

Θέματα Β

8.B.1

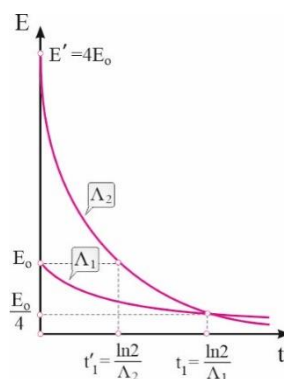
Επειδή ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους είναι σταθερός, κάθε t_1 το πλάτος γίνεται μισό. Άρα τη στιγμή $2t_1$ το πλάτος γίνεται $A_0/4$ και τη στιγμή $3t_1$ το πλάτος γίνεται $A_0/8$.

Όταν το πλάτος υποδιπλασιάζεται η ενέργεια υποτετραπλασιάζεται, αφού $E = \frac{1}{2}DA^2$ και η κουκίδα 3 πρέπει να βρίσκεται σε σημείο που αντιστοιχεί σε $E_0/4$ και η κουκίδα 4 σε σημείο που αντιστοιχεί σε $E_0/16$.

8.B.2

Ο διπλασιασμός του αρχικού πλάτους σημαίνει τον τετραπλασιασμό της αρχικής ενέργειας αφού $E = \frac{1}{2}DA^2$. Ο διπλασιασμός της σταθεράς Λ σημαίνει τον υποδιπλασιασμό του χρόνου που το πλάτος γίνεται μισό και η ενέργεια $1/4$ της αρχικής. Ο χρόνος αυτός ισούται με

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow e^{-\Lambda t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\Lambda t_1} = 2 \Rightarrow \ln e^{\Lambda t_1} = \ln 2 \Rightarrow \Lambda t_1 = \ln 2 \Rightarrow t_1 = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$



8.B.3 β.

Αν A_k και A_{k+1} είναι τα πλάτη μετά από k και $k+1$ περιόδους αντίστοιχα, η μείωση του πλάτους ανά περίοδο είναι

$$|\Delta A| = A_k - A_{k+1} = A_0 e^{-\Lambda k T} - A_0 e^{-\Lambda (k+1) T} \Rightarrow |\Delta A| = A_0 e^{-\Lambda k T} (1 - e^{-\Lambda T})$$

Ο όρος $1 - e^{-\Lambda T}$ είναι χρονικά σταθερός, αφού Λ , T σταθερές, αλλά ο όρος $A_0 e^{-\Lambda k T}$ που ισούται με το πλάτος, διαρκώς μικραίνει όσο μεγαλώνει το k , δηλαδή με την πάροδο του χρόνου, άρα η μείωση του πλάτους από περίοδο σε περίοδο μειώνεται.

8.B.4 α.

Α' τρόπος

$$\pi\% = \frac{A_k - A_{k+1}}{A_k} 100\% = \left(1 - \frac{A_{k+1}}{A_k}\right) 100\%$$

Όμως ο λόγος των διαδοχικών πλατών είναι σταθερός

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_{\kappa+1}}{A_{\kappa}} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Άρα το ποσοστό μείωσης του πλάτους από περίοδο σε περίοδο μένει σταθερό.

Β' τρόπος

Αν A_{κ} και $A_{\kappa+1}$ είναι τα πλάτη μετά από κ και $\kappa+1$ περιόδους αντίστοιχα, το ποσοστό μείωσης του πλάτους από περίοδο σε περίοδο είναι

$$\pi\% = \frac{A_{\kappa} - A_{\kappa+1}}{A_{\kappa}} 100\% = \frac{A_0 e^{-\Lambda\kappa T} - A_0 e^{-\Lambda(\kappa+1)T}}{A_0 e^{-\Lambda\kappa T}} 100\% = (1 - e^{-\Lambda T}) 100\%$$

Ο όρος $1 - e^{-\Lambda T}$ είναι χρονικά σταθερός, αφού Λ , T σταθερές, Άρα το ποσοστό μείωσης του πλάτους από περίοδο σε περίοδο μένει σταθερό.

8.B.5 γ.

Η συνάρτηση της ενέργειας της ταλάντωσης με τον χρόνο είναι

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\Lambda t})^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t}$$

Αν E_{κ} και $E_{\kappa+1}$ είναι οι ενέργειες μετά από κ και $\kappa+1$ περιόδους αντίστοιχα, ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών της ενέργειας ταλάντωσης, ανά περίοδο είναι

$$\frac{E_{\kappa}}{E_{\kappa+1}} = \frac{E_0 e^{-2\Lambda\kappa T}}{E_0 e^{-2\Lambda(\kappa+1)T}} = e^{2\Lambda T}$$

και είναι σταθερός αφού Λ , T σταθερές.

8.B.6 γ.

Ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας της ταλάντωσης είναι

$$\left| \frac{dE}{dt} \right| = \left| \frac{dW_{F'}}{\Delta t} \right| = P_{F'} = |F'|v \Rightarrow \left| \frac{dE}{dt} \right| = bv^2$$

Ο μέγιστος ρυθμός μείωσης της ενέργειας είναι $\left(\left| \frac{dE}{dt} \right| \right)_{\max} = bv_{\max}^2$ και επειδή η μέγιστη ταχύτητα

διαρκώς μειώνεται σε μια φθίνουσα ταλάντωση, μειώνεται και ο μέγιστος ρυθμός μείωσης της ενέργειας της ταλάντωσης.

8.B.7 α.

Από το πλάτος της ταλάντωσης μετά από χρονικό διάστημα Δt_1 προκύπτει η σταθερά Λ

$$A_1 = A_0 e^{-\Lambda \Delta t_1} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda \Delta t_1} \Rightarrow e^{-\Lambda \Delta t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\Lambda \Delta t_1} = 2 \Rightarrow$$

$$\ln e^{\Lambda \Delta t_1} = \ln 2 \Rightarrow \Lambda \Delta t_1 = \ln 2 \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{\Delta t_1}$$

Για να γίνει το πλάτος της ταλάντωσης από A_0 ίσο με $A_0/4$ απαιτείται χρονικό διάστημα t_2

$$A_2 = A_0 e^{-\Lambda t_2} \Rightarrow \frac{A_0}{4} = A_0 e^{-\Lambda t_2} \Rightarrow e^{-\Lambda t_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow e^{\Lambda t_2} = 4 \Rightarrow$$

$$\ln e^{\Lambda t_2} = \ln 2^2 \Rightarrow \Lambda t_2 = 2 \ln 2 \Rightarrow t_2 = \frac{2 \ln 2}{\Lambda} = \frac{2 \ln 2}{\frac{\ln 2}{\Delta t_1}} \Rightarrow t_2 = 2 \Delta t_1$$

Για να γίνει το πλάτος της ταλάντωσης από A_0 ίσο με $A_0/8$ απαιτείται χρονικό διάστημα t_3

$$A_3 = A_0 e^{-\Lambda t_3} \Rightarrow \frac{A_0}{8} = A_0 e^{-\Lambda t_3} \Rightarrow e^{-\Lambda t_3} = \frac{1}{8} \Rightarrow e^{\Lambda t_3} = 8 \Rightarrow$$

$$\ln e^{\Lambda t_3} = \ln 2^3 \Rightarrow \Lambda t_3 = 3 \ln 2 \Rightarrow t_3 = \frac{3 \ln 2}{\Lambda} = \frac{3 \ln 2}{\frac{\ln 2}{\Delta t_1}} \Rightarrow t_3 = 3 \Delta t_1$$

Άρα, το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μειωθεί το πλάτος ταλάντωσης από $A_0/4$ σε $A_0/8$ είναι

$$\Delta t_2 = t_3 - t_2 = 3 \Delta t_1 - 2 \Delta t_1 = \Delta t_1$$

8.B.8 β.

Ο λόγος δύο διαδοχικών πλατών είναι σταθερός. Άρα

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_{20}}{A_{21}} = \frac{A_{21}}{A_{22}} = 1,2 \quad (1)$$

Ο λόγος A_{20}/A_{22} ισούται με

$$\frac{A_{20}}{A_{22}} = \frac{A_{20}}{A_{21}} \frac{A_{21}}{A_{22}} = 1,2 \cdot 1,2 = 1,44$$

8.B.9 α.

Ο λόγος των πλατών ανά περίοδο μένει σταθερός. Άρα

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} \Rightarrow A_1 = \frac{A_2^2}{A_3} \Rightarrow A_1 = 4,5 \text{ cm}$$

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_0 = \frac{A_1^2}{A_2} \Rightarrow A_0 = 6,75 \text{ cm}$$

$$\frac{A_2}{A_3} = \frac{A_3}{A_4} \Rightarrow A_4 = \frac{A_3^2}{A_2} \Rightarrow A_4 = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

8.B.10 β.

Η ταλάντωση είναι φθίνουσα, άρα η δύναμη αντίστασης που ασκείται στο σώμα δεν είναι μηδενική.

Ο λόγος δύο διαδοχικών πλάτων δεν είναι σταθερός καθώς

$\frac{20}{15} \neq \frac{15}{10} \neq \frac{10}{5}$, έτσι το πλάτος δεν μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο, άρα η δύναμη αντίστασης δεν είναι ανάλογη της ταχύτητας.

8.B.11 β.

Από το πλάτος της ταλάντωσης μετά από χρονικό διάστημα Δt_1 προκύπτει η σταθερά Λ

$$A_1 = A_0 e^{-\Lambda \Delta t_1} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda \Delta t_1} \Rightarrow e^{-\Lambda \Delta t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\Lambda \Delta t_1} = 2 \Rightarrow$$

$$\ln e^{\Lambda \Delta t_1} = \ln 2 \Rightarrow \Lambda \Delta t_1 = \ln 2 \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{\Delta t_1}$$

Για να γίνει το πλάτος της ταλάντωσης ίσο με $A_0/8$ απαιτείται χρονικό διάστημα Δt_2

$$A_2 = A_0 e^{-\Lambda \Delta t_2} \Rightarrow \frac{A_0}{8} = A_0 e^{-\Lambda \Delta t_2} \Rightarrow e^{-\Lambda \Delta t_2} = \frac{1}{8} \Rightarrow e^{\Lambda \Delta t_2} = 8 \Rightarrow$$

$$\ln e^{\Lambda \Delta t_2} = \ln 2^3 \Rightarrow \Lambda \Delta t_2 = 3 \ln 2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{3 \ln 2}{\Lambda} = \frac{3 \ln 2}{\frac{\ln 2}{\Delta t_1}} \Rightarrow \Delta t_2 = 3 \Delta t_1$$

8.B.12 α.

Η συνάρτηση της ενέργειας της ταλάντωσης με τον χρόνο είναι

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\Lambda t})^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t}$$

Από την ενέργεια της ταλάντωσης μετά από χρονικό διάστημα Δt_1 προκύπτει η σταθερά Λ

$$E_1 = E_0 e^{-2\Lambda \Delta t_1} \Rightarrow \frac{E_0}{4} = E_0 e^{-2\Lambda \Delta t_1} \Rightarrow e^{-2\Lambda \Delta t_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow e^{2\Lambda \Delta t_1} = 4 \Rightarrow$$

$$\ln e^{2\Lambda \Delta t_1} = \ln 2^2 \Rightarrow 2\Lambda \Delta t_1 = 2 \ln 2 \Rightarrow \Lambda = \frac{\ln 2}{\Delta t_1}$$

Για να γίνει η ενέργεια της ταλάντωσης ίση με $E_0/16$ απαιτείται χρονικό διάστημα Δt_2

$$E_2 = E_0 e^{-2\Lambda \Delta t_2} \Rightarrow \frac{E_0}{16} = E_0 e^{-2\Lambda \Delta t_2} \Rightarrow e^{-2\Lambda \Delta t_2} = \frac{1}{16} \Rightarrow e^{2\Lambda \Delta t_2} = 16 \Rightarrow$$

$$\ln e^{2\Lambda \Delta t_2} = \ln 2^4 \Rightarrow 2\Lambda \Delta t_2 = 4 \ln 2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{2 \ln 2}{\Lambda} = \frac{2 \ln 2}{\frac{\ln 2}{\Delta t_1}} \Rightarrow \Delta t_2 = 2 \Delta t_1$$

8.B.13 γ.

Ο λόγος E_{10}/E_{12} ισούται με

$$\frac{E_{10}}{E_{12}} = \frac{\frac{1}{2} D A_{10}^2}{\frac{1}{2} D A_{12}^2} = \frac{A_{10}^2}{A_{12}^2} = \left(\frac{A_{10}}{A_{11}} \frac{A_{11}}{A_{12}} \right)^2 \quad (1)$$

Ο λόγος δύο διαδοχικών πλατών είναι σταθερός. Άρα

$$\frac{A_5}{A_6} = \frac{A_{10}}{A_{11}} = \frac{A_{11}}{A_{12}} = 1,1$$

και η σχέση (1) δίνει

$$\frac{E_{10}}{E_{12}} = \left(\frac{A_{10}}{A_{11}} \frac{A_{11}}{A_{12}} \right)^2 = (1,1 \cdot 1,1)^2 = 1,21^2$$

8.B.14 α.

Από τη θερμότητα που ελευθερώνεται προκύπτει το πλάτος της ταλάντωσης μετά από N ταλαντώσεις

$$Q = E_0 - E_1 \Rightarrow 24J = 27J - E_1 \Rightarrow E_1 = 3J = \frac{E_0}{9} \Rightarrow \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{9} \frac{1}{2} D A_0^2 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{3} A_0$$

8.B.15 γ.

Όταν το πλάτος της ταλάντωσης έχει μειωθεί στο $1/4$ της αρχικής του τιμής, η ενέργεια της ταλάντωσης θα είναι

$$E_1 = \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{2} D \left(\frac{A_0}{4} \right)^2 = \frac{1}{16} \frac{1}{2} D A_0^2 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{16} E_0$$

Άρα, η ενέργεια που έχει χάσει ο ταλαντωτής είναι

$$|\Delta E| = E_0 - E_1 = E_0 - \frac{E_0}{16} \Rightarrow |\Delta E| = \frac{15E_0}{16}$$

8.B.16 γ.

Το έργο της αντιτιθέμενης δύναμης ισούται με τη μεταβολή της ενέργειας του ταλαντωτή. Στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_1 - 0$ s είναι

$$W_{F'} = E_1 - E_0 \Rightarrow -48J = E_1 - 64J \Rightarrow E_1 = 16J$$

και για το πλάτος τη στιγμή t_1 προκύπτει

$$E_1 = \frac{1}{4}E_0 \Rightarrow \frac{1}{2}DA_1^2 = \frac{1}{2}D\frac{A_0^2}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{A_0}{2}$$

Τη χρονική στιγμή $2t_1$ το πλάτος θα γίνει πάλι μισό, επειδή ο χρόνος υποδιπλασιασμού του πλάτους είναι σταθερός, αφού αυτός ο χρόνος ισούται με

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow e^{-\Lambda t_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\Lambda t_1} = 2 \Rightarrow \ln e^{\Lambda t_1} = \ln 2 \Rightarrow \Lambda t_1 = \ln 2 \Rightarrow t_1 = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

Άρα τη στιγμή $2t_1$ το πλάτος γίνεται $A_0/4$ και η ενέργεια μειώνεται 16 φορές, άρα $E_2 = E_0/16 = 4J$ και το έργο της αντιτιθέμενης δύναμης ισούται με τη μεταβολή της ενέργειας του ταλαντωτή

$$W_{F'} = E_2 - E_1 = 4J - 16J = -12J$$

8.B.17 β.

Το πλάτος της ταλάντωσης τη στιγμή t_1 είναι

$$A_1 = A_0 e^{-\Lambda t_1} = A_0 e^{-\Lambda \frac{5 \ln 2}{\Lambda}} = \frac{A_0}{e^{5 \ln 2}} = \frac{A_0}{e^{\ln 2^5}} = \frac{A_0}{2^5} \Rightarrow A_1 = \frac{A_0}{32}$$

8.B.18 β.

$$A_1 = A_0 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda 10T} \Rightarrow e^{-10\Lambda T} = \frac{1}{2}$$

και το πλάτος της ταλάντωσης μετά από 30 περιόδους συνολικά είναι

$$A_2 = A_0 e^{-\Lambda t_2} = A_0 e^{-\Lambda 30T} = A_0 (e^{-10\Lambda T})^3 = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow A_2 = \frac{A_0}{8}$$

8.B.19 γ.

Η θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον λόγω των αποσβέσεων ισούται με την αρχική ενέργεια ταλάντωσης. Επομένως για το σώμα Α είναι

$$Q_A = E_A \Rightarrow \frac{1}{2} k_A A_A^2 = 2J \quad (1)$$

Όταν φέρουμε το σώμα στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου και το αφήσουμε να εκτελέσει ταλάντωση, το πλάτος Α ισούται με την απόσταση της θέσης ισορροπίας από το φυσικό μήκος του ελατηρίου. Για τα σώματα Α και Β έχουμε από τη σχέση ισορροπίας:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow m_A g = k_A A_A \quad (2) \text{ και } m_B g = k_B A_B \quad (3)$$

Επειδή $k_A = 2k_B$ και $m_A = m_B$ οι σχέσεις (2) και (3) δίνουν $A_B = 2A_A$ και η θερμότητα που εκλύθηκε στο περιβάλλον λόγω των αποσβέσεων του σώματος Β είναι

$$Q_B = E_B = \frac{1}{2} k_B A_B^2 = \frac{1}{2} \frac{k_A}{2} (2A_A)^2 = 2Q_A \Rightarrow Q_B = 4J$$

8.B.20 β.

Στη θέση που η ταχύτητα μεγιστοποιείται, η συνολική δύναμη μηδενίζεται, καθώς η κίνηση από επιταχυνόμενη γίνεται επιβραδυνόμενη. Άρα

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow |F_{ελ}| = |F'| \Rightarrow kx_1 = b v_{\max} \Rightarrow x_1 = \frac{b v_{\max}}{k}$$

και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

$$U_{ελ} = \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{b v_{\max}}{k} \right)^2 \Rightarrow U_{ελ} = \frac{b^2 v_{\max}^2}{2k}$$

8.B.21 γ.

Από τη θερμότητα που ελευθερώνεται προκύπτει το πλάτος της ταλάντωσης τη στιγμή t_1

$$Q_1 = E_0 - E_1 \Rightarrow \frac{3E_0}{4} = E_0 - E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{E_0}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} D A_1^2 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} D A_0^2 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} A_0$$

$$A_1 = A_0 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow e^{-\Lambda t_1} = \frac{1}{2}$$

και το πλάτος της ταλάντωσης τη στιγμή t_2 είναι

$$A_2 = A_0 e^{-\Lambda t_2} = A_0 e^{-\Lambda 4t_1} = A_0 (e^{-\Lambda t_1})^4 = A_0 \left(\frac{1}{2} \right)^4 \Rightarrow A_2 = \frac{A_0}{16}$$

8.B.22 γ.

Το πλάτος της ταλάντωσης τη στιγμή t_1 είναι $A_1 = A_0 e^{-\Lambda t_1}$ (1)

Από το πλάτος της ταλάντωσης τη στιγμή t_2 προκύπτει

$$A_2 = A_0 e^{-\Lambda t_2} \Rightarrow \frac{A_1}{4} = A_0 e^{-\Lambda 2t_1} = A_0 (e^{-\Lambda t_1})^2 \Rightarrow \frac{A_1}{4} = (A_0 e^{-\Lambda t_1}) e^{-\Lambda t_1} \xrightarrow{(1)} \\ \frac{A_1}{4} = A_1 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow e^{-\Lambda t_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow e^{\Lambda t_1} = 4 \Rightarrow \ln e^{\Lambda t_1} = \ln 4 \Rightarrow \Lambda t_1 = \ln 2^2 \Rightarrow \Lambda = \frac{2 \ln 2}{t_1}$$

8.B.23 β.

Από το πλάτος της ταλάντωσης μετά από 4 περιόδους προκύπτει

$$A_4 = A_0 e^{-\Lambda 4T} \Rightarrow \frac{A_0}{9} = A_0 e^{-4\Lambda T} \Rightarrow e^{-4\Lambda T} = \frac{1}{9} \Rightarrow (e^{-2\Lambda T})^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow e^{-2\Lambda T} = \frac{1}{3}$$

και το πλάτος της ταλάντωσης μετά από 2 περιόδους είναι

$$A_2 = A_0 e^{-\Lambda 2T} \Rightarrow A_2 = \frac{A_0}{3} = 3A_4$$

8.B.24 β.

Από την ενέργεια της ταλάντωσης προκύπτει το πλάτος της

$$E = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow \frac{E_0}{36} = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow \frac{1}{36} \frac{1}{2} D A_0^2 = \frac{1}{2} D A^2 \Rightarrow A = \frac{A_0}{6}$$

και το χρονικό διάστημα είναι

$$A = A_0 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_0}{6} = A_0 e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow e^{-\Lambda t_1} = \frac{1}{6} \Rightarrow e^{\Lambda t_1} = 6 \Rightarrow \ln e^{\Lambda t_1} = \ln 6 \Rightarrow \Lambda t_1 = \ln 6 \Rightarrow t_1 = \frac{\ln 6}{\Lambda}$$

8.B.25 α.

Από το ποσοστό μείωσης της ενέργειας της ταλάντωσης προκύπτει

$$\pi\% = \frac{E_0 - E}{E_0} 100\% = 19\% \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} D A_0^2 - \frac{1}{2} D A^2}{\frac{1}{2} D A_0^2} = 0,19 \Rightarrow A^2 = \frac{81}{100} A_0^2 \Rightarrow A = 0,9 A_0$$

και το ποσοστό μείωσης του πλάτους ανά περίοδο είναι

$$\pi\% = \frac{A_0 - A}{A_0} 100\% = \frac{A_0 - 0,9 A_0}{A_0} 100\% \Rightarrow \pi\% = 10\%$$

8.B.26 γ.

Στη θέση που η ταχύτητα μεγιστοποιείται, η συνολική δύναμη μηδενίζεται, καθώς η κίνηση από επιταχυνόμενη γίνεται επιβραδυνόμενη και η επιτάχυνση γίνεται επίσης μηδέν, $a_1=0\text{m/s}^2$. Άρα

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow |F_{ελ}| = |F'| \Rightarrow kx_1 = b v_{\max} \quad (1)$$

Όταν το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά x_1 η ταχύτητα έχει μέτρο v_2 και για την επιτάχυνση του σώματος ισχύει ο 2ος νόμος του Νεύτωνα

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_{ελ} + F' = ma \Rightarrow -kx_1 - b v_2 = m a_2 \Rightarrow$$

$$a_2 = \frac{-b v_{\max} - b v_2}{m} \Rightarrow a_2 = -\frac{b}{m} (v_{\max} + v_2)$$

και η μεταβολή της επιτάχυνσης είναι ίση με

$$\Delta a = a_2 - a_1 = -\frac{b}{m} (v_{\max} + v_2) - 0 \Rightarrow \Delta a = -\frac{b}{m} (v_{\max} + v_2)$$

8.B.27 γ.

Η συνάρτηση της ενέργειας της ταλάντωσης με τον χρόνο είναι

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\Lambda t})^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t}$$

Από την ενέργεια της ταλάντωσης σε μία περίοδο προκύπτει

$$E_1 = E_0 e^{-2\Lambda T} \Rightarrow \frac{E_0}{2} = E_0 e^{-2\Lambda T} \Rightarrow e^{-2\Lambda T} = \frac{1}{2}$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης μετά από 3 περιόδους είναι

$$E_3 = E_0 e^{-2\Lambda 3T} = E_0 (e^{-2\Lambda T})^3 = E_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow E_3 = \frac{E_0}{8}$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης μετά από 4 περιόδους είναι

$$E_4 = E_0 e^{-2\Lambda 4T} = E_0 (e^{-2\Lambda T})^4 = E_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow E_4 = \frac{E_0}{16}$$

Άρα, η θερμότητα που ελευθερώνεται είναι

$$Q = E_3 - E_4 = \frac{E_0}{8} - \frac{E_0}{16} \Rightarrow Q = \frac{E_0}{16}$$

8.B.28 γ.

Η συνάρτηση της ενέργειας της ταλάντωσης με τον χρόνο είναι

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D(A_0 e^{-\Lambda t})^2 = \frac{1}{2}DA_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t}$$

και τη στιγμή t_1 είναι

$$E_1 = E_0 e^{-2\Lambda t_1} = E_0 e^{-2\Lambda \frac{3 \ln 2}{\Lambda}} = \frac{E_0}{e^{6 \ln 2}} = \frac{E_0}{e^{\ln 2^6}} = \frac{E_0}{2^6} \Rightarrow E_1 = \frac{E_0}{64}$$

8.B.29 α.

Η συνάρτηση της ενέργειας της ταλάντωσης με τον χρόνο είναι

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D(A_0 e^{-\Lambda t})^2 = \frac{1}{2}DA_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t}$$

και η στιγμή t_1 είναι

$$E_1 = E_0 e^{-2\Lambda t_1} \Rightarrow \frac{E_0}{e} = E_0 e^{-2\Lambda t_1} \Rightarrow e^{-2\Lambda t_1} = \frac{1}{e} \Rightarrow e^{2\Lambda t_1} = e \Rightarrow \ln e^{2\Lambda t_1} = \ln e \Rightarrow 2\Lambda t_1 = \ln e \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2\Lambda}$$

8.B.30 β.**Α' τρόπος**

Από το πλάτος της ταλάντωσης μετά από 2 περιόδους προκύπτει

$$A_2 = A_0 e^{-\Lambda 2T} \Rightarrow e^{-\Lambda 2T} = \frac{A_2}{A_0} \quad (1)$$

και από το πλάτος της ταλάντωσης μετά από 4 περιόδους

$$A_4 = A_0 e^{-\Lambda 4T} = A_0 (e^{-\Lambda 2T})^2 = A_0 \left(\frac{A_2}{A_0} \right)^2 \Rightarrow A_4 = \frac{A_2^2}{A_0} \Rightarrow A_2 = \sqrt{A_0 A_4}$$

Β' τρόπος

Από τη σχέση των διαδοχικών πλατών προκύπτει

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_2}{A_4} \Rightarrow A_0 A_4 = A_1 A_3 \quad (2)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} \Rightarrow A_2^2 = A_1 A_3 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει

$$A_0 A_4 = A_2^2 \Rightarrow A_2 = \sqrt{A_0 A_4}$$

8.B.31 β.

Αν A_k και A_{k+1} είναι τα πλάτη μετά από k και $k+1$ περιόδους αντίστοιχα, το ποσοστό μείωσης του πλάτους ανά περίοδο είναι

$$\pi\% = \frac{A_k - A_{k+1}}{A_k} 100\% = \frac{A_0 e^{-\Lambda k T} - A_0 e^{-\Lambda(k+1)T}}{A_0 e^{-\Lambda k T}} 100\% = (1 - e^{-\Lambda T}) 100\% \Rightarrow$$

$$\pi\% = \left(1 - e^{-\frac{2 \ln 2}{T} T}\right) 100\% = \left(1 - \frac{1}{e^{\ln 2^2}}\right) 100\% = \left(1 - \frac{1}{4}\right) 100\% \Rightarrow \pi\% = 75\%$$

8.B.32 β.

Η συνάρτηση της ενέργειας της ταλάντωσης με τον χρόνο είναι

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\Lambda t})^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t}$$

και η ενέργεια της ταλάντωσης σε 4 και 10 περιόδους είναι:

$$E_4 = E_0 e^{-2\Lambda 4T} = E_0 e^{-8\Lambda T}$$

$$E_{10} = E_0 e^{-2\Lambda 10T} = E_0 e^{-20\Lambda T}$$

Άρα, ο λόγος E_4/E_{10} ισούται με

$$\frac{E_4}{E_{10}} = \frac{E_0 e^{-8\Lambda T}}{E_0 e^{-20\Lambda T}} = e^{12\Lambda T}$$

8.B.33 α.

Η συνάρτηση της ενέργειας της ταλάντωσης με τον χρόνο είναι

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\Lambda t})^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t}$$

Η θερμότητα που ελευθερώνεται στην 1^η περίοδο είναι

$$Q_1 = E_0 - E_1 = E_0 - E_0 e^{-2\Lambda T}$$

η θερμότητα που ελευθερώνεται στη 2^η περίοδο είναι

$$Q_2 = E_1 - E_2 = E_0 e^{-2\Lambda T} - E_0 e^{-2\Lambda 2T}$$

και ο λόγος Q_1/Q_2 των θερμότητων είναι

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{E_0 - E_0 e^{-2\Delta T}}{E_0 e^{-2\Delta T} - E_0 e^{-4\Delta T}} = \frac{1 - e^{-2\Delta T}}{e^{-2\Delta T}(1 - e^{-2\Delta T})} = e^{2\Delta T} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{E_0}{E_1}$$

καθώς $E_1 = E_0 e^{-2\Delta T} \Rightarrow e^{2\Delta T} = \frac{E_0}{E_1}$.

8.B.34 α.

Ο λόγος A_3/A_4 ισούται με

$$\frac{A_3}{A_4} = \frac{A_0}{A_1} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\Delta T}} \Rightarrow \frac{A_3}{A_4} = e^{\Delta T} \quad (1)$$

Η συνάρτηση της ενέργειας της ταλάντωσης με τον χρόνο είναι

$$E = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} D (A_0 e^{-\Delta T})^2 = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Delta T} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Delta T}$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης μετά από μία περίοδο είναι $E_1 = E_0 e^{-2\Delta T}$

και η ενέργεια της ταλάντωσης μετά από 2 περιόδους είναι

$$E_2 = E_0 e^{-2\Delta T} = E_0 (e^{-2\Delta T})^2$$

Άρα, η θερμότητα που ελευθερώνεται είναι

$$Q = E_1 - E_2 \Rightarrow \frac{3E_0}{16} = E_0 e^{-2\Delta T} - E_0 (e^{-2\Delta T})^2 \Rightarrow \frac{3}{16} = e^{-2\Delta T} - (e^{-2\Delta T})^2 \quad (2)$$

Θέτουμε $e^{-2\Delta T} = x$ και η σχέση (2) δίνει μία δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\frac{3}{16} = x - x^2 \Rightarrow x^2 - x + \frac{3}{16} = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{4}, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{4}$$

Άρα, $e^{-2\Delta T} = x = \frac{1}{4} \Rightarrow e^{2\Delta T} = 4 \Rightarrow e^{\Delta T} = 2 = \frac{A_3}{A_4}$

και $e^{-2\Delta T} = x = \frac{3}{4} \Rightarrow e^{2\Delta T} = \frac{4}{3} \Rightarrow e^{\Delta T} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{A_3}{A_4}$

8.B.35 γ.

Στη θέση που μεγιστοποιείται η αντιτιθέμενη δύναμη, μεγιστοποιείται και η ταχύτητα (και η κινητική ενέργεια), γιατί είναι ανάλογες και η συνολική δύναμη μηδενίζεται, καθώς η κίνηση από επιταχυνόμενη γίνεται επιβραδυνόμενη. Άρα

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow |F_{ελ.}| = |F'| \Rightarrow kx_1 = b v_{\max} \Rightarrow kx_1 = \sqrt{2mk} v_{\max} \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{2m}} x_1 \quad (1)$$

Σ' αυτή τη θέση έχουμε

$$\frac{U_{ελ.}}{K} = \frac{\frac{1}{2} k x_1^2}{\frac{1}{2} m v_{\max}^2} = \frac{\frac{1}{2} k x_1^2}{\frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{k}{2m}} x_1 \right)^2} \Rightarrow \frac{U_{ελ.}}{K} = 2$$

8.B.36 γ.

Όταν το σώμα διανύσει απόσταση $2x_1$, το ελατήριο θα είναι επιμηκυμένο κατά x_1 , άρα η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στις δύο θέσεις είναι ίδια. Το έργο της δύναμης της τριβής ισούται με τη μεταβολή της ενέργειας του ταλαντωτή

$$W_{F'} = E_2 - E_1 = K_2 + U_2 - (K_1 + U_1) \Rightarrow$$

$$W_{F'} = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{v_1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow$$

$$W_{F'} = -\frac{3}{4} \frac{1}{2} m v_1^2 = -\frac{3}{4} K_1$$

8.B.37 α.

Σε μια τυχαία θέση του σώματος, ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_{ελ.} + F' = ma \Rightarrow -kx - bv = ma \Rightarrow$$

$$-100x - 2v = 0,5a \Rightarrow a + 4v + 200x = 0$$

8.B.38 α.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι τη χρονική στιγμή $t=1s$, οι δύο ταλαντώσεις έχουν το ίδιο πλάτος. Άρα

$$A_1 = A_2 \Rightarrow A_{01} e^{-\Lambda_1 t} = A_{02} e^{-\Lambda_2 t} \Rightarrow 2A_{02} e^{-\Lambda_1} = A_{02} e^{-\Lambda_2} \Rightarrow$$

$$2e^{-\Lambda_1} = e^{-\Lambda_2} \Rightarrow 2 = \frac{e^{-\Lambda_2}}{e^{-\Lambda_1}} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{\Lambda_1 - \Lambda_2} \Rightarrow \Lambda_1 - \Lambda_2 = \ln 2 \text{ s}^{-1}$$

8.B.39 α.

Η συνάρτηση της ενέργειας της ταλάντωσης με τον χρόνο είναι

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}D(A_0 e^{-\Lambda t})^2 = \frac{1}{2}DA_0^2 e^{-2\Lambda t} \Rightarrow E = E_0 e^{-2\Lambda t}$$

Αν E_k και E_{k+1} είναι οι ενέργειες μετά από k και $k+1$ περιόδους αντίστοιχα, ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών της ενέργειας ταλάντωσης, ανά περίοδο είναι

$$\frac{E_k}{E_{k+1}} = \frac{E_0 e^{-2\Lambda kT}}{E_0 e^{-2\Lambda(k+1)T}} = e^{2\Lambda T}$$

και είναι σταθερός αφού Λ , T σταθερές. Άρα

$$\frac{E_3}{E_4} = \frac{E_4}{E_5} \Rightarrow E_3 E_5 = E_4^2 = 200 \quad (1)$$

Η θερμότητα που ελευθερώνεται συνολικά στην 4^η και την 5^η περίοδο είναι

$$Q = E_3 - E_5 = 10J \quad (2)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) και βρίσκουμε

$$E_3(E_3 - 10) = 200 \Rightarrow E_3^2 - 10E_3 - 200 = 0$$

$$\Delta = 100 - 4(-200) = 900, \quad E_3 = \frac{10 \pm \sqrt{900}}{2} \Rightarrow E_3 = 20J \quad \text{ή} \quad E_3 = -10J, \text{ απορρίπτεται}$$

Άρα, ο λόγος E_0/E_1 ισούται με

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{E_3}{E_4} = \frac{20J}{10\sqrt{2}J} = \sqrt{2}$$