται

στο 1^ο τεταρτημόριο. Από τις τιμές που μας δίνονται, δεκτή είναι η $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$.

Το σώμα μεγιστοποιεί την ταχύτητά του κάθε φορά που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, δηλαδή κάθε φορά που η φάση της ταλάντωσης γίνεται $k\pi$. Στην περίπτωση μας την $t=0\text{s}$, έχουμε αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ rad, οπότε η 2^η φορά θα είναι όταν το σώμα αποκτήσει φάση ίση με

2π rad. Άρα, έχουμε

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \Rightarrow 2\pi = \frac{\pi}{6} + 5t \Rightarrow t = \frac{11\pi}{6 \cdot 5} \text{ s} \Rightarrow t = \frac{11\pi}{30} \text{ s}$$

$$\delta. U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2}kx^2$$

Από την αρχική θέση ισορροπίας προκύπτει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{Mg}{k} = 0,3\text{m}$$

Όταν το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση, η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι

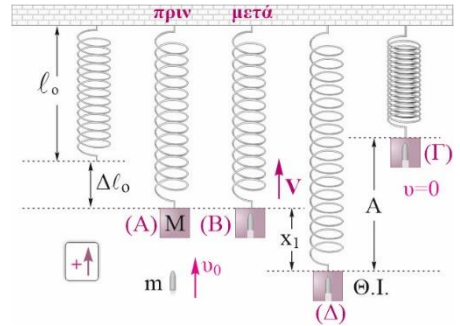
$$\Delta x_1 = \Delta\ell_0 + x_1 + A = 0,6\text{m}$$

Όταν το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση, η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι

$$\Delta x_2 = \Delta\ell_0 + x_1 - A = 0,2\text{m}$$

$$U_{\text{ελ(max)}} = \frac{1}{2}100 \cdot 0,6^2 \text{ J} \Rightarrow U_{\text{ελ(max)}} = 18 \text{ J}$$

$$U_{\text{ελ(min)}} = \frac{1}{2}100 \cdot 0,2^2 \text{ J} \Rightarrow U_{\text{ελ(min)}} = 2 \text{ J}$$



7.Δ.26

$$\alpha. Q = E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\epsilon\lambda} = m_1 g R - \frac{1}{2} m_1 v_B^2 \Rightarrow Q = 30 \text{ J}$$

β. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ για την κρούση

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_B = (m_1 + m_2) V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m_1 v_B}{m_1 + m_2} \Rightarrow V = 2 \text{ m/s}$$

Οι απώλειες κατά την κρούση είναι

$$|\Delta E| = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 \Rightarrow |\Delta E| = 30 \text{ J}$$

$$E_{\alpha\rho\chi} = m_1 g R = (4 \cdot 10 \cdot 2) \text{ J} \text{ ή } E_{\alpha\rho\chi} = 80 \text{ J}$$

$$\text{Ποσοστό απώλειας } \alpha = \frac{\Delta E}{E_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{30 \text{ J}}{80 \text{ J}} 100\% \Rightarrow \alpha = 37,5\%$$

$$\gamma. T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \Rightarrow T = 0,4 \pi \text{ s}$$

$$E_{\tau\alpha\lambda}^{(\Gamma)} = E_{\tau\alpha\lambda}^{(\Lambda)} \Rightarrow \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow A = 0,4 \text{ m}$$

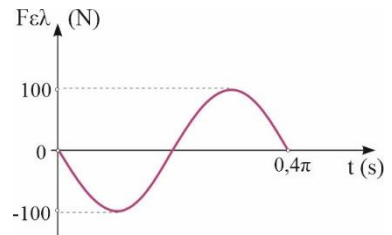
δ. Η ταλάντωση εξελίσσεται στο οριζόντιο επίπεδο, άρα η δύναμη του ελατηρίου συμπίπτει με τη δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης, επιπλέον, δεν έχει αρχική φάση, οπότε έχουμε

$$F_{\epsilon\lambda} = -k \cdot x \Rightarrow F_{\epsilon\lambda} = F_{\epsilon\pi} = -k \cdot A \cdot \eta\mu\omega t \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = -250 \cdot 0,4 \cdot \eta\mu 5t \text{ (SI)} \Rightarrow$$

$$F_{\epsilon\lambda} = -100\eta\mu 5t \text{ (S.I.)}$$

Η γραφική της παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

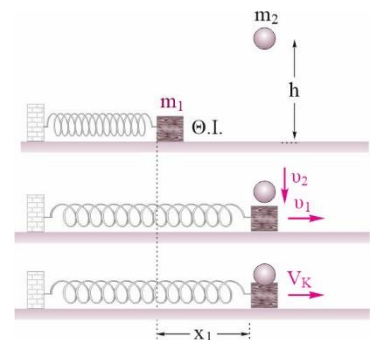


7.Δ.27

α. Η ενέργεια που δαπανήσαμε είναι ίση με την ενέργεια ταλάντωσης

$$U = \frac{1}{2} D A_1^2 \Rightarrow A_1 = 0,2 \text{ m}$$

β. Από τη διατήρηση της ενέργειας για την αρχική ταλάντωση έχουμε



$$K_1 + U_1 = E_T \Rightarrow \frac{13}{3} U_1 + U_1 = E_T \Rightarrow U_1 = \frac{3}{16} E_T \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} A_1 \Rightarrow x_1 = 5 \cdot \sqrt{3} 10^{-2} \text{ m}$$

γ. Η ταχύτητα του Σ_1 βρίσκεται από τη διατήρηση της ενέργειας για την αρχική ταλάντωση

$$U_1 + K_1 = E_T \Rightarrow \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} k A_1^2 \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{3,25} \text{ m/s}, v_2 = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_2 = 3 \text{ m/s}$$

δ. Από τη διατήρηση της ορμής στον οριζόντιο άξονα βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) V_K \Rightarrow V_K = \frac{\sqrt{3,25}}{4} \text{ m/s}$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας για τη νέα ταλάντωση έχουμε

$$\frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_K^2 = \frac{1}{2} k A_2^2 \Rightarrow A_2 = 0,125 \text{ m}$$

$$\epsilon. \frac{Q}{K_{\text{αρχ}}} = \frac{\frac{1}{2} k A_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} k A_2^2}{\frac{1}{2} k A_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{29,4375}{31}$$

7.Δ.28

α. Μετά από 3,5 κύκλους το σύστημα έχει φάση

$$\phi = 3,5 \cdot 2\pi \text{ rad} = 7\pi \text{ rad} \Rightarrow \phi = (2 \cdot 2\pi + \pi) \text{ rad} \text{ και διέρχεται}$$

από τη θέση ισορροπίας με $v < 0$

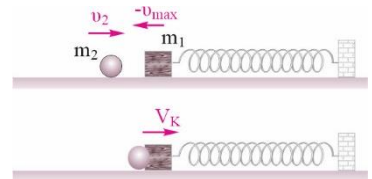
$$v_1 = -v_{\text{max}} = -\omega_1 A_1 = (5\sqrt{10} \text{ rad/s}) \cdot (0,1\sqrt{2,5} \text{ m}) \Rightarrow v_1 = -2,5 \text{ m/s}$$

β. Από τη σταθερά επαναφοράς της αρχικής ταλάντωσης έχουμε

$$k = m_1 \omega_1^2 \Rightarrow m_1 = \frac{k}{\omega_1^2} = \frac{225 \text{ N/m}}{(5\sqrt{10} \text{ rad/s})^2} \Rightarrow m_1 = 0,9 \text{ kg}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης μηδενίζεται κάθε

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{15} \text{ s}$$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \Rightarrow m_1 + m_2 = \frac{kT^2}{(2\pi)^2} = \frac{225 \text{ N/m} \cdot \left(\frac{2\pi}{15} \text{ s}\right)^2}{(2\pi)^2} \Rightarrow m_1 + m_2 = 1 \text{ kg} \Rightarrow m_2 = 0,1 \text{ kg}$$

γ. Από τη διατήρηση της ορμής για την κρούση βρίσκουμε την ταχύτητα V_K του συσσωματώματος που θα αποτελεί τη μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_2 v_2 - m_1 v_{\max} = (m_1 + m_2) V_K \quad \text{ή} \quad V_K = 1 \text{ m/s}$$

$$A' = \frac{V_K}{\omega'} = \frac{V_K}{\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}} \Rightarrow A' = \frac{1}{15} \text{ m}$$

$$\delta. \frac{dW_F}{dt} = F \frac{dx}{dt} = -Dxv \quad (1)$$

Η νέα ταλάντωση έχει πλάτος $A' = \frac{1}{15} \text{ m}$, γωνιακή ταχύτητα $\omega' = 15 \text{ rad/s}$ και αρχική φάση μηδέν

$$x = \frac{1}{15} \eta\mu 15t \text{ (SI)} \Rightarrow x = \frac{1}{15} \cdot \eta\mu 15 \cdot \frac{2\pi}{90} \text{ (SI)} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{30} \text{ m}$$

$$v = \omega A \sigma\upsilon\nu 15t \Rightarrow v_1 = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu 15 \cdot \frac{2\pi}{90} \text{ (SI)} \Rightarrow v_1 = 0,5 \text{ m/s}$$

$$\text{Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε} \quad \left(\frac{\Delta W_F}{\Delta t} \right) = -3,75\sqrt{3} \text{ J/s}.$$

7.Δ.29

α. Από τη διατήρηση της ορμής στον οριζόντιο άξονα βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m v_o \sigma\upsilon\nu\varphi = (M + m) V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m v_o \sigma\upsilon\nu\varphi}{M + m} \Rightarrow V = 5 \text{ m/s}$$

β. Από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ των θέσεων (B) και (Γ) έχουμε

$$E_{\tau\alpha\lambda}^{(B)} = E_{\tau\alpha\lambda}^{(\Gamma)} \Rightarrow \frac{1}{2} (M + m) V^2 = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow$$

$$A = V \sqrt{\frac{M + m}{k}} \Rightarrow A = 0,5 \text{ m}$$

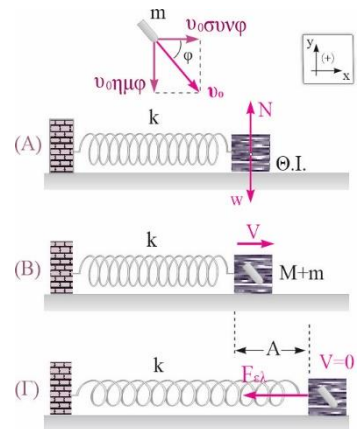
$$\gamma. \frac{dp}{dt} = \Sigma F = -kx \quad (1)$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση βρίσκουμε την απομάκρυνση

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow x_1 = \pm 0,4 \text{ m}$$

Επειδή το συσσωμάτωμα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο και δεκτή είναι η τιμή $x_1 = 0,4 \text{ m}$.

$$\text{Με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε} \quad \frac{dp}{dt} = -40 \text{ kgm/s}^2.$$



$$\delta. \frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \Sigma F \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -Dx \cdot v$$

Την $t=0s$, $x=0m$ και $v>0$, άρα δεν υπάρχει ϕ_0 .

$x=A\eta\mu\omega t$ ή $x=0,5 \cdot \eta\mu 10t$ (SI), $v=5 \cdot \sigma\upsilon\nu 10t$ (SI)

$$\frac{dK}{dt} = -250 \cdot \eta\mu 10t \cdot \sigma\upsilon\nu 10t \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -125 \cdot \eta\mu 20t \text{ (SI)}$$

$$\left| \frac{\Delta K}{\Delta t} \right|_{\max} = 125 \frac{J}{s}$$

Συμβαίνει για 1^η φορά όταν

$$\eta\mu 20t = 1 \Rightarrow 20t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{40} s$$

7.Δ.30

α. Η ορμή διατηρείται μόνο στον άξονα που συμπίπτει με το πλάγιο επίπεδο

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow m v_0 \sigma\upsilon\nu\phi = (m + M) V_K \Rightarrow$$

$$V_K = \frac{\sqrt{11,97}}{3} m/s$$

β. Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος M - k είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow Mg\eta\mu\phi - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow Mg\eta\mu\phi = k\Delta\ell_0 \quad (1)$$

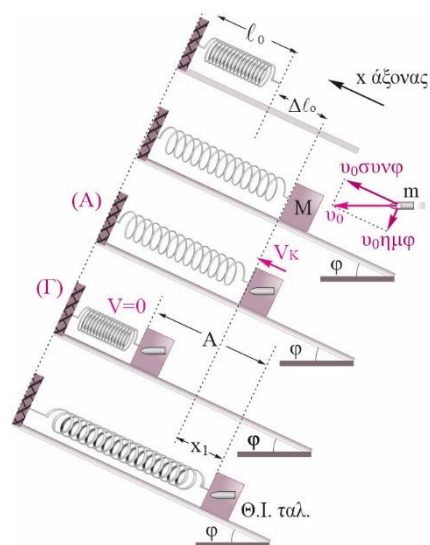
Μετά την προσθήκη της μάζας m, η ταλάντωση εξελίσσεται γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται χαμηλότερα από την αρχική κατά x_1 , που βρίσκεται από τη νέα συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (M + m)g\eta\mu\phi - k(\Delta\ell_0 + x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} mg\eta\mu\phi = kx_1 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{mg\eta\mu\phi}{k} = \frac{0,2kg \cdot 10m/s^2 \cdot \frac{1}{2}}{100N/m} \Rightarrow x_1 = 0,01m$$

γ. Από τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση βρίσκουμε το πλάτος

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}(M + m)V_K^2 \Rightarrow A = 0,2m$$



$$\delta. \frac{Q}{K_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{\frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{1}{2}(m+M)V_K^2}{\frac{1}{2}mv_o^2} 100\% = 95\%$$

$$\epsilon. \text{ Το ελατήριο πριν τη σύγκρουση ήταν επιμηκυμένο κατά } \Delta\ell_0 = \frac{Mg\eta\mu\phi}{k} = 0,14\text{m}.$$

Όταν το συσσωμάτωμα βρίσκεται στην πάνω ακραία θέση, το ελατήριο είναι παραμορφωμένο από το φυσικό του μήκος κατά

$$\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x_1 - A = 0,14\text{m} + 0,01\text{m} - 0,2\text{m} \Rightarrow \Delta\ell = -0,05\text{m}$$

δηλαδή συμπίεστηκε κατά 0,05m. Αφού το ελατήριο διέρχεται από το φυσικό του μήκος, η ελάχιστη ενέργειά του είναι ίση με μηδέν.

7.Α.31

α. Σε τυχαία θέση για το Σ_B

$$\Sigma F = -D_{By} \quad \text{ή} \quad N - m_B g = -D_{By}, \quad (1)$$

$$D_B = k \frac{m_B}{m_A + m_B} = 25 \text{ N / m}$$

$$H \text{ (1) γίνεται } N = m_B g - D_{By} \quad \text{ή} \quad N = 2,5 - 25y, \text{ (SI)} \quad (2)$$

β. Το σώμα εγκαταλείπει τον δίσκο όταν $N=0\text{N}$. Από τη σχέση (2) προκύπτει ότι η δύναμη N μηδενίζεται για $y=0,1\text{m}$. Άρα, το σώμα εγκαταλείπει τον δίσκο στην απομάκρυνση $y = y_1 = 0,1\text{m}$.

γ. Τα ζητούμενα μεγέθη αντιστοιχούν στη θέση της εγκατάλειψης του σώματος από τον δίσκο. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το συσσωμάτωμα από την ακραία θέση μέχρι τη θέση εγκατάλειψης

$$\frac{1}{2}ky_2^2 + \frac{1}{2}(m+M)v_2^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2}\text{m / s}$$

$$\alpha = -\omega^2 y = -\frac{k}{m+M}y = -10\text{m / s}^2$$

δ. Το σώμα Σ_B μετά την εγκατάλειψη του δίσκου θα εκτελέσει κατακόρυφη βολή και θα φτάσει σε ύψος

$$h = \frac{v_2^2}{2g} = 0,1\text{m}$$

$$H_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{10}\text{m} + 0,1\text{m} + 0,1\text{m} = \frac{2+\sqrt{3}}{10}\text{m}$$

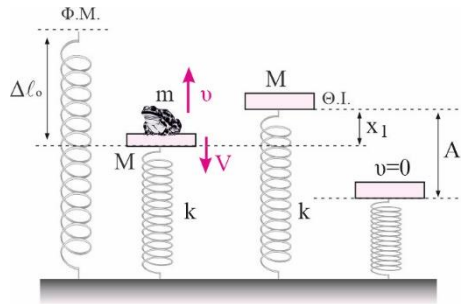
7.Δ.32

α. Η εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής δίνει

$$0 = mv - MV \Rightarrow V = 0,4 \text{ m/s}$$

β. Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος ($M + m$) - k είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (M + m)g - k\Delta\ell_0 = 0 \quad (1)$$



Μετά την απομάκρυνση της μάζας m ξεκινά ταλάντωση γύρω από θέση ισορροπίας που βρίσκεται ψηλότερα από την αρχική κατά x_1 , που βρίσκεται από τη νέα συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k(\Delta\ell_0 - x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} x_1 = \frac{mg}{k} = 0,01 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ της θέσης που ξεκινά η ταλάντωση και της μέγιστης απομάκρυνσης, οπότε την $t=0$ s που ξεκινά η ταλάντωση, ο δίσκος βρίσκεται σε απομάκρυνση $x=x_1=-0,1$ m (θετικά προς τα πάνω)

$$\frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = 0,03 \text{ m}$$

γ. Από τη σχέση (1) υπολογίζουμε την αρχική επιμήκυνση του ελατηρίου

$$\Delta\ell_0 = \frac{(M + m)g}{k} = 0,06 \text{ m}$$

Το πηλίκο της ελάχιστης προς τη μέγιστη δύναμη του ελατηρίου στη διάρκεια της ταλάντωσης είναι

$$\frac{F_{ελ(min)}}{F_{ελ(max)}} = \frac{k\Delta\ell_{min}}{k \cdot x_{max}} \Rightarrow \frac{F_{ελ(min)}}{F_{ελ(max)}} = \frac{\Delta\ell_{min}}{x_{max}} = \frac{\Delta\ell_0 - x_1 - A}{\Delta\ell_0 - x_1 + A} \Rightarrow \frac{F_{ελ(min)}}{F_{ελ(max)}} = \frac{0,02}{0,08} = \frac{1}{4}$$

δ. Για να γίνεται οριακά η δύναμη επαναφοράς ίση με τη δύναμη της βαρύτητας θα πρέπει το σώμα να φθάνει μέχρι τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, άρα θα πρέπει το πλάτος της ταλάντωσης να είναι ίσο με την απόσταση ανάμεσα στη νέα θέση ισορροπίας και τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Συνεπώς θα πρέπει $A' = \Delta\ell_0 - x_1 = 0,05 \text{ m}$

Άρα η επιπλέον ενέργεια που πρέπει να δώσουμε στο σώμα είναι

$$\Delta E = E' - E \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}kA'^2 - \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}k(A'^2 - A^2) \Rightarrow$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}200(25 \cdot 10^{-4} - 9 \cdot 10^{-4}) \text{ J} \Rightarrow \Delta E = 0,16 \text{ J}$$

7.Δ.33

α. Τη στιγμή που το Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του η ταχύτητά του είναι μέγιστη

$$v_1 = \omega A_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} A_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{100}{1}} 0,2 (\text{SI}) \Rightarrow v_1 = 2 \text{ m/s}$$

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική μεταξύ σφαιρών με ίσες μάζες, άρα θα έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων μεταξύ των δύο σωμάτων και με θετική φορά ταχύτητας προς τα δεξιά έχουμε:

$$v_2' = v_1 = -2 \text{ m/s}$$

$$v_1' = v_2 = 2 \text{ m/s}$$

β. Η ταχύτητα του Σ_1 μετά την κρούση είναι μέγιστη, αφού η θέση ισορροπίας δεν αλλάζει, άρα το νέο πλάτος είναι

$$v_1' = \omega A_1' \Rightarrow v_1' = \sqrt{\frac{k}{m}} A_1' \Rightarrow A_1' = \frac{v_1'}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow A_1' = \frac{2}{10} \text{ m} \Rightarrow A_1' = 0,2 \text{ m}$$

γ. Η νέα ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση, άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου θα είναι

$$x = 0,2 \sin 10t (\text{S.I.})$$

δ. Το σώμα επανέρχεται στο σημείο σύγκρουσης μετά από μισή περίοδο της ταλάντωσης, άρα θα έχουμε

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \Delta t = 0,1 \pi \text{ s}$$

Σε αυτό το χρονικό διάστημα το άλλο σώμα κινείται προς τα δεξιά εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και διανύει απόσταση

$$d = |v_2'| \Delta t \Rightarrow d = 2 \cdot 0,1 \pi \text{ m} \Rightarrow d = 0,2 \pi \text{ m}$$

Αυτή θα είναι και η απόσταση ανάμεσα στα δύο σώματα τη στιγμή αυτή.

7.Δ.34

α. Από τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου βρίσκουμε την επιμήκυνσή του στη θέση ισορροπίας

$$U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 \Rightarrow \Delta \ell = \sqrt{\frac{2U_{\text{ελ}}}{k}} \Rightarrow \Delta \ell = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2}{250}} \text{ m} \Rightarrow \Delta \ell = 0,16 \text{ m}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g = k \Delta \ell \Rightarrow m_2 = \frac{k \Delta \ell}{g} \Rightarrow m_2 = \frac{250 \cdot 0,16}{10} \text{ kg} \Rightarrow m_2 = 4 \text{ kg}$$

β. Από τη μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης

$$U_{\text{ταλ,max}} = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2U_{\text{ταλ,max}}}{k}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,25}{250}} (\text{SI}) \Rightarrow A = 0,1 \text{m}$$

Η σύγκρουση γίνεται στη θέση ισορροπίας, άρα η ταχύτητα που αποκτά το Σ_2 μετά την κρούση είναι η v_{max} της ταλάντωσης

$$v_2' = v_{\text{max}} = \omega A \Rightarrow v_2' = \sqrt{\frac{k}{m_2}} A \Rightarrow v_2' = \sqrt{\frac{250}{4}} \cdot 0,1 (\text{SI}) \Rightarrow v_2' = \frac{\sqrt{10}}{4} \text{m/s}$$

γ. Το ταλαντούμενο σύστημα ξεκινά την $t=0\text{s}$ από τη θέση ισορροπίας, οπότε μεγιστοποιεί για τρίτη φορά τη δυναμική του ενέργεια μετά από χρονικό διάστημα

$$\Delta t = \frac{5T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{4} 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k}} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{4} 2\pi \sqrt{\frac{4}{250}} (\text{SI}) \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{10}} \text{s} = 1\text{s}$$

Η ταχύτητα v_1' του Σ_1 αμέσως μετά την κρούση έχει μέτρο

$$v_1'' = |v_1'| + g\Delta t \Rightarrow |v_1'| = v_1'' - g\Delta t \Rightarrow |v_1'| = 0,375\sqrt{10} \text{m/s}$$

και επειδή για την κρούση έχουμε θετική φορά προς τα πάνω είναι

$$v_1' = -0,375\sqrt{10} \text{m/s}$$

δ. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική, οπότε έχουμε:

$$-v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1)$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

Διαιρούμε τις (1) και (2) κατά μέλη και παίρνουμε

$$\frac{-v_1'}{v_2'} = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \Rightarrow -1,5 = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} \Rightarrow m_1 = 1\text{kg}$$

Από τη (2) με αντικατάσταση έχουμε

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} v_2' \Rightarrow v_1 = \frac{5}{2} \frac{\sqrt{10}}{4} \text{m/s} \Rightarrow v_1 = \frac{5\sqrt{10}}{8} \text{m/s}$$

7.Δ.35

α. Μετά την κρούση το σώμα Σ_2 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά στη θέση που το ελατήριο έχει μηδενική δυναμική ενέργεια, οπότε η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου είναι η ακραία θέση της ταλάντωσης, άρα το νέο πλάτος είναι

$$A' = \Delta \ell = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow A' = \frac{20}{200} \text{ m} \Rightarrow A' = 0,1 \text{ m}$$

β. Τη στιγμή $t=0\text{s}$ που γίνεται η κρούση, το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του, άρα η επιτάχυνση μηδενίζεται για 1^η φορά όταν το σώμα ξαναπεράσει από τη θέση ισορροπίας του, δηλαδή μετά από χρονικό διάστημα

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m_2}{k}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

Από τη σχέση της ταχύτητας στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα βρίσκουμε την ταχύτητα του Σ_1 αμέσως μετά την κρούση, που επειδή είναι προς τα κάτω έχει αρνητική αλγεβρική τιμή

$$v_1'' = |v_1'| + g\Delta t \Rightarrow |v_1'| = 0,5 \text{ m/s} \Rightarrow v_1' = -0,5 \text{ m/s}$$

Η ταχύτητα του Σ_2 αμέσως μετά την κρούση είναι

$$v_2' = \omega A' \Rightarrow v_2' = \sqrt{\frac{200}{2}} 0,1 \text{ m/s} \Rightarrow v_2' = 1 \text{ m/s}$$

Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική μεταξύ ίσων μαζών, άρα θα έχουμε ανταλλαγή ταχυτήτων μεταξύ των δύο σωμάτων και με θετική φορά ταχύτητας προς τα πάνω έχουμε

$$v_2' = v_1 = 1 \text{ m/s}$$

γ. Από την ανταλλαγή ταχυτήτων, η ταχύτητα του σώματος Σ_2 πριν τη σύγκρουση είναι

$$v_2 = v_1' = -0,5 \text{ m/s}$$

δ. Από τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του Σ_1 βρίσκουμε την ταχύτητά του

$$\frac{dK_1}{dt} = m_1 g v_1'' \Rightarrow v_1'' = \frac{dK_1}{dt} \Rightarrow v_1'' = (0,5 + 2,5\pi) \text{ m/s}$$

Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μετά την κρούση για να αποκτήσει την ταχύτητα αυτή είναι

$$v_1'' = v_1' + g\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_1'' - v_1'}{g} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{4} \text{ s}$$

Την ίδια στιγμή η απομάκρυνση του Σ_2 από τη θέση ισορροπίας του είναι

$$x = 0,1 \text{ m} \left(10 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow x = 0,1 \text{ m}$$

Άρα το σώμα βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης, επομένως η ταχύτητά του είναι μηδενική, άρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι

$$\frac{dK_2}{dt} = \Sigma F_2 \cdot v_2 = 0 \text{ J/s}$$

7.Δ.36

α. Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση

$$\Delta\text{ΜΕ}: U_I + K_I = U_{II} + K_{II} \Rightarrow m_1 gh + 0 = 0 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s}$$

β. Από το πηλίκο των κινητικών ενεργειών βρίσκουμε τη σχέση των ταχυτήτων αμέσως μετά την κρούση

$$\frac{K'_1}{K'_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1'^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2'^2} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{m_1 v_1'^2}{m_2 v_2'^2} \Rightarrow v_2' = 2v_1' \quad (1)$$

Για την κρούση εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής

$$\Delta\text{ΔΟ}: m_1 v_1 = -m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow m_1 v_1 = -m_1 v_1' + m_2 2v_1' \Rightarrow v_1' = \frac{m_1 v_1}{2m_2 - m_1} \Rightarrow v_1' = 0,8 \text{ m/s}$$

Από την σχέση (1) έχουμε

$$v_2' = 2v_1' = 1,6 \text{ m/s}$$

γ. Η σύγκρουση γίνεται στη θέση ισορροπίας, άρα η ταχύτητα που αποκτά το Σ_2 μετά την κρούση είναι η $v_{\max}$

της ταλάντωσης, οπότε το πλάτος ταλάντωσης είναι

$$v_2' = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_2'}{\sqrt{\frac{k}{m_2}}} \Rightarrow A = \frac{1,6}{\sqrt{400}} (\text{SI}) \Rightarrow A = 0,08 \text{ m}$$

Οπότε η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$y = 0,08 \cdot \eta\mu 20t (\text{S.I.})$$

δ. Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να περάσει το Σ_2 από τη θέση ισορροπίας του είναι

$$\Delta t_2 = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t_2 = \pi \sqrt{\frac{m_2}{k}} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\pi}{20} \text{ s} \Rightarrow \Delta t_2 = 0,157 \text{ s}$$

Το σώμα Σ_1 κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $a = -g$, οπότε

$$v_1'' = v_1' - g t_{av} \Rightarrow v_1'' = 0,8 - 10t (\text{SI}) \quad (2)$$

Στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος του, συντηρητική δύναμη, οπότε όταν επιστρέφει στο ίδιο σημείο έχει την ίδια κινητική ενέργεια και αντίθετη ταχύτητα, $v_1'' = -0,8 \text{ m/s}$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) προκύπτει

$$-0,8 = 0,8 - 10t \text{ (SI)} \Rightarrow t = 0,16 \text{ s}$$

Άρα πρώτο περνάει το σώμα Σ_2 .

7.Δ.37

α. Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας υπολογίζουμε την ταχύτητα του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν την κρούση

$$\text{ΑΔΜΕ: } U_I + K_I = U_{II} + K_{II} \Rightarrow m_1 gh + 0 = 0 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_1 = 10 \text{ m/s}$$

Το σώμα Σ_1 κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $a = -g$

$$v_1'' = v_1' - g t_{av} \Rightarrow v_1'' = v_1' - 10t \text{ (SI)} \quad (1)$$

Στο σώμα ασκείται μόνο το βάρος του, συντηρητική δύναμη, οπότε όταν επιστρέφει στο ίδιο σημείο έχει την ίδια κινητική ενέργεια και αντίθετη ταχύτητα $v_1'' = -v_1'$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει

$$-v_1' = v_1' - 10 \cdot 1 \text{ (SI)} \Rightarrow v_1' = 5 \text{ m/s}$$

β. Η σφαίρα συγκρούεται μετωπικά με τον δίσκο, αναπηδά και μετά από $\Delta t = 1 \text{ s}$ ξανασυγκρούεται με τον δίσκο στην ίδια θέση τη στιγμή που αυτός διέρχεται για 10η φορά από τη θέση ισορροπίας του μετά την κρούση, άρα το συνολικό χρονικό διάστημα που μεσολαβεί είναι ίσο με πέντε περιόδους

$$\Delta t = 5T \Rightarrow \Delta t = 5 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k}} \Rightarrow 1 = 10\pi \sqrt{\frac{m_2}{1000\pi^2}} \Rightarrow m_2 = 10 \text{ kg}$$

γ. Επειδή το σύστημα κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι μονωμένο, από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$\text{ΑΔΟ: } \vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \Rightarrow m_1 v_1 = -m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_1 v_1'}{m_2} \Rightarrow v_2' = 1,5 \text{ m/s}$$

δ. Η σύγκρουση γίνεται στη θέση ισορροπίας, άρα η ταχύτητα που αποκτά το Σ_2 μετά την κρούση είναι η $v_{\max}$ της ταλάντωσης, οπότε το πλάτος ταλάντωσης είναι

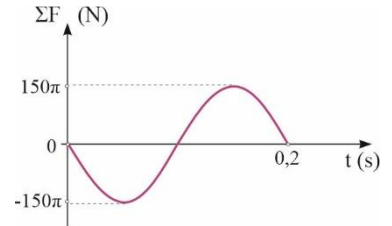
$$v_2' = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_2'}{\omega} = \frac{1,5}{\sqrt{\frac{k}{m_2}}} \Rightarrow A = \frac{1,5}{\sqrt{\frac{1000\pi^2}{10}}} \text{ (SI)} \Rightarrow A = \frac{3}{20\pi} \text{ m}$$

Η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στον δίσκο σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

$$\Sigma F = -kx \Rightarrow \Sigma F = -kA\eta\mu\omega t \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -1000\pi^2 \cdot \frac{3}{20\pi} \cdot \eta\mu 10\pi t \Rightarrow$$

$$\Sigma F = -150\pi \cdot \eta\mu 10\pi t \text{ (S.I.)}$$



Η γραφική παράσταση είναι όπως στο σχήμα.

7.Δ.38

α. Από τη γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης βρίσκουμε τη μάζα του σώματος

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Rightarrow m_1 = \frac{k}{\omega^2} \Rightarrow m_1 = \frac{144\pi^2}{144\pi^2} \text{ kg} \Rightarrow m_1 = 1 \text{ kg}$$

Από την ολική ενέργεια ταλάντωσης βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης

$$E = \frac{1}{2} k A_1^2 \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2E}{k}} \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,88\pi^2}{144\pi^2}} \text{ (SI)} \Rightarrow A_1 = 0,2 \text{ m}$$

β. Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος Σ_1 πριν τη σύγκρουση

$$\frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow v_1 = \pm \omega \sqrt{A_1^2 - x_1^2} \Rightarrow v_1 = \pm 12\pi \sqrt{0,04 - 0,03} \text{ (SI)} \Rightarrow v_1 = \pm 1,2\pi \text{ m/s}$$

Με θετική φορά κίνησης προς τα δεξιά διαλέγουμε την αρνητική τιμή της ταχύτητας γιατί τα σώματα κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις

$$v_1 = -1,2\pi \text{ m/s}$$

γ. Μετά την κρούση το σώμα Σ_1 αλλάζει κατεύθυνση κίνησης τριπλασιάζοντας το μέτρο της ορμής του, άρα

$$p_1' = -3p_1 \Rightarrow m_1 v_1' = -3m_1 v_1 \Rightarrow v_1' = -3v_1 = 3,6\pi \text{ m/s}$$

Επειδή το σύστημα είναι μονωμένο κατά τη διάρκεια της κρούσης, από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε

$$\text{ΑΔΟ: } \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_1'}{m_2} \Rightarrow v_2' = 0,8 \pi \text{ m/s}$$

δ. Τη στιγμή $t=0\text{s}$ η απομάκρυνση και η ταχύτητα ταλάντωσης είναι θετικές επομένως

$$\begin{cases} x = A \eta \mu \varphi_0 \\ v = \omega A \sigma \upsilon \nu \varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta \mu \varphi_0 > 0 \\ \sigma \upsilon \nu \varphi_0 > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \text{ rad} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Άρα η δεκτή λύση για την αρχική φάση της ταλάντωσης είναι η $\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

Η φάση μιας ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια μιας ταλάντωσης μεγιστοποιείται στις ακραίες θέσεις, δηλαδή στις θέσεις που η φάση της ταλάντωσης γίνεται $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad}$. Επειδή την $t=0\text{s}$ υπάρχει αρχική φάση

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}, \text{ η } 1^{\text{η}} \text{ φορά θα είναι όταν η φάση γίνει } \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Οπότε με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 12\pi t \Rightarrow t = \frac{1}{36} \text{ s}$$

7.Δ.39

α. Το χάσιμο επαφής των δύο σωμάτων συμβαίνει πάνω στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, γιατί εκεί η δύναμη επαφής ανάμεσα στα δύο σώματα μηδενίζεται. Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων στη θέση αυτή συμπίπτει με τη v_{max} της ταλάντωσης, άρα έχουμε

$$v_2 = V_k = \omega A \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1 + m_2}} A \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{200}{2}} 0,2 \text{ m/s} \Rightarrow v_2 = 2 \text{ m/s}$$

β. Το χρονικό διάστημα που κινείται το σώμα S_2 από τη στιγμή που αφήσαμε ελεύθερο το σύστημα μέχρι να συγκρουστούν τα δύο σώματα είναι

$$\Delta t_{\text{ολ}} = \frac{T}{4} + \frac{d_1}{v_2} \Rightarrow \Delta t_{\text{ολ}} = \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} + \frac{d_1}{v_2} \Rightarrow \Delta t_{\text{ολ}} = \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{200}} + \frac{0,2\pi}{2} \right) (\text{SI}) \Rightarrow \Delta t_{\text{ολ}} = \frac{3\pi}{20} \text{ s}$$

Στο παραπάνω χρονικό διάστημα το S_3 έχει κινηθεί με ευθύγραμμη ομαλή κίνηση κατά απόσταση ίση με

$$y = v_3 \Delta t_{\text{ολ}} \Rightarrow y = 2\sqrt{3} \cdot \frac{3\pi}{20} m \Rightarrow y = 0,3\pi\sqrt{3}m$$

γ. Από τη γεωμετρία του σχήματος έχουμε

$$\varepsilon\phi 60^\circ = \frac{V_{\kappa,y}}{V_{\kappa,x}} \Rightarrow \frac{V_{\kappa,y}}{V_{\kappa,x}} = \sqrt{3} \quad (1)$$

Από τη διατήρηση της ορμής στον οριζόντιο άξονα έχουμε

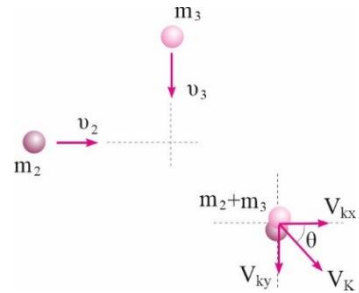
$$m_2 v_2 = (m_2 + m_3) V_{\kappa,x} \Rightarrow V_{\kappa,x} = \frac{m_2 v_2}{m_2 + m_3} \quad (2)$$

Από τη διατήρηση της ορμής στον κατακόρυφο άξονα έχουμε

$$m_3 v_3 = (m_2 + m_3) V_{\kappa,y} \Rightarrow V_{\kappa,y} = \frac{m_3 v_3}{m_2 + m_3} \quad (3)$$

Από (1), (2), (3) έχουμε

$$\frac{\frac{m_3 v_3}{m_2 + m_3}}{\frac{m_2 v_2}{m_2 + m_3}} = \sqrt{3} \Rightarrow m_3 = 1\text{kg}$$



δ. Η κρούση είναι κεντρική ελαστική μεταξύ σωμάτων με ίσες μάζες, άρα το συσσωμάτωμα θα ανταλλάξει ταχύτητα με το ακίνητο Σ4 και ο λόγος των ενεργειών θα είναι

$$\frac{E_1}{E_4} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_{\text{max}}^2}{\frac{1}{2} m_4 v_{\text{max}}^2} = \frac{m_1}{m_4} \Rightarrow \frac{E_1}{E_4} = 0,5$$

7.Δ.40

α. Η δύναμη F είναι η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα, οπότε η θέση ισορροπίας του σώματος θα βρίσκεται στη θέση που μηδενίζεται η δύναμη

$$F = 4 - 20x' \Rightarrow 0 = 4 - 20x'_0 \Rightarrow x'_0 = 0,2\text{m}$$

Άρα, η θέση ισορροπίας βρίσκεται δεξιότερα κατά 0,2m από τη θέση $x' = 0\text{m}$.

Στην τυχαία θέση του σώματος, που απέχει x από τη θέση x'_0 , η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι

$$F = 4 - 20(x'_0 + x) (\text{SI}) \Rightarrow F = 4 - 20x'_0 - 20x (\text{SI}) \Rightarrow F = -20x (\text{SI}) \quad (1)$$

Άρα, το σώμα εκτελεί α.α.τ με $D=20\text{N/m}$ γύρω από τη θέση ισορροπίας που βρίσκεται στο $x'_0=0,2\text{m}$.

β. Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$, για $x'=0\text{m}$, από τη σχέση $F=4-20x'$ (SI) προκύπτει $F=4\text{N}$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) προκύπτει ότι την $t=0\text{s}$ το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση

$x=-0,2\text{m}$ από τη θέση ισορροπίας του.

Θα εφαρμόσουμε τη διατήρηση της ενέργειας για την ταλάντωση μεταξύ των θέσεων (Α) και (Γ)

$$U_A + K_A = U_\Gamma + K_\Gamma \Rightarrow \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}DA^2 + 0 \Rightarrow$$

$$A = \sqrt{x^2 + \frac{m}{D}v^2} = \sqrt{(0,2\text{m})^2 + \frac{0,2\text{kg}}{20\text{N/m}}(\sqrt{5}\text{m/s})^2} \Rightarrow A = 0,3\text{m}$$

γ. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$m\omega^2 = D \Rightarrow \omega = \sqrt{D/m} \Rightarrow \omega = 10\text{rad/s}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$, έχουμε $x<0$ και $v>0$, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης θα βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο. Από τις τιμές που μας δίνονται, δεκτή είναι η $\varphi_0 = \frac{76\pi}{43}\text{rad}$.

Το σώμα σταματά κάθε φορά που η φάση της ταλάντωσης γίνεται $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\text{rad}$. Στην περίπτωση

μας την $t=0\text{s}$, έχουμε αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{76\pi}{43}\text{rad}$, οπότε η 1^η φορά θα είναι όταν το σώμα βρεθεί

στην ακραία θετική απομάκρυνση, δηλαδή η ταλάντωση αποκτήσει φάση ίση με $\varphi = \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

rad. Οπότε έχουμε

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \Rightarrow \frac{5\pi}{2} = \frac{76\pi}{43} + 10t \text{ (SI)} \Rightarrow t = \frac{139\pi}{860}\text{s}$$

δ. Όταν το σώμα σταματάει για 1^η φορά στη θέση ακραίας θετικής απομάκρυνσης, η επιτάχυνσή του θα είναι

$$\alpha = -\omega^2 A \Rightarrow \alpha = -100 \cdot 0,3\text{m/s}^2 \Rightarrow \alpha = -30\text{m/s}^2$$

7.Δ.41

α. Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ από το σημείο που εκτοξεύσαμε το σώμα μέχρι αυτό να φθάσει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου

$$\Theta\text{ΜΚΕ: } W_{\text{Wx}} = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \Rightarrow -mg\eta\mu\phi_s = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2g\eta\mu\phi_s} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{4 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} (\text{SI}) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ m/s}$$

β. Βρίσκουμε πόσο απέχει η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg\eta\mu\phi = k\Delta\ell_0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg\eta\mu\phi}{k} \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{100} (\text{SI}) \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,1\text{m}$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΕΤ αμέσως μετά την προσάρτηση του σώματος στο ελατήριο και την ακραία θέση της ταλάντωσης

$$\text{ΑΔΕΤ: } E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{mv^2 + k\Delta\ell_0^2}{k}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{3}{2} + 10^2 \cdot 10^{-2}}{10^2}} (\text{SI}) \Rightarrow$$

$$A = 0,2\text{m}$$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = 5\sqrt{2} \text{ rad/s}$$

Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος είναι

$$v_{\text{max}} = \omega A \Rightarrow v_{\text{max}} = 5\sqrt{2} \cdot 0,2 (\text{SI}) \Rightarrow v_{\text{max}} = \sqrt{2} \text{ m/s}$$

γ. Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$, έχουμε $x>0$ και $v>0$, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης θα βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο. Από τις τιμές που μας δίνονται, δεκτή είναι η $\phi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

Το σώμα μηδενίζει την επιτάχυνσή του κάθε φορά που περνά από τη θέση ισορροπίας του, δηλαδή κάθε φορά που η φάση της ταλάντωσης γίνεται $k\pi \text{ rad}$. Στην περίπτωση μας την $t=0\text{s}$,

έχουμε αρχική φάση $\phi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$, οπότε η 1^η φορά θα είναι όταν το σώμα αποκτήσει φάση ίση με

$\pi \text{ rad}$. Άρα, έχουμε

$$\phi = \phi_0 + \omega t \Rightarrow \pi = \frac{\pi}{6} + \sqrt{50}t (\text{SI}) \Rightarrow t = \frac{\sqrt{50}\pi}{60} \text{ s}$$

δ. Το ελατήριο έχει τη μέγιστη συσπίρυσή του στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης, άρα ο ρυθμός μεταβολής της ορμής στη θέση αυτή θα είναι

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -kA \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,2\text{m} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -20 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}$$

7.Δ.42

α. Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι

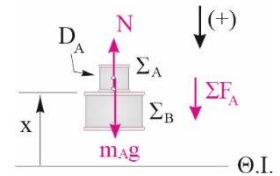
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_A + m_B}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{300}{3}} \text{ rad/s} \Rightarrow \omega = 10 \text{ rad/s}$$

Η σταθερά επαναφοράς του σώματος Σ_A είναι

$$D_A = m_A \omega^2 \Rightarrow D_A = 1 \cdot 100 \text{ N/m} \Rightarrow D_A = 100 \text{ N/m}$$

Σε μία τυχαία θέση πάνω από τη θέση ισορροπίας του συστήματος οι δυνάμεις που ασκούνται στο Σ_A θα δημιουργούν τη δύναμη επαναφοράς

$$\Sigma F_A = -D_A x \Rightarrow N + m_A g = -D_A x \Rightarrow N = -m_A g - D_A x \quad (1)$$



Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) $N=0\text{N}$, παίρνουμε την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας για την οποία χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων

$$N = -m_A g - D_A x \Rightarrow 0 = -m_A g - D_A x \Rightarrow x = -\frac{m_A g}{D_A} \Rightarrow x = -\frac{10}{100} \text{ m} \Rightarrow x = -0,1 \text{ m}$$

Όταν το σύστημα ισορροπεί τότε απέχει από το φυσικό μήκος του ελατηρίου απόσταση $\Delta \ell_0$ που είναι ίση με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_A + m_B)g = k\Delta \ell_0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{(m_A + m_B)g}{k} \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{30}{300} \text{ m} \Rightarrow \Delta \ell_0 = 0,1 \text{ m}$$

Η απόσταση του σημείου που χάνεται η επαφή από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι ίση με το $\Delta \ell_0$, άρα η επαφή χάνεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

β. Το μέτρο της ταχύτητας του Σ_A τη στιγμή που αυτό θα αποχωριστεί από το Σ_B βρίσκεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ταλάντωσης εφαρμοσμένη στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και την ακραία θέση της ταλάντωσης

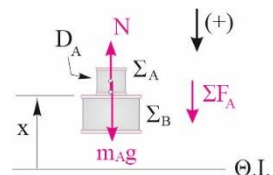
$$\Delta \text{ΕΤ} : E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \Delta \ell_0^2 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \pm \omega \sqrt{A^2 - \Delta \ell_0^2} \Rightarrow$$

$$v = \pm 10 \sqrt{0,2^2 - 0,1^2} \text{ (SI)} \Rightarrow |v| = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

γ. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι 0,2m, αφού το σώμα αφήνεται από τη θέση αυτή χωρίς αρχική ταχύτητα και η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι ίση με $\pi/2$ rad, αφού θεωρούμε θετική φορά προς τα κάτω. Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$x = 0,2 \eta \mu(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Η δύναμη επαφής σε σχέση με τον χρόνο είναι



$$\Sigma F_A = -D_A x \Rightarrow N + m_A g = -D_A x \Rightarrow N = -m_A g - D_A x \Rightarrow$$

$$N = -10 - 20\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

δ. Τη χρονική στιγμή που το Σ_A θα αποχωριστεί από το Σ_B τα σώματα διέρχονται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, δηλαδή $x=0,1\text{m}$

$$x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow -0,1 = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) = \eta\mu(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (1) \\ 10t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \quad (2) \end{array} \right\} \xrightarrow{(2), k=0} 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{15} \text{ s}$$

7.Δ.43

α. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για να βρούμε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση

$$\Delta\Delta O: \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m v_{\alpha\chi} = 2mV \Rightarrow V = \frac{v_{\alpha\chi}}{2} \Rightarrow V = \frac{v_0 \sigma\upsilon\nu\varphi}{2} \Rightarrow V = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \text{ m/s} \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων (M, m) κατά την κρούση είναι

$$\Delta K = \frac{1}{2} 2mV^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \Delta K = \left(\frac{1}{2} 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} 2 \cdot 4 \right) \text{ (SI)} \Rightarrow \Delta K = -2,5 \text{ J}$$

β. Στην αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος το ελατήριο ήταν επιμηκυμένο από το φυσικό του μήκος κατά $\Delta\ell_0$ άρα

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow Mg\eta\mu\varphi - k\Delta\ell_0 = 0 \quad (1)$$

Μετά την πλαστική κρούση η θέση ισορροπίας του συστήματος μετατοπίζεται σε σχέση με την αρχική κατά x_1

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (M + m)g\eta\mu\varphi = k(\Delta\ell_0 + x_1) = 0$$

η οποία με τη βοήθεια της (1) δίνει

$$x_1 = \frac{mg\eta\mu\varphi}{k} \Rightarrow x_1 = 0,1 \text{ m}$$

Εφαρμόζουμε ΑΔΕΤ αμέσως μετά την κρούση και την ακραία θέση της ταλάντωσης, έχουμε

$$\Delta\Delta E T: E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} 2mV^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2mV^2 + kx_1^2}{k}} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{4}{100}} \text{ m} = 0,2 \text{ m}$$

γ. Τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$, έχουμε $x>0$ και $v>0$, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης θα βρίσκεται

στο 1^ο τεταρτημόριο. Από τις τιμές που μας δίνονται, δεκτή είναι η $\varphi_0 = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι

$$(m + M)\omega^2 = k \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m + M}} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου, οπότε τη μέγιστη παραμόρφωση του ελατηρίου θα την έχουμε στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης,

δηλαδή όταν η φάση της γίνει $\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ rad}$. Οπότε έχουμε

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \Rightarrow \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 5t \text{ (SI)} \Rightarrow t = \frac{4\pi}{15} \text{ s}$$

δ. i. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = -kx_1 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,1 \text{ m} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -10 \text{ kgm/s}^2$$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot V \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -k \cdot x_1 \cdot V \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -100 \cdot 0,1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (SI)} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = -5\sqrt{3} \text{ J/s}$$

7.Δ.44

Α. i. Από τη θέση ελευθέρωσης μέχρι τη θέση ισορροπίας η ταχύτητα του Σ_1 διαρκώς αυξάνεται, οπότε το νήμα είναι διαρκώς τεντωμένο. Βρίσκουμε την ταχύτητα που έχουν τα δύο σώματα όταν το Σ_1 περνάει για πρώτη φορά από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κινούμενο προς τα αριστερά

$$v_{\max(1)} = \omega A \Rightarrow v_{\max(1)} = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A \Rightarrow v_{\max(1)} = \sqrt{\frac{100\pi^2}{4}} \cdot \frac{2}{5\pi} \text{ (SI)} \Rightarrow v_{\max(1)} = 2 \text{ m/s}$$

Όταν το Σ_1 φθάσει στο φυσικό μήκος του ελατηρίου, τότε το νήμα αρχίζει να λυγίζει, οπότε τα δύο σώματα κινούνται ανεξάρτητα. Το νέο πλάτος ταλάντωσης του Σ_1 θα είναι

$$v'_{\max(1)} = \omega' A' \Rightarrow A' = \frac{v'_{\max(1)}}{\omega'} \Rightarrow A' = \frac{2}{\sqrt{\frac{100\pi^2}{1}}} \text{ (SI)} \Rightarrow A' = \frac{1}{5\pi} \text{ m}$$

Επομένως η θέση στην οποία το Σ_1 θα σταματήσει για πρώτη φορά, με θετικό άξονα προς τα δεξιά, είναι

$$x_1 = -\frac{1}{5\pi} \text{ m}$$

ii. Για να σταματήσει το Σ_1 για πρώτη φορά από τη στιγμή που αρχίζει να λυγίζει το νήμα θα περάσει χρονικό διάστημα

$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{100\pi^2}} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{20} \text{ s}$$

Στο διάστημα αυτό το Σ_2 κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και διανύει απόσταση

$$d = v_{\max(1)} \Delta t \Rightarrow d = 2 \cdot \frac{1}{20} \text{ m} \Rightarrow d = 0,1 \text{ m}, \text{ δηλαδή έχει καλύψει το μισό μήκος του σχοινιού και βρίσκεται } 0,1 \text{ m δεξιά από τη θέση ισορροπίας του } \Sigma_1.$$

Επομένως η θέση του θα είναι

$$x_2 = \ell - d \Rightarrow x_2 = 0,1 \text{ m}$$

iii. Το Σ_1 επανέρχεται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης μετά από $T/4$, δηλαδή μετά $\Delta t = \frac{2}{20} \text{ s}$

από τη στιγμή που άρχισε να χαλαρώνει το νήμα. Την ίδια χρονική στιγμή το σώμα Σ_2 έχει καλύψει το υπόλοιπο $0,1 \text{ m}$ του νήματος και τα σώματα συγκρούονται στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του Σ_1 . Η χρονική στιγμή στην οποία τα σώματα θα συγκρουστούν είναι

$$t = \frac{T}{4} + \frac{T'}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} + \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow t = \left(\frac{1}{4} 2\pi \sqrt{\frac{4}{100\pi^2}} + \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{1}{100\pi^2}} \right) \text{ s} \Rightarrow t = 0,2 \text{ s}$$

B. i. Το Σ_1 επανέρχεται στη θέση φυσικού μήκους κινούμενο προς τα δεξιά με ταχύτητα μέτρου

$$v_1 = v_{\max(1)} = 2 \text{ m/s}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση και έχουμε

$$\Lambda\Delta\text{O} : \vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_2 v_2 - m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V_k \Rightarrow V_k = \frac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2} \Rightarrow V_k = \frac{(3-1) \cdot 2}{4} (\text{SI}) \Rightarrow V_k = 1 \text{ m/s}$$

Άρα το ποσοστό της ενέργειας της αρχικής ταλάντωσης που μετατράπηκε σε θερμότητα είναι

$$\pi\% = \frac{Q}{K_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_k^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} 100\% \Rightarrow \pi\% = 75\%$$

ii. Το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος θα είναι

$$V_k = \omega' A' \Rightarrow A' = \frac{V_k}{\omega'} \Rightarrow A' = \frac{1}{\sqrt{\frac{100\pi^2}{4}}} \text{ m} \Rightarrow A' = \frac{1}{5\pi} \text{ m}$$

7.Δ.45

α. Από τη μέγιστη κατακόρυφη απόσταση $d=40 \text{ cm}$ βρίσκουμε το πλάτος της ταλάντωσης

$$2A = d \Rightarrow A = \frac{d}{2} = 0,2 \text{ m}$$

Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\pi/2$ rad γιατί το σώμα ξεκινάει από τη μέγιστη θετική απομάκρυνση, άρα η εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου είναι

$$y = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow y = 0,2\eta\mu\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

$$\beta. \frac{dU_{\text{ταλ}}}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\Sigma F \cdot v \quad (1)$$

Από την περίοδο της ταλάντωσης βρίσκουμε τη μάζα του σώματος

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{kT^2}{4\pi^2} \Rightarrow m = \frac{100 \cdot \left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{4\pi^2} \text{ (SI)} \Rightarrow m = 1\text{Kg}$$

Βρίσκουμε την απόσταση ανάμεσα στο φυσικό μήκος του ελατηρίου και τη θέση ισορροπίας

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg = k\Delta\ell_0 \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{mg}{k} \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{10}{100} \text{ m} \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,1\text{m}$$

Η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, $x_1 = \Delta\ell_0$, υπολογίζεται από την ΑΔΕΤ

$$\text{ΑΔΕΤ: } E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x_1^2} \Rightarrow v = \pm 10\sqrt{0,2^2 - 0,1^2} \text{ (SI)} \Rightarrow$$

$$|v| = \sqrt{3}\text{m/s}$$

Αφού η θετική φορά είναι προς τα πάνω, την πρώτη φορά που το σώμα διέρχεται από το φυσικό μήκος η ταχύτητα θα είναι αρνητική, άρα έχουμε

$$v = -\sqrt{3}\text{m/s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1), ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης είναι

$$\frac{dU_{\text{ταλ}}}{dt} = k \cdot x_1 \cdot v \Rightarrow \frac{dU_{\text{ταλ}}}{dt} = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,1\text{m} \cdot (-\sqrt{3}) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dU_{\text{ταλ}}}{dt} = -10\sqrt{3}\text{J/s}$$

γ. Η χρονική στιγμή που το σώμα θα περάσει για πρώτη φορά από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου, βρίσκεται με αντικατάσταση στη σχέση απομάκρυνσης - χρόνου, όπου $y=0,1\text{m}$

$$y = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0,1 = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (1) \\ 10t + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \quad (2) \end{array} \right\} \xrightarrow{(2), k=0} 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{30}\text{s}$$

δ. i. Όταν η απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος είναι για δεύτερη φορά η μισή της μέγιστης τιμής τότε η απομάκρυνση θα είναι

$$\left| \frac{dp}{dt} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{dp}{dt} \right|_{\max} \Rightarrow |ky_1| = \frac{1}{2} |kA| \Rightarrow |y_1| = \left| \frac{A}{2} \right| = 0,1\text{m}$$

Επειδή ο θετικός άξονας είναι προς τα πάνω θα είναι $y_1 = -0,1\text{m}$

ο λόγος της δυναμικής προς την κινητική ενέργεια την ίδια στιγμή είναι

$$\frac{U}{K} = \frac{E - K}{K} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{\frac{1}{2}ky_1^2}{\frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}ky_1^2} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{y_1^2}{A^2 - y_1^2} \Rightarrow \frac{U}{K} = \frac{0,1^2}{0,2^2 - 0,1^2} = \frac{1}{3}$$

δ. ii. Ο λόγος των μέτρων της δύναμης επαναφοράς προς τη δύναμη του ελατηρίου είναι

$$\frac{|\Sigma F|}{|F_{ελ}|} = \frac{|ky_1|}{|k(\Delta\ell_0 + y_1)|} \Rightarrow \frac{|\Sigma F|}{|F_{ελ}|} = \frac{|y_1|}{|\Delta\ell_0 + y_1|} = \frac{0,1}{0,1 + 0,1} \Rightarrow \frac{|\Sigma F|}{|F_{ελ}|} = \frac{1}{2}$$

7.Δ.46

Α. α. Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ για να βρούμε την ταχύτητα που έχουν τα δύο σώματα τη στιγμή που το ελατήριο ακουμπάει στο έδαφος

$$\begin{aligned} \text{ΑΔΜΕ: } U_I + K_I &= U_{II} + K_{II} \Rightarrow (m_1 + m_2)gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow V = \sqrt{2gh} \Rightarrow \\ V &= \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2,4\text{m}} / \text{s} \Rightarrow V = 4\sqrt{3}\text{m/s} \end{aligned}$$

Τη στιγμή που το ελατήριο ακουμπάει στο έδαφος έχει το φυσικό του μήκος και η απόσταση των σωμάτων από τη μελλοντική θέση ισορροπίας τους είναι ψηλότερα κατά

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g = k\Delta\ell_0 \quad (1)$$

Η επίλυση ως προς $\Delta\ell_0$ και η αριθμητική αντικατάσταση δίνει

$$\Delta\ell_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{(1\text{kg} + 3\text{kg}) \cdot 10\text{m/s}^2}{400\text{N/m}} \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,1\text{m}$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΕΤ μεταξύ της θέσης που το ελατήριο ακουμπάει στο έδαφος και της μέγιστης συσπείρωσης για να βρούμε το πλάτος ταλάντωσης

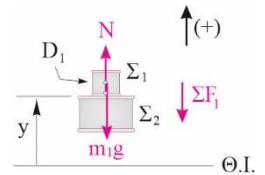
$$\begin{aligned} E &= K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\Delta\ell_0^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 \Rightarrow A = \sqrt{\Delta\ell_0^2 + \frac{(m_1 + m_2)V^2}{k}} \Rightarrow \\ A &= \sqrt{(0,1\text{m})^2 + \frac{(1\text{kg} + 3\text{kg})(4\sqrt{3}\text{m/s})^2}{4 \cdot 10^2\text{N/m}}} \Rightarrow A = 0,7\text{m} \end{aligned}$$

β. Η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου συμβαίνει στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης

$$\Delta \ell_{\max} = \Delta \ell_0 + A = 0,8\text{m}$$

γ. Για να βρούμε τη θέση στην οποία το Σ_1 εγκαταλείπει το Σ_2 , εφαρμόζουμε την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα α.α.τ., παίρνοντας θετικά προς τα πάνω και έχουμε

$$\Sigma F_1 = -D_1 y \Rightarrow N - m_1 g = -D_1 y \Rightarrow N = m_1 g - \frac{m_1}{m_1 + m_2} k y$$



Με αντικατάσταση $N=0N$ στην τελευταία σχέση βρίσκουμε τη θέση που το Σ_1 εγκαταλείπει το Σ_2

$$0 = m_1 g - \frac{m_1}{m_1 + m_2} k y_1 \Rightarrow y_1 = 0,1\text{m}$$

Η απομάκρυνση του σημείου που χάνεται η επαφή από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης είναι ίση με $y_1 = \Delta \ell_0$, άρα η επαφή χάνεται στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Β. Η νέα θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 βρίσκεται χαμηλότερα από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_1$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g = k \Delta \ell_1 \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{m_2 g}{k} \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{3}{40} \text{ m}$$

Άρα, η νέα ταλάντωση ξεκινά από απομάκρυνση $y = \Delta \ell_1 = \frac{3}{40} \text{ m}$ (θετικά προς τα κάτω). Το πλάτος ταλάντωσης του Σ_2 βρίσκεται από την ΑΔΕΤ μεταξύ της θέσης που χάνεται η επαφή και της ακραίας θέσης

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A'^2 = \frac{1}{2} k \Delta \ell_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V^2 \Rightarrow A' = \sqrt{\frac{m_2 V^2 + k \Delta \ell_1^2}{k}} \Rightarrow$$

$$A' = \sqrt{\frac{146,25}{4 \cdot 10^2}} \text{ m} = \frac{12,1}{20} \text{ m} \Rightarrow A' = 0,605 \text{ m}$$

7.Δ.47

Α. Η θέση ισορροπίας του κουτιού και της πλαστελίνης μαζί, απέχει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου $\Delta \ell_0$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (M + m)g = k \Delta \ell_0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{(M + m)g}{k} \quad (1)$$

Η θέση ισορροπίας του κουτιού, χωρίς την πλαστελίνη, απέχει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου $\Delta\ell_1$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow Mg = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{Mg}{k} \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι το πλάτος ταλάντωσης του κουτιού, πριν γίνει η πλαστική κρούση, είναι ίσο με

$$A = \Delta\ell_0 - \Delta\ell_1 \Rightarrow A = \frac{(M+m)g}{k} - \frac{Mg}{k} \Rightarrow A = \frac{mg}{k}$$

Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μεταβεί το κουτί από τη μία ακραία θέση στην άλλη είναι ίσο με

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{2} 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow \Delta t = \pi\sqrt{\frac{M}{k}} \quad (3)$$

Σε αυτό το χρονικό διάστημα το κομμάτι πλαστελίνης κάνει ελεύθερη πτώση και διανύει κατακόρυφη απόσταση

$$h - 2A = \frac{1}{2}g\Delta t^2 \Rightarrow h - 2\frac{mg}{k} = \frac{1}{2}g\left(\pi\sqrt{\frac{M}{k}}\right)^2 \Rightarrow h = 2\frac{mg}{k} + \frac{1}{2}g\frac{\pi^2 M}{k}$$

B. i. Η νέα συχνότητα της ταλάντωσης του κουτιού είναι

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

B. ii. Η ταχύτητα της πλαστελίνης ελάχιστα πριν την κρούση είναι

$$v = g\Delta t \Rightarrow v = g\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση

$$\vec{p}_{\text{αρχ}} = \vec{p}_{\text{τελ}} \Rightarrow mv = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{mv}{m+M} \Rightarrow V = \frac{m}{m+M}g\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

B. iii. Εφαρμόζουμε την ΑΔΕΤ για τη νέα ταλάντωση μεταξύ της θέσης αμέσως μετά την κρούση και της ακραίας θέσης

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}kA'^2 = \frac{1}{2}k(2A)^2 + \frac{1}{2}(m+M)V^2 \Rightarrow kA'^2 = k\frac{4m^2g^2}{k^2} + (m+M)\left(\frac{m}{m+M}g\pi\sqrt{\frac{M}{k}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$A' = \sqrt{\frac{g^2\pi^2Mm^2}{k^2(M+m)} + \frac{4m^2g^2}{k^2}} \Rightarrow A' = \frac{mg}{k}\sqrt{\frac{\pi^2M}{M+m}} + 4$$

7.Δ.48

A. i. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής, δηλαδή η συνολική δύναμη, είναι μηδενικός στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι ίσο με την απόσταση ανάμεσα στη θέση ισορροπίας και τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Από τη συνθήκη ισορροπίας για το σύστημα έχουμε

$$\Delta\ell_0 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k} \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{(1\text{kg} + 3\text{kg}) \cdot 10\text{m/s}^2}{100\text{N/m}} \Rightarrow \Delta\ell_0 = 0,4\text{m} = A$$

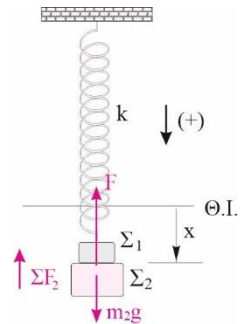
Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος είναι

$$v_{\max} = \omega A \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{100\text{N/m}}{1\text{kg} + 3\text{kg}}} \cdot 0,4\text{m} \Rightarrow v_{\max} = 2\text{m/s}$$

A. ii. Στην κατώτερη θέση της ταλάντωσης η δύναμη συγκόλλησης που ασκείται στο Σ_2 παίρνει τη μέγιστη τιμή της, γιατί στη θέση αυτή η δύναμη αυτή είναι η μόνη που έχει φορά προς τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης. Θεωρώντας τα θετικά προς τα κάτω έχουμε

$$\Sigma F_2 = -D_2x \Rightarrow F + w_2 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}kx \Rightarrow F = -w_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}kx \xrightarrow{x=A}$$

$$F = -30\text{N} - \frac{1\text{kg}}{1\text{kg} + 3\text{kg}} \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,4\text{m} \Rightarrow F = -60\text{N} \Rightarrow |F_{\max}| = 60\text{N}$$



B. i. Μετά την αποκόλληση η νέα θέση ισορροπίας απέχει από το φυσικό μήκος $\Delta\ell_1$ που είναι

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1g = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{m_1g}{k} \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{10}{100}\text{m} \Rightarrow \Delta\ell_1 = 0,1\text{m}$$

Άρα το νέο πλάτος ταλάντωσης θα είναι

$$A' = 2\Delta\ell_0 - \Delta\ell_1 \Rightarrow A' = 2 \cdot 0,4\text{m} - 0,1\text{m} = 0,7\text{m}$$

Το σώμα ξεκινάει να ταλαντώνεται από την ακραία θετική απομάκρυνση, επομένως η εξίσωση απομάκρυνσης -χρόνου είναι

$$y = 0,7\text{m} \left(\sqrt{\frac{k}{m_1}} t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow y = 0,7\text{m} (10t + \frac{\pi}{2}) (\text{S.I.})$$

Β. ii. Τη στιγμή που το σώμα Σ_1 βρίσκεται στην ανώτερη θέση της διαδρομής του για πρώτη φορά, έχει παρέλθει χρονικό διάστημα

$$\Delta t = \frac{T'}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow \Delta t = \pi \sqrt{\frac{1\text{kg}}{100\text{N/m}}} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

Σε αυτό το χρονικό διάστημα το άλλο σώμα κάνει ελεύθερη πτώση και διανύει κατακόρυφη απόσταση

$$y_2 = \frac{1}{2} g \Delta t^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \left(\frac{\pi}{10} \text{ s} \right)^2 \Rightarrow y = 0,5\text{m}$$

Άρα η απόσταση ανάμεσα στα δύο σώματα είναι

$$d = y_2 + 2A' \Rightarrow d = 0,5\text{m} + 2 \cdot 0,7\text{m} \Rightarrow d = 1,9\text{m}$$

7.Δ.49

α. Το χρονικό διάστημα που το σώμα Σ_2 διανύει κατακόρυφη απόσταση h κάνοντας ελεύθερη πτώση είναι

$$h = \frac{1}{2} g \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{1,6}{10}} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 0,4\text{s}$$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα το σώμα Σ_1 πάει από τη μία ακραία θέση της ταλάντωσης στην άλλη

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} \Rightarrow m_1 = \frac{k_1 \Delta t^2}{\pi^2} \Rightarrow m_1 = \frac{250\text{N/m} \cdot (0,4\text{s})^2}{10\text{m/s}^2} \Rightarrow m_1 = 4\text{kg}$$

$$\beta. y = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

Πριν κοπεί το νήμα το ελατήριο σταθεράς k_1 ήταν επιμηκυμένο από το φυσικό του μήκος κατά $\Delta \ell_{0,1}$ που είναι ίσο με

$$\Delta \ell_{0,1} = \frac{(m_1 + m_3)g}{k_1} \Rightarrow \Delta \ell_{0,1} = \frac{50\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2}{250\text{N/m}} \Rightarrow \Delta \ell_{0,1} = 0,2\text{m}$$

Αμέσως μετά το κόψιμο του νήματος η νέα θέση ισορροπίας απέχει από το φυσικό μήκος κατά $\Delta \ell_1$ που είναι ίσο με

$$\Delta \ell_1 = \frac{m_1 g}{k_1} \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{40\text{N}}{250\text{N/m}} = 0,16\text{m}$$

Άρα το πλάτος της απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι

$$A = \Delta \ell_{0,1} - \Delta \ell_1 \Rightarrow A = 0,2\text{m} - 0,16\text{m} = 0,04\text{m}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{250\text{N/m}}{4\text{kg}}} \Rightarrow \omega_1 = 2,5\sqrt{10}\text{rad/s}$$

Η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι $\pi/2$ rad, αφού το σώμα ξεκινάει από την ακραία θετική απομάκρυνση άρα με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε

$$y = 0,04\eta\mu(2,5\sqrt{10}t + \frac{\pi}{2})(\text{S.I.})$$

γ. Πριν γίνει η πλαστική κρούση το ελατήριο σταθεράς k_2 ήταν συμπιεσμένο από το φυσικό του μήκος κατά $\Delta \ell_{0,2}$ που είναι ίσο με

$$\Delta \ell_{0,2} = \frac{m_2 g}{k_2} \Rightarrow \Delta \ell_{0,2} = \frac{30\text{N}}{200\text{N/m}} \Rightarrow \Delta \ell_{0,2} = \frac{3}{20}\text{m}$$

Αμέσως μετά την πλαστική κρούση ξεκινά α.α.τ. γύρω από νέα θέση ισορροπίας που απέχει από το φυσικό μήκος κατά $\Delta \ell_2$ που είναι ίσο με

$$\Delta \ell_2 = \frac{(m_2 + m_3)g}{k_2} \Rightarrow \Delta \ell_2 = \frac{4\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2}{200\text{N/m}} \Rightarrow \Delta \ell_2 = \frac{4}{20}\text{m}$$

Άρα τη χρονική στιγμή $t'=0\text{s}$, έχουμε $x<0$ και $u>0$, οπότε η αρχική φάση της ταλάντωσης θα βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο. Από τις τιμές που μας δίνονται, δεκτή είναι η $\varphi_0 = \frac{19\pi}{10}\text{rad}$.

Το σώμα μεγιστοποιεί την ταχύτητά του κάθε φορά που περνά από τη θέση ισορροπίας του, δηλαδή κάθε φορά που η φάση της ταλάντωσης γίνεται $k\pi$ rad. Στην περίπτωση μας την $t'=0\text{s}$,

έχουμε αρχική φάση $\varphi_0 = \frac{19\pi}{10}\text{rad}$, οπότε η 1^η φορά θα είναι όταν το σώμα αποκτήσει φάση ίση με 2π rad.

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος είναι

$$k_2 = (m_2 + m_3)\omega_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2 + m_3}} \Rightarrow \omega_2 = 5\sqrt{2}\text{rad/s}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega\Delta t \Rightarrow 2\pi = \frac{19\pi}{10} + 5\sqrt{2}\Delta t (\text{SI}) \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi\sqrt{2}}{100}\text{s}$$

Άρα, η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι $t = t_k + \Delta t \Rightarrow t = 0,4\text{s} + \frac{\pi\sqrt{2}}{100}\text{s}$

δ. Βρίσκουμε πρώτα την ταχύτητα του Σ_3 ελάχιστα πριν την κρούση

$$v_3 = g\Delta t \Rightarrow v_3 = 10\text{m/s}^2 \cdot 0,4\text{s} \Rightarrow v_3 = 4\text{m/s}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για να βρούμε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_3 v_3 = (m_2 + m_3) V \Rightarrow V = \frac{m_3 v_3}{m_2 + m_3} \Rightarrow V = 1\text{m/s}$$

Από το ΘΜΚΕ βρίσκουμε το έργο της δύναμης επαναφοράς της ταλάντωσης του συσσωματώματος Σ_2 , Σ_3 από τη στιγμή της κρούσης μέχρι τη στιγμή που το συσσωμάτωμα θα μηδενίσει για πρώτη φορά την κινητική του ενέργεια

$$\text{ΘΜΚΕ: } W_{\Sigma F} = K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow W_{\Sigma F} = 0 - \frac{1}{2}(m_2 + m_3)V^2 \Rightarrow W_{\Sigma F} = -\frac{1}{2} \cdot 4\text{kg} \cdot (1\text{m/s})^2 \Rightarrow W_{\Sigma F} = -2\text{J}$$

7.Δ.50

α. Από τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας ως προς το Α, βρίσκουμε την τάση του νήματος

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T(A\Gamma) - Mg\frac{\ell}{2} - m_1 g\ell = 0 \Rightarrow T = 30\text{N}$$

β. Το Σ_2 θα φτάσει στην πάνω ακραία θέση σε χρονικό διάστημα μισής περιόδου

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m_2}{k}} \Rightarrow t = 0,314\text{s}$$

γ. Τη στιγμή $t=0\text{s}$ το σφαιρίδιο Σ_2 ξεκινάει να κινείται από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση

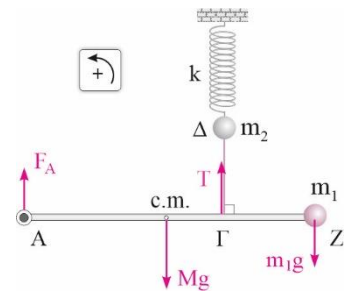
$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα είναι } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 10\text{rad/s}$$

$$\text{και η περίοδος της ταλάντωσης } T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,2\pi\text{s}.$$

Στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_2 ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g + T - F_{\epsilon\lambda} = 0 \Rightarrow T = F_{\epsilon\lambda} - m_2 g$$



Όταν καταργηθεί η τάση του νήματος, στο σώμα Σ_2 θα ασκείται συνολική δύναμη $F_{ελ} - m_2 g$ που θα παίξει τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς, άρα η μέγιστη τιμή της $F_{ελ}$ είναι ίση με την τάση του νήματος, απ' όπου προκύπτει το πλάτος της ταλάντωσης

$$F_{ελ(max)} = T = 30\text{N} = kA \Rightarrow A = 0,3\text{m}$$

Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας του σώματος είναι

$$v = v_{\max} \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow v = \omega A \cdot \sin(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow v = 3 \sin(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

από την οποία βρίσκουμε τις χρονικές στιγμές που η ταχύτητα του Σ_2 ισούται με $v=1,5\text{m/s}$

$$1,5 = 3 \sin(10t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} & (1) \\ 10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} & (2) \end{cases}$$

Η σχέση (2) δίνει

$$10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\kappa=1} t_1 = \frac{7\pi}{60} \text{ s}$$

Η σχέση (1) δίνει

$$10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\kappa=1} t_2 = \frac{11\pi}{60} \text{ s}$$

δ. Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης σε συνάρτηση με την απομάκρυνση είναι

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \Rightarrow U = 50x^2 \text{ (S.I.) με } -0,3\text{m} \leq x \leq 0,3\text{m}$$

Όταν κοπεί το νήμα, το Σ_2 αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση με νέα Θ.Ι. που βρίσκεται πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_1$

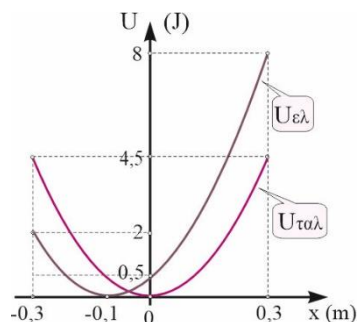
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g - k\Delta\ell_1 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{m_2 g}{k} = 0,1\text{m}$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου σε συνάρτηση με την απομάκρυνση είναι

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k(\Delta\ell_1 + x)^2 \Rightarrow U_{ελ} = 50(0,1 + x)^2 \text{ (S.I.)}$$

με $-0,3\text{m} \leq x \leq 0,3\text{m}$

Τα διαγράμματα σε κοινό ορθογώνιο σύστημα αξόνων δείχνονται στο διπλανό σχήμα.



ε. Η συνολική ροπή ως προς το Α έχει μέτρο που ισούται με

$$|\Sigma \tau_A| = m_1 g \ell \sin 60^\circ + M g \frac{\ell}{2} \sin 60^\circ \Rightarrow |\Sigma \tau_A| = 42 \text{ Nm}$$

7.Δ.51

α. Από τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας ως προς το Κ, βρίσκουμε την τάση του νήματος

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow T \ell - M g \frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow T = 5 \text{ N}$$

β. Τη στιγμή $t=0\text{s}$ το σφαιρίδιο Σ_2 ξεκινάει να κινείται από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = \eta \mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα είναι } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 10\sqrt{2} \text{ rad/s}.$$

Για τη θέση ισορροπίας του σώματος πριν κοπεί το νήμα, όταν το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $\Delta \ell_0$, ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g + T - k \Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{m_2 g + T}{k} \Rightarrow \Delta \ell_0 = 0,1 \text{ m}$$

Όταν κοπεί το νήμα, το Σ_2 αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση με νέα Θ.Ι. που βρίσκεται πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_1$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g - k \Delta \ell_1 = 0 \Rightarrow \Delta \ell_1 = \frac{m_2 g}{k} = 0,05 \text{ m}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με

$$A = \Delta \ell_0 - \Delta \ell_1 = 0,05 \text{ m}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι

$$x = 0,05 \eta \mu(10\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}$$

Τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{30} \text{ s}$ η απομάκρυνση x_2 είναι

$$x_2 = 0,05\eta\mu(10\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2})(\text{SI}) = 0,05\eta\mu(10\sqrt{2}\frac{\pi\sqrt{2}}{30} + \frac{\pi}{2})(\text{SI}) \Rightarrow x_2 = 0,05\eta\mu\frac{7\pi}{6}\text{m} \Rightarrow x_2 = -0,025\text{m}$$

Το έργο της δύναμης του ελατηρίου, αφού είναι συντηρητική δύναμη, ισούται με

$$W_{F_{ελ}} = -\Delta U_{ελ} = U_{ελ,1} - U_{ελ,2} = \frac{1}{2}k\Delta\ell_0^2 - \frac{1}{2}k(\Delta\ell_1 + x_2)^2 = 0,5\text{J} - 0,03125\text{J} \Rightarrow$$

$$W_{F_{ελ}} = 0,46875\text{J}$$

γ. Η στροφορμή της σφαίρας Σ_1 , είναι

$$L = m_1 v \ell = m_1 \omega \ell^2 \Rightarrow L = 1,28\text{kgm}^2 / \text{s}$$

δ. Η συνολική ροπή ως προς το K ισούται με

$$\Sigma\tau_K = m_1 g \ell \eta\mu 45^\circ + 2Mg \frac{\ell}{2} \eta\mu 45^\circ = 6\sqrt{2}\text{Nm}$$

7.Δ.52

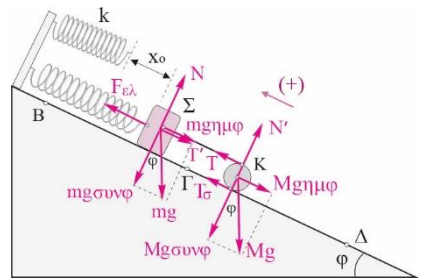
α. Η συνθήκη στροφικής ισορροπίας του κυλίνδρου ως προς το κέντρο του K, δίνει

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T \cdot R - T_\sigma \cdot R = 0 \Rightarrow T = T_\sigma, (1)$$

Η συνθήκη μεταφορικής ισορροπίας του κυλίνδρου, δίνει την τάση του νήματος

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T + T_\sigma - Mg \cdot \eta\mu\varphi = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} T = T_\sigma = 5\text{N}$$



και η συνθήκη μεταφορικής ισορροπίας του Σ δίνει την επιμήκυνση του ελατηρίου

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} - w_x - T' = 0 \Rightarrow$$

$$kx_0 = mg \cdot \eta\mu\varphi + T \Rightarrow x_0 = 0,1\text{m}$$

β. Τη στιγμή $t=0\text{s}$ το Σ ξεκινάει να κινείται από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Η γωνιακή συχνότητα είναι $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10\text{rad/s}$.

$$F_{ελ} = -kx = -kA\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow F_{ελ} = -5\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right), (\text{S.I.})$$

γ. Για να είναι ίσες η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης με τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, πρέπει το Σ να βρεθεί στη θέση που ισαπέχει από τη Θ.Ι. της ταλάντωσης και τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, άρα στη θέση $x = -0,025\text{m}$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης δίνει τη χρονική στιγμή με $v < 0$

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -0,025 = 0,5\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad (1) \\ 10t + \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (2) \end{array} \right.$$

Για αρνητική ταχύτητα (συνφ < 0), δεκτή είναι η (2) και για $\kappa = 0$ παίρνουμε

$$10t + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow 10t = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{15}\text{s}$$

δ. Από τις περιστροφές που διέγραψε προκύπτει η μετατόπιση του κυλίνδρου

$$N = \frac{x_{\text{cm}}}{2\pi R} \Rightarrow x_{\text{cm}} = N2\pi R = 2,4\text{m}$$

Η κίνηση μεταφορικά είναι ομαλά επιταχυνόμενη, άρα το χρονικό διάστημα t είναι ίσο με

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{2}\alpha_{\text{cm}}t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_{\text{cm}}}{\alpha_{\text{cm}}}} \Rightarrow t = 1,2\text{s}$$

και η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $v_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}}t = 4\text{m/s}$.

7.Δ.53

α. Η συνθήκη στροφικής ισορροπίας της τροχαλίας ως προς το κέντρο της Κ, δίνει την τάση T_1 του πάνω νήματος

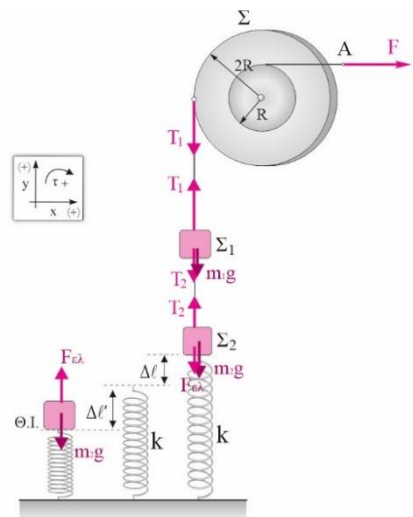
$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow -T_1 2R + FR = 0 \Rightarrow T_1 = 50\text{N}$$

Η συνθήκη ισορροπίας του Σ₁, δίνει την τάση T_2 του κάτω νήματος

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_1 - T_2 - m_1g = 0 \Rightarrow T_2 = 30\text{N}$$

και η συνθήκη ισορροπίας του Σ₂ δίνει τη σταθερά του ελατηρίου

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_2 - m_2g - k \cdot \Delta\ell = 0 \Rightarrow k = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$



β. Τη στιγμή $t=0\text{s}$ το Σ ξεκινάει να κινείται από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση

$$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A\eta\mu\varphi_0 \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_0 = 1 \Rightarrow \eta\mu\varphi_0 = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα είναι } \omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 10 \text{ rad/s}.$$

$$\text{Άρα } x = 0,3\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ (SI)}$$

γ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x είναι

$$U_{\text{ελ}} = \frac{1}{2}k(x - \Delta\ell_0)^2 \Rightarrow U_{\text{ελ}} = 50(x - 0,1)^2 \text{ (S.I.)} \quad \text{με } -0,3\text{m} \leq x \leq 0,3\text{m}$$

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι ελάχιστη όταν το σώμα διέρχεται από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, $x=0,1\text{m}$ και είναι ίση με $U_{\text{ελ},\min}=0\text{J}$.

Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι όταν το σώμα διέρχεται από την κατώτερη θέση, $x=-0,3\text{m}$ και είναι ίση με

$$U_{\text{ελ},\max} = \frac{1}{2}k(x - \Delta\ell_0)^2 = 50\frac{\text{N}}{\text{m}}(-0,3\text{m} - 0,1\text{m})^2 \Rightarrow U_{\text{ελ},\max} = 8\text{J}$$

δ. Για το σώμα Σ_1 , που ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση, ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει την τάση του νήματος

$$\Sigma F_1 = m_1\alpha_1 \Rightarrow T_1' - m_1g = m_1\alpha_1 \Rightarrow T_1' = 32\text{N}$$

και η συνολική ροπή που δέχεται η διπλή τροχαλία είναι

$$\Sigma\tau_K = T_1'2R - FR \Rightarrow \Sigma\tau_K = -3,6\text{Nm}$$

7.Δ.54

α. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για την πλαστική κρούση

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow m\mathbf{u}_0 = (m + m_1)\mathbf{V} \Rightarrow V = 5\text{ m/s}$$

Όταν το ελατήριο έχει τη μέγιστη συμπίεση θα ασκείται η μέγιστη δύναμη στον τοίχο από το Σ_2 . Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι μέγιστη για την ταλάντωση που ακολουθεί. Το πλάτος της ταλάντωσης προκύπτει από τη μέγιστη ταχύτητα

$$V = v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m+m_1}} A \Rightarrow A = V \sqrt{\frac{m+m_1}{k}} = 0,5\text{m}$$

και η μέγιστη δύναμη είναι $F_{\max} = kA = 100\text{N}$.

β. Για να χάσει το Σ_2 την επαφή του με τον τοίχο πρέπει να κινηθεί το συσσωμάτωμα προς τα αριστερά και να περάσει ξανά από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Μετά από εκείνη τη στιγμή, θα επιμηκυνθεί το ελατήριο και θα ασκεί δύναμη προς τα αριστερά στο Σ_2 . Αυτό θα συμβεί τη στιγμή $t=T/2$ που είναι

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m+m_1}{k}} = \frac{\pi}{10}\text{s}$$

γ. Μετά την απομάκρυνση του Σ_2 από τον τοίχο, αυτό κάνει επιταχυνόμενη κίνηση, ενώ το συσσωμάτωμα βλήμα - Σ_1 εκτελεί επιβραδυνόμενη. Η μέγιστη απόστασή τους, άρα και η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου θα συμβεί όταν τα τρία σώματα αποκτήσουν την ίδια ταχύτητα, η οποία προκύπτει από την ΑΔΟ, μεταξύ της θέσης που το Σ_2 εγκαταλείπει τον τοίχο (Δ) και της θέσης μέγιστης παραμόρφωσης (Ε). Επειδή οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι συντηρητικές, το συσσωμάτωμα $m+m_1$ στη θέση Δ έχει την ίδια κινητική ενέργεια που είχε αμέσως μετά την κρούση, θέση (Β)

$$p_{\text{αρχ}} = p_{\text{τελ}} \Rightarrow (m+m_1)V = (m+m_1)v + m_2v \Rightarrow v = 2,5\text{m/s}$$

Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας για το σύστημα μαζών - ελατηρίου

$$\frac{1}{2}(m+m_1)V^2 = \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}(m+m_1)v^2 + \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \Rightarrow x_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{4}\text{m}$$

και η μέγιστη δύναμη του ελατηρίου κατά την απομάκρυνση των σωμάτων από τον τοίχο είναι

$$F_{\text{ελ.,max}} = kx_{\max} = 50\sqrt{2}\text{N}$$

δ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που μετατράπηκε σε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$\pi\% = \frac{\frac{1}{2}kx_{\max}^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} 100\% = 2,5\%$$

7.Δ.55

Α. α. Η ταχύτητα του Σ_1 πριν την κρούση είναι μέγιστη για την ταλάντωση που εκτελεί και ισούται με

$$v_1 = v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \Delta L \Rightarrow v_1 = 2 \text{ m/s}$$

β. Η κρούση είναι κεντρική ελαστική και οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -1 \text{ m/s}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \Rightarrow v_2' = 1 \text{ m/s}$$

Β. α. Αφού το Σ_1 , διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του για 3η φορά, έχει περάσει μετά την κρούση, χρονικό διάστημα

$$\Delta t_1 = \frac{3T}{2} = 3\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{3\pi}{10} \text{ s}$$

Σε αυτό το χρονικό διάστημα το Σ_2 έχει διανύσει διάστημα $2d$ με ταχύτητα σταθερού μέτρου, άρα

$$2d = v_2' \Delta t_1 \Rightarrow d = \frac{3\pi}{20} \text{ m}$$

β. Μετά τη 2^η ελαστική κρούση η ταχύτητα του Σ_1 είναι

$$v_1'' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} |v_1'| + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} (-v_2') \Rightarrow v_1'' = -2 \text{ m/s}$$

Η ταχύτητα του Σ_1 μετά τη 2η κρούση είναι μέγιστη για την ταλάντωση που ακολουθεί και το πλάτος της ταλάντωσης προκύπτει ίσο με

$$|v_1'| = \omega A' = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A' \Rightarrow A' = |v_1'| \sqrt{\frac{m_1}{k}} = 0,2 \text{ m}$$

γ. Μετά τη 2^η ελαστική κρούση η ταχύτητα του Σ_2 είναι

$$v_2'' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} |v_1'| + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} (-v_2') \Rightarrow v_2'' = 0$$

Άρα η 3^η κρούση θα γίνει πάλι στη Θ.Ι. σε χρονικό διάστημα

$$\Delta t_2 = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m_1}{k}} = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

7.Δ.56

α. Ο αποχωρισμός του Σ_1 από το Σ_2 θα γίνει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, γιατί έπειτα το Σ_2 εκτελεί ομαλή κίνηση, ενώ το Σ_1 επιβραδυνόμενη. Οπότε ο αποχωρισμός γίνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = T/4$, άρα

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \Rightarrow \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \Rightarrow m_1 + m_2 = 4 \text{ kg} \quad (1)$$

Η ταχύτητα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 πριν τον αποχωρισμό είναι η μέγιστη της ταλάντωσης και ισούται με

$$v_1 = v_{\max} = \omega_1 A_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A_1 \quad (2)$$

Το Σ_1 μετά τον αποχωρισμό θα έχει την ίδια μέγιστη ταχύτητα, αλλά διαφορετική γωνιακή συχνότητα και πλάτος ταλάντωσης, έτσι με τη βοήθεια και των σχέσεων (1), (2) και των πλάτων που παίρνουμε από το διάγραμμα, έχουμε

$$v_1 = v_{\max} = \omega_2 A_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} A_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{m_1 + m_2}} 0,4 = \sqrt{\frac{1}{m_1}} 0,2 \Rightarrow$$

$$m_1 = 1 \text{ kg} \quad \text{και} \quad m_2 = 3 \text{ kg}$$

Η ταχύτητα των σωμάτων πριν τον αποχωρισμό είναι $v_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} A_2 = 2 \text{ m/s}$.

β. Το μέτρο της δύναμης που ασκείται μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 τη στιγμή $t=0$ s είναι η συνολική δύναμη που δέχεται το Σ_2

$$F_{1,2} = -D_2 x = -m_2 \omega^2 x = -m_2 \frac{k}{m_1 + m_2} x \Rightarrow F_{1,2} = -3 \frac{100}{1+3} \cdot (-0,4) (\text{SI}) \Rightarrow F_{1,2} = 30 \text{ N}$$

γ. Από την εξίσωση της ταλάντωσης του Σ_1 μετά τον αποχωρισμό, με αντικατάσταση τη χρονική στιγμή $(14\pi/40)\text{s}$, βρίσκουμε τη θέση x της κρούσης

$$x = A_2 \eta \mu \omega_2 \Delta t = 0,2 \eta \mu \sqrt{\frac{k}{m_1}} \left(\frac{14\pi}{40} - \frac{\pi}{10} \right) = 0,2 \eta \mu 2,5\pi = 0,2 \text{ m}$$

Άρα, το Σ_1 τη στιγμή της κρούσης είναι σε ακραία θέση και είναι ακίνητο.

δ. Από την ΑΔΕΤ και το νέο πλάτος ταλάντωσης που γνωρίζουμε από το διάγραμμα βρίσκουμε την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την πλαστική κρούση

$$\frac{1}{2} k A_3^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow V = \frac{3}{4} \text{ m/s}$$

Η ΑΔΟ για την πλαστική κρούση δίνει την ταχύτητα του Σ_2 πριν την πλαστική κρούση

$$p_{\alpha\gamma\lambda} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_2 |v_2'| = (m_1 + m_2) V \Rightarrow |v_2'| = 1 \text{ m/s} \Rightarrow v_2' = -1 \text{ m/s}$$

Αυτή είναι η ταχύτητα του Σ_2 μετά την ελαστική κρούση με το Σ_3 και από αυτήν προκύπτει η μάζα του Σ_3

$$v_2' = \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v_1 \Rightarrow -1 \text{ m/s} = \frac{3 \text{ kg} - m_3}{3 \text{ kg} + m_3} 2 \text{ m/s} \Rightarrow m_3 = 9 \text{ kg}$$

7.Δ.57

α. Το πλάτος της ταλάντωσης προκύπτει από τη μέγιστη ταχύτητα

$$v = v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \Rightarrow A = v \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,6 \text{ m}$$

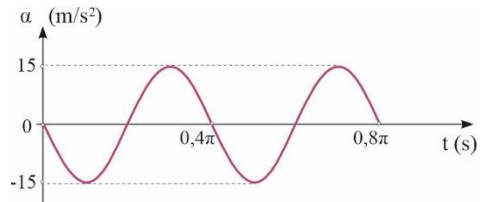
β. Η ταλάντωση δεν έχει αρχική φάση, καθώς τη στιγμή $t=0$ ς το σώμα ξεκινάει από τη θέση ισορροπίας και κινείται προς τα θετικά. Άρα, η εξίσωση της επιτάχυνσης είναι

$$\alpha = -\alpha_{\max} \eta \mu \omega t = -\omega^2 A \eta \mu \omega t = -\frac{k}{m} A \eta \mu \sqrt{\frac{k}{m}} t \Rightarrow$$

$$\alpha = -15 \eta \mu 5t \quad (\text{S.I.})$$

Η περίοδος της ταλάντωσης ισούται με $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,4\pi \text{ s}$

και το διάγραμμα της συνάρτησης της επιτάχυνσης δείχνεται στο σχήμα.



γ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης είναι

$$\left| \frac{dU}{dt} \right| = \left| -\frac{dW_{F, \epsilon\pi}}{dt} \right| = |F_{\epsilon\pi} v| = |kxv| \quad (1)$$

Η δυναμική ενέργεια γίνεται ίση με το $1/3$ της κινητικής ενέργειας στις θέσεις που προκύπτουν από την ΑΔΕΤ

$$E = U + K \Rightarrow E = U + 3U \Rightarrow \frac{1}{2} DA^2 = 4 \frac{1}{2} Dx^2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} A = \pm 0,3 \text{ m}$$

και η ταχύτητα σ' αυτές τις θέσεις είναι

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v = \pm \sqrt{\frac{k A^2 - k x^2}{m}} = \pm \frac{A}{2} \sqrt{\frac{3k}{m}} \Rightarrow$$

$$v = \pm 1,5\sqrt{3}m/s$$

Η σχέση (1) με αντικατάσταση δίνει $\left| \frac{dU}{dt} \right| = |kxv| = 180\sqrt{3}J/s$.

δ. Παίρνουμε τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας για τη σανίδα ως προς το Α και βρίσκουμε

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow N_B L - w_1 \frac{L}{2} - mg \left(\frac{L}{2} + x \right) = 0 \Rightarrow$$

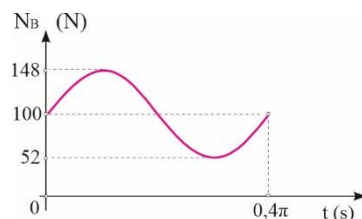
$$N_B = w_1 \frac{1}{2} + mg \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L} \right) \Rightarrow$$

$$N_B = 20 + 80(1 + x) = 100 + 80x \quad (2) \quad -0,6m \leq x \leq 0,6m$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι $x = A \eta \mu \omega t = 0,6 \eta \mu 5t$ (S.I.)

και η (2) δίνει $N_B = 100 + 80x = 100 + 48 \eta \mu 5t$ (S.I.)

με το διάγραμμα της να δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



7.Δ.58

α. Τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σφαιρών όταν αυτές αποχωρίζονται το ελατήριο συνδέονται με τη σχέση που προκύπτει από την ΑΔΟ, αφού το σύστημα ελατηρίου - σωμάτων είναι μονωμένο

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = 3v_1 \quad (1)$$

Ο λόγος των κινητικών ενεργειών K_1/K_2 των σφαιρών Σ_1, Σ_2 είναι

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 v_1^2}{\frac{1}{2} m_2 v_2^2} = \frac{1}{3}$$

β. Η αρχή διατήρησης της ενέργειας δίνει για την κίνηση των δύο σφαιρών, μέχρι το ελατήριο να έρθει στη θέση φυσικού μήκους του

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \Rightarrow 96 = \frac{1}{2} 3 v_1^2 + \frac{1}{2} 9 v_1^2 \Rightarrow v_1 = 4m/s$$

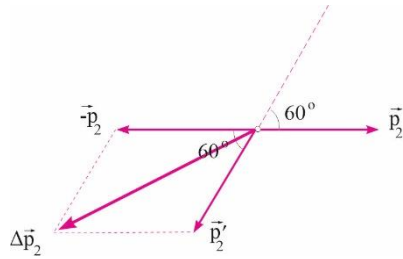
και $v_2 = 12m/s$.

γ. Η μεταβολή του μέτρου της ορμής της σφαίρας Σ_2 είναι

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 = \vec{p}_2' + (-\vec{p}_2)$$

Το μέτρο της Δp_2 είναι

$$\begin{aligned} |\Delta p_2| &= \sqrt{p_{\alpha\rho\chi}^2 + p_{\tau\epsilon\lambda}^2 + 2p_{\alpha\rho\chi}p_{\tau\epsilon\lambda}\cos 60^\circ} = \\ &= \sqrt{|p_2|^2 + |p_2|^2 + 2|p_2||p_2|\cos 60^\circ} \Rightarrow \\ |\Delta p_2| &= |p_2|\sqrt{3} = m_2 v_2 \sqrt{3} \Rightarrow \\ |\Delta p_2| &= 12\sqrt{3} \text{ kgm/s} \end{aligned}$$



δ. Η ΑΔΟ για την πλαστική κρούση δίνει

$$\begin{aligned} p_{\alpha\rho\chi} &= p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos 120^\circ} = (m_1 + m_2)V \Rightarrow \\ \sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2 + 2m_1v_1m_2v_2\cos 120^\circ} &= (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = 3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

ε. Για να συμβαίνουν οι κρούσεις του Σ_3 στο ίδιο σημείο και μετά από χρονικό διάστημα $T/2$ βγαίνει το συμπέρασμα ότι η επόμενη κρούση γίνεται στη Θ.Ι. της ταλάντωσης του Σ_3 και ότι το συσσωμάτωμα $\Sigma_1 + \Sigma_2$ έμεινε ακίνητο μετά την ελαστική κρούση, άρα έγινε ανταλλαγή ταχυτήτων και κατά συνέπεια για τις μάζες ισχύει

$$m_3 = m_1 + m_2 = 4 \text{ kg}$$

στ. Το Σ_3 μετά την ελαστική κρούση έχει ταχύτητα $v_3 = V = 3 \text{ m/s}$, που είναι μέγιστη ταχύτητα για την πρώτη του ταλάντωση και το πλάτος της είναι

$$v_3 = v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k_2}{m_3}} A \Rightarrow A = V \sqrt{\frac{m_3}{k_2}} = 6 \sqrt{\frac{1}{k_2}} \text{ (SI)}$$

Η ΑΔΟ για την πλαστική κρούση δίνει την ταχύτητα του ολικού συσσωματώματος μετά την πλαστική κρούση

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_3 |v_3| = (m_{12} + m_3) V' \Rightarrow V' = 1,5 \text{ m/s}$$

Αυτή η ταχύτητα είναι πάλι μέγιστη για τη νέα ταλάντωση, αφού την έχει το συσσωμάτωμα στη Θ.Ι. και το νέο πλάτος είναι

$$V' = \omega' A' = \sqrt{\frac{k_2}{m_{12} + m_3}} A' \Rightarrow A' = V' \sqrt{\frac{m_{12} + m_3}{k_2}} \Rightarrow A' = 3 \sqrt{\frac{2}{k_2}} \text{ (SI)}$$

και ο λόγος των πλατών των δύο ταλαντώσεων είναι

$$\frac{A'}{A} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{k_2}}}{6\sqrt{\frac{1}{k_2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

7.Δ.59

α. Για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που πρόκειται να ακολουθήσει ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g - k \Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow k \Delta \ell_0 = m_1 g \quad (1)$$

Από την ισορροπία του Σ_1 προκύπτει η τάση του νήματος

$$\Sigma F_1 = 0 \Rightarrow m_1 g + F_{\epsilon\lambda} = T \Rightarrow T = k(x_1 - \Delta \ell_0) + m_1 g \Rightarrow$$

$$T = kx_1 = 4\sqrt{3}N$$

Παίρνουμε τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας για τον δίσκο ως προς το κέντρο του και βρίσκουμε τη γωνία ϕ

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow m_2 g R \eta \mu \phi - TR = 0 \Rightarrow \eta \mu \phi = \frac{TR}{m_2 g R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \phi = 60^\circ$$

β. Αφού τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s το σώμα ξεκινάει να κινείται χωρίς ταχύτητα, βρίσκεται σε ακραία θέση και η ταλάντωση θα έχει πλάτος $A = x_1$ και αρχική φάση $\pi/2$ rad.

Η εξίσωσης της απομάκρυνσης είναι

$$x = A \eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = 0,1\sqrt{3} \eta \mu \left(\sqrt{\frac{k}{m_1}} t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$x = 0,1\sqrt{3} \eta \mu \left(20t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (S.I.)}$$

Τη στιγμή t_1 η απομάκρυνση είναι

$$x_1 = 0,1\sqrt{3} \eta \mu \left(20t_1 + \frac{\pi}{2} \right) = 0,1\sqrt{3} \eta \mu \left(20 \frac{4\pi}{15} + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow x_1 = -\frac{0,1\sqrt{3}}{2} \text{ m} = -\frac{A}{2}$$

Ο λόγος της κινητικής ενέργειας του Σ_1 προς τη δυναμική ενέργεια είναι

$$\frac{K}{U} = \frac{E_T - U}{U} = \frac{\frac{1}{2} D A^2 - \frac{1}{2} D x_1^2}{\frac{1}{2} D x_1^2} = \frac{A^2 - (-A/2)^2}{(-A/2)^2} \Rightarrow \frac{K}{U} = 3$$

γ. Η δύναμης επαναφοράς είναι συντηρητική δύναμη, οπότε το έργο της ισούται με το αντίθετο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας. Άρα

$$W_{F,επ} = -\Delta U = U_{αρχ} - U_{τελ} \Rightarrow W_{F,επ} = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \Rightarrow W_{F,επ} = 0,45J$$

δ. Από τη στροφορμή του Σ_2 προκύπτει η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου

$$L = m_2 v_2 R = m_2 \omega R^2 \Rightarrow \omega = \frac{L}{m_2 R^2} \Rightarrow \omega = 50 \text{ rad/s}$$

7.Δ.60

α. Παίρνουμε τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας για τη ράβδο ως προς το Κ και βρίσκουμε την τάση του νήματος

$$\Sigma \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow m_1 g \frac{3\ell}{4} \eta \mu \theta + Mg \frac{\ell}{4} \eta \mu \theta - T \frac{\ell}{4} \eta \mu \theta = 0 \Rightarrow$$

$$T = 3m_1 g + Mg = 40N$$

β. Για τη θέση ισορροπίας της ράβδου ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1 g + Mg + T = F_K \Rightarrow F_K = 60N$$

γ. Στην αρχική θέση ισορροπίας του Σ_2 το ελατήριο είναι επιμηκυμένο από το φυσικό του μήκος κατά $\Delta \ell_0$ που είναι ίσο με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g + k \Delta \ell_0 - T = 0 \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{T - m_2 g}{k} = 0,1m$$

Στη νέα θέση ισορροπίας του συστήματος το ελατήριο είναι συμπιεσμένο από το φυσικό του μήκος κατά $\Delta \ell_2$ που είναι ίσο με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g - k \Delta \ell_2 = 0 \Rightarrow k \Delta \ell_2 = m_2 g \Rightarrow \Delta \ell_2 = \frac{m_2 g}{k} = 0,1m$$

Αφού τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ το σώμα ξεκινάει να κινείται χωρίς ταχύτητα, βρίσκεται σε ακραία θέση και η ταλάντωση θα έχει πλάτος $A = \Delta \ell_0 + \Delta \ell_2 = 0,2m$ και αρχική φάση $\pi/2 \text{ rad}$, αφού

$$x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow A = A \eta \mu \varphi_0 \Rightarrow \eta \mu \varphi_0 = 1 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Η εξίσωσης της απομάκρυνσης είναι

$$x = A\eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0,2\eta\mu\left(\sqrt{\frac{k}{m_2}}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x = 0,2\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

Η ταχύτητα του Σ_2 σε σχέση με τον χρόνο είναι

$$v = v_{\max}\sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega A\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$v = 2\sigma\upsilon\nu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

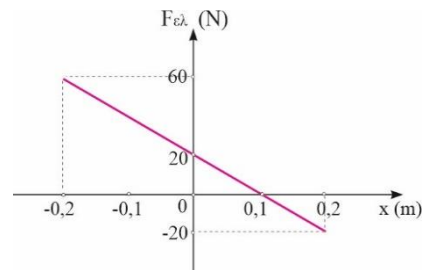
Η κινητική ενέργεια του Σ_2 σε σχέση με τον χρόνο είναι

$$K = \frac{1}{2}m_2v^2 = \frac{1}{2}m_2v_{\max}^2\sigma\upsilon\nu^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow K = 4\sigma\upsilon\nu^2\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

δ. Στην τυχαία απομάκρυνση x πάνω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης το ελατήριο είναι παραμορφωμένο από το φυσικό του μήκος κατά $\Delta\ell_2 - x$ και η δύναμη του ελατηρίου θα είναι (έχουμε πάρει θετικά προς τα πάνω)

$$F_{ελ} = k(\Delta\ell_2 - x) \Rightarrow F_{ελ} = 20 - 200x \quad (\text{S.I.}), \quad -0,2\text{m} \leq x \leq 0,2\text{m}$$

με το διάγραμμά της να δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



ε. Η συνολική ροπή που δέχεται το σύστημα ράβδου - Σ_1 είναι

$$\Sigma\tau_{(K)} = m_1g\frac{3\ell}{4}\eta\mu\theta + Mg\frac{\ell}{4}\eta\mu\theta \Rightarrow \Sigma\tau_{(K)} = 5\sqrt{3}\text{Nm}$$

7.Δ.61

α. Παίρνουμε τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας για το γιο-γιο ως προς το κέντρο του και είναι

$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T_2R - T_1R = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 \quad (1)$$

Από τη μεταφορική του ισορροπία προκύπτει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow Mg = T_2 + T_1 \Rightarrow T_1 = T_2 = 60\text{N}$$

Από την ισορροπία του Σ προκύπτει η επιμήκυνση του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg + T_1 = F_{ελ} \Rightarrow \Delta\ell_0 = \frac{T_1 + mg}{k} = 0,3\text{m}$$

β. Όταν κοπεί το νήμα, το Σ αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση γύρω από νέα Θ.Ι. που βρίσκεται πιο κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου κατά $\Delta\ell_1$

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell_1 = 0 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{mg}{k} = 0,1\text{m}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης ισούται με

$$A = \Delta\ell_0 - \Delta\ell_1 = 0,2\text{m}$$

Τη στιγμή $t=0\text{s}$ το σφαιρίδιο Σ_2 ξεκινάει να κινείται από την ακραία θετική θέση, άρα υπάρχει αρχική φάση

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{rad}$$

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα είναι } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{rad/s}.$$

$$\text{Η εξίσωση της απομάκρυνσης είναι } x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) \text{ (S.I.)}.$$

Τη χρονική στιγμή $t=\pi/30\text{s}$ η απομάκρυνση είναι

$$x = 0,2\eta\mu(10t + \frac{\pi}{2}) = 0,2\eta\mu(10 \cdot \frac{\pi}{30} + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x = 0,1\text{m}$$

Η δύναμη επαναφοράς εκείνη τη στιγμή είναι

$$F = -kx = -30\text{N}$$

ενώ η δύναμη του ελατηρίου εκείνη τη στιγμή είναι

$$F_{ελ} = -k(\Delta\ell_1 + x) = -60\text{N}$$

Άρα, ο λόγος της δύναμης του ελατηρίου προς τη δύναμη επαναφοράς είναι

$$\frac{F_{ελ}}{F} = 2$$

γ. Για το γιο-γιο που κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση, ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του

$$\Sigma F = M\alpha_{cm} \Rightarrow Mg - T = M\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{Mg - T}{M} = \frac{20}{3} \text{m/s}^2$$

και η γωνιακή επιτάχυνση του γιο-γιο είναι

$$\alpha_{\text{cm}} = \alpha_{\text{γων}} R \Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} = \frac{200}{3} \text{ rad/s}^2$$

δ. Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του γιο-γιο είναι

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dW_w}{dt} = -Mg v_{\text{cm}} \quad (2)$$

Το γιο-γιο έχει μετατοπιστεί σε χρόνο t , κατά y που ισούται με

$$y = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t^2 \Rightarrow t = 0,3 \text{ s}$$

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του γιο-γιο είναι

$$v_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} t = 2 \text{ m/s}$$

και η σχέση (2) δίνει

$$\frac{dU}{\Delta t} = -Mg v_{\text{cm}} = -240 \text{ J/s}$$

7.Δ.62

α. Για το σώμα Σ_1 , που κατεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση, ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει την τάση του νήματος

$$\Sigma F_1 = m_1 a_1 \Rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \Rightarrow T_1 = 6 \text{ N}$$

Για τη μεταφορική ισορροπία της τροχαλίας ισχύει

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow Mg + T = F_{\kappa} \Rightarrow F_{\kappa} = 36 \text{ N}$$

β. Η απόσταση h προκύπτει από τον χρόνο t

$$h = \frac{1}{2} \alpha_1 t^2 \Rightarrow h = 2 \text{ m}$$

Η επιτάχυνση α_1 ισούται με τη γραμμική επιτάχυνση της τροχαλίας, από την οποία προκύπτει η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας

$$\alpha_{\gamma\pi} = \frac{dv_{\gamma\pi}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \alpha_{\text{γων}} \Rightarrow \alpha_{\text{γων}} = \frac{\alpha_{\gamma\pi}}{R} = \frac{\alpha_1}{R} = 20 \text{ rad/s}^2$$

Η γωνία που διαγράφει η τροχαλία στον ίδιο χρόνο είναι

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 = 10 \text{ rad}$$

και ο αριθμός των περιστροφών της τροχαλίας είναι

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{5}{\pi} \text{ στροφές}$$

γ. Το σώμα Σ_1 συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με το σώμα Σ_2 έχοντας ταχύτητα

$$v_1 = \alpha_1 t = 4 \text{ m/s}$$

Η ΑΔΟ δίνει την ταχύτητα του συσσωματώματος

$$p_{\alpha\gamma\chi} = p_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow V = 1 \text{ m/s}$$

Η αρχική θέση ισορροπίας του συστήματος Σ_2 - k είναι κάτω από το φυσικό μήκος του ελατηρίου κατά $\Delta \ell_0$ που βρίσκεται από τη σχέση

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_2 g - k \Delta \ell_0 = 0 \Rightarrow k \Delta \ell_0 = m_2 g \quad (1)$$

Μετά την πλαστική κρούση, η νέα θέση ισορροπίας είναι πιο κάτω από την αρχική κατά x_1 , που ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2) g - k (\Delta \ell_0 + x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} x_1 = \frac{m_1 g}{k} = 0,05 \text{ m}$$

Η θέση της κρούσης βρίσκεται σε απομάκρυνση x_1 για την ταλάντωση που ακολουθεί και η ΑΔΕΤ δίνει

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_1^2 + \frac{(m_1 + m_2)}{k} V^2} \Rightarrow A = 0,15 \text{ m}$$

δ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_1 είναι

$$\left| \frac{dp_1}{dt} \right| = |\Sigma F_1| = |m_1 \alpha_1| = m_1 \omega^2 x = m_1 \frac{k}{m_1 + m_2} x \Rightarrow \left| \frac{dp_1}{dt} \right| = 5 \text{ kgm/s}^2$$

7.Δ.63

Α. Από τη συνθήκη ισορροπίας του Σ_1 προκύπτει

$$\Sigma F_1 = 0 \Rightarrow m_1 g = T_1 \Rightarrow T_1 = 40 \text{ N}$$

Από τη συνθήκη στροφικής ισορροπίας της τροχαλίας προκύπτει

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow T_1 R_1 = T_2 R_2 \Rightarrow T_2 = 20 \text{ N}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του Σ_2 προκύπτει

$$\Sigma F_2 = 0 \Rightarrow m_2 g + T_3 = T_2 \Rightarrow T_3 = 10 \text{ N}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του Σ_3 προκύπτει

$$\Sigma F_3 = 0 \Rightarrow m_3 g = T_3 \Rightarrow m_3 = 1 \text{ kg}$$

Β. α. Η ταχύτητα μηδενίζεται για 5^η φορά τη στιγμή $t=2,5T$.

$$\text{Η περίοδος της ταλάντωσης είναι ίση με } T = 2\pi \sqrt{\frac{m_3}{k}} = 0,8 \text{ s}, \text{ άρα } t=2,5T=2 \text{ s.}$$

Το Σ_2 κάνει ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τα πάνω και τη χρονική στιγμή 2s, έχει ταχύτητα 8m/s, οπότε $v_2 = a_2 t \Rightarrow a_2 = 4 \text{ m/s}^2$

β. Η εξίσωση της ταλάντωσης του Σ_3 είναι της μορφής $x = A \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$.

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του Σ_1 βρίσκεται κάτω από το φυσικό του μήκος κατά

$$x_1 = \frac{m_3 g}{k} = 0,16 \text{ m},$$

που είναι και το πλάτος ταλάντωσης, άρα $A=0,16 \text{ m}$.

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα είναι ίση με } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2,5 \pi \text{ rad/s}.$$

Την $t_0=0 \text{ s}$ το σώμα ξεκινά από το $x=+A$, οπότε $\varphi_0=\pi/2 \text{ rad}$, άρα

$$x = 0,16 \eta \mu\left(2,5\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Με αριθμητική αντικατάσταση $t=2/3 \text{ s}$ προκύπτει

$$x = 0,16\mu(2,5\pi\frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}) = 0,16\mu\frac{13\pi}{6} \Rightarrow x = 0,08\text{m}$$

$$\gamma. \frac{dK}{dt} = F_{\varepsilon\pi} \cdot v = -kxv$$

Την $t_0=0\text{s}$ το σώμα βρίσκεται στο $x=+A$ και έχει μηδενική ταχύτητα, οπότε με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση προκύπτει $\frac{dK}{dt} = 0\text{J/s}$.

7.Δ.64

A. Από την ισορροπία του Σ_1 έχουμε

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_1g - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow m_1g - k\Delta\ell_0 = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = m_1g = 5\text{N} \quad (1)$$

Παίρνουμε τη συνθήκη στρεφικής ισορροπίας για τη ράβδο ως προς το A και βρίσκουμε την τάση του νήματος

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T\frac{3L}{4} - Mg\frac{L}{2} - F_{\varepsilon\lambda}L = 0 \Rightarrow 3T = 2Mg + 4m_1g \Rightarrow T = 20\text{N}$$

Από τη μεταφορική ισορροπία της ράβδου προκύπτει η δύναμη που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} + Mg = F_A + T \Rightarrow F_A = 5\text{N}$$

Η δύναμη που ασκεί η ράβδος στην άρθρωση είναι αντίθετη της F_A , δηλαδή έχει μέτρο 5N και φορά προς τα κάτω.

B. α. Παίρνουμε τη συνθήκη στρεφικής ισορροπίας για τη ράβδο ως προς το A και βρίσκουμε τη δύναμη του ελατηρίου όταν η τάση του νήματος γίνει οριακά μηδέν

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow Mg\frac{L}{2} + F'_{\varepsilon\lambda}L = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} = -\frac{Mg}{2} = -10\text{N}$$

Άρα εκείνη τη στιγμή, η δύναμη του ελατηρίου έχει φορά προς τα πάνω και το ελατήριο θα είναι συμπιεσμένο κατά

$$|F'_{\varepsilon\lambda}| = k\Delta\ell_1 \Rightarrow \Delta\ell_1 = \frac{|F'_{\varepsilon\lambda}|}{k} = 0,1\text{m}$$

Μετά την πλαστική κρούση, η νέα θέση ισορροπίας είναι πιο κάτω από την παλιά κατά x_1 , που ισούται με

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2)g - k(\Delta \ell_0 + x_1) = 0 \xrightarrow{(1)} x_1 = \frac{m_2 g}{k} = 0,05 \text{ m}$$

Η σχέση (1) δίνει

$$F_{ελ} = m_1 g \Rightarrow k \Delta \ell_0 = m_1 g \Rightarrow \Delta \ell_0 = \frac{m_1 g}{k} = 0,05 \text{ m}$$

Η ταλάντωση θα έχει πλάτος $A = \Delta \ell_0 + \Delta \ell_1 + x_1 = 0,2 \text{ m}$.

β. Η θέση της κρούσης βρίσκεται σε απομάκρυνση x_1 για την ταλάντωση που ακολουθεί και η ΑΔΕΤ δίνει

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2} (A^2 - x_1^2)} = \sqrt{3,75} \text{ m/s}$$

Η ΑΔΟ δίνει την ταχύτητα του Σ_2

$$p_{apx} = p_{τελ} \Rightarrow m_1 v_0 = (m_1 + m_2) V \Rightarrow v_0 = 2\sqrt{3,75} \text{ m/s}$$

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος είναι

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{F,επ}}{dt} = F_{επ} v = -kxv \quad (2)$$

Η απομάκρυνση όταν το συσσωμάτωμα ανερχόμενο θα διέλθει από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, αν θεωρήσουμε τα θετικά προς τα πάνω, είναι

$$x = \Delta \ell_0 + x_1 = 0,1 \text{ m}$$

και η θετική ταχύτητα σ' αυτή τη θέση είναι

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m_{ολ} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k A^2 - k x^2}{m_{ολ}}} \Rightarrow v = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

Η σχέση (2) με αντικατάσταση δίνει $\frac{dK}{dt} = -kxv = -10\sqrt{3} \text{ J/s}$.