

Θέματα Γ

8.Γ.1

$$\alpha. \frac{A_o}{2} = A_o e^{-\Lambda t} \Rightarrow 2 = e^{\Lambda t} \Rightarrow \ln 2 = \ln e^{\Lambda t} \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

$$\beta. E = \frac{E_o}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} D A_o^2 \Rightarrow A = \frac{A_o}{\sqrt{2}}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $A=f(t)$ προκύπτει

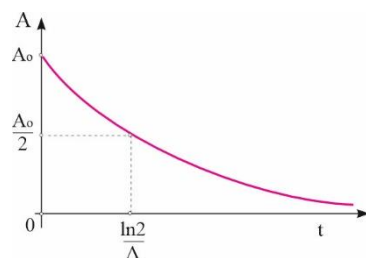
$$\frac{A_o}{\sqrt{2}} = A_o e^{-\Lambda t_1} \Rightarrow \sqrt{2} = e^{\Lambda t_1} \Rightarrow \ln 2^{\frac{1}{2}} = \ln e^{\Lambda t_1} \Rightarrow \Lambda t_1 = \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow t_1 = \frac{\ln 2}{2\Lambda}$$

$$\gamma. A_2 = A_o e^{-\Lambda t_2} = A_o e^{-2 \ln 2} \Rightarrow A_2 = \frac{A_o}{e^{\ln 2^2}} = \frac{A_o}{4}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} D A_2^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{16} D A_o^2 \Rightarrow E_2 = \frac{E_o}{16}$$

δ. Η γραφική παράσταση πλάτους - χρόνου για τη φθίνουσα ταλάντωση είναι όπως στο σχήμα.

Παρατηρούμε ότι η απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής του πλάτους της φθίνουσας ταλάντωσης, που είναι η κλίση στο διάγραμμα, τείνει να γίνεται ολοένα και μικρότερη με την πάροδο του χρόνου. Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι τόσο το πλάτος όσο και η απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής του ελαττώνονται με την πάροδο του χρόνου.



8.Γ.2

$$\alpha. \frac{A_o}{2} = A_o e^{-\Lambda t} \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\Lambda} = 10 \text{ s}$$

$$\beta. 4 = 32 \cdot e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{8} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow 2^3 = e^{\Lambda t} \Rightarrow 3 \ln 2 = \Lambda t \Rightarrow t = 30 \text{ s}$$

$$\gamma. A = 32 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{10} \cdot 50} \Rightarrow A = \frac{32}{2^5} \text{ cm} = 1 \text{ cm}$$

δ. Από την εξίσωση πλάτους - χρόνου έχουμε

$$A = 0,32 e^{-\Lambda t} \Rightarrow \ln A = \ln(0,32 e^{-\Lambda t}) \Rightarrow \ln A = \ln 0,32 + \ln e^{-\Lambda t} \Rightarrow \ln A = \ln 0,32 - \Lambda t \Rightarrow$$

$$\ln A = \ln 0,32 - \frac{\ln 2}{10} t \Rightarrow \ln A = -1,14 - 0,07 t (\text{S.I.})$$

8.Γ.3

$$\alpha. A_k = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot \kappa T}$$

Για $\kappa=4$ βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης A_4 με το οποίο ξεκίνησε η 5^η ταλάντωση

$$A_4 = A_o \cdot e^{-\ln 4 \cdot 2} \Rightarrow A_4 = A_o^{-\ln 4^2} \Rightarrow A_4 = \frac{A_o}{16}$$

β. Για $\kappa=5$ βρίσκουμε το πλάτος ταλάντωσης A_5 με το οποίο ξεκίνησε η 6^η ταλάντωση

$$A_5 = A_o \cdot e^{-\ln 4 \cdot 2,5} \Rightarrow A_5 = A_o^{-\ln 4^{2,5}} \Rightarrow \frac{A_o}{A_5} = 4^{2,5} \Rightarrow$$

$$\frac{A_o}{A_5} = (2^2)^{2,5} \Rightarrow A_5 = \frac{A_o}{32}$$

γ. Το πηλίκο των διαδοχικών πλατών είναι ίσο με

$$\frac{A_4}{A_5} = \frac{e^{-4\Delta T}}{e^{-5\Delta T}} = e^{\Delta T} \Rightarrow \frac{A_4}{A_5} = e^{0,5 \cdot \ln 4} \Rightarrow \frac{A_4}{A_5} = e^{\ln 2} \Rightarrow \frac{A_4}{A_5} = 2$$

Το πηλίκο των διαδοχικών ενεργειών είναι ίσο με

$$\frac{E_4}{E_5} = \frac{\frac{1}{2}kA_4^2}{\frac{1}{2}kA_5^2} = \left(\frac{A_4}{A_5}\right)^2 = 4$$

δ. Η διαφορά των ενεργειών E_4-E_5 δίνει την ενέργεια που χάθηκε κατά τη διάρκεια της 5^{ης} ταλάντωσης

$$\Delta E = E_4 - E_5 = \frac{1}{2}kA_4^2 - \frac{1}{2}kA_5^2 = \frac{1}{2}k\frac{A_o^2}{16^2} - \frac{1}{2}k\frac{A_o^2}{32^2} \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}kA_o^2\left(\frac{1}{256} - \frac{1}{1024}\right) \Rightarrow \frac{\Delta E}{E_o} = \frac{3}{1024}$$

8.Γ.4

$$\alpha. A_o - A_\kappa = \frac{8}{9}A_o \Rightarrow A_\kappa = \frac{A_o}{9}$$

$$\beta. \frac{A_o}{9} = A_o e^{-\Lambda 100T} \Rightarrow \frac{1}{9} = e^{-\Lambda 100T} \Rightarrow \ln 3^2 = \Lambda 100T \Rightarrow T = \frac{\ln 3}{50\Lambda}$$

γ. Με αντικατάσταση στη σχέση $A = f(t)$ όπου $t=300T$ και $T = \frac{\ln 3}{50\Lambda}$ προκύπτει

$$A = A_o e^{-\Lambda 300T} = A_o e^{-\Lambda 300 \frac{\ln 3}{50\Lambda}} \Rightarrow A = A_o e^{-6 \ln 3} = A_o e^{-\ln 3^6} \Rightarrow A = \frac{A_o}{729}$$

δ. Από το τελικό πλάτος βρίσκουμε τη χρονική στιγμή

$$A = A_o e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{A_o}{81} = A_o e^{-\Lambda t} \Rightarrow \ln \frac{1}{81} = -\Lambda t \Rightarrow -\ln 81 = -\Lambda t \Rightarrow t = \frac{\ln 81}{\Lambda} \Rightarrow t = \frac{2 \ln 9}{\Lambda} \quad (1)$$

Διαιρούμε το χρονικό διάστημα με την περίοδο για να βρούμε τον αριθμό των ταλαντώσεων

$$N = \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow N = \frac{\frac{2\ell n 9}{\Lambda} - 100T}{\frac{\ell n 3}{50\Lambda}} \Rightarrow N = \frac{\frac{4\ell n 3}{\Lambda} - 100\frac{\ell n 3}{50\Lambda}}{\frac{\ell n 3}{50\Lambda}} \Rightarrow N = \frac{\frac{4\ell n 3}{\Lambda} - \frac{2\ell n 3}{\Lambda}}{\frac{\ell n 3}{50\Lambda}} = 100$$

8.Γ.5

$$\alpha. A_{23} = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot 23T} \Rightarrow \frac{A_o}{3} = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot 23T} \Rightarrow \frac{\ln 3}{23} = \Lambda T \quad (1)$$

$$A_{\kappa} = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot \kappa T} \Rightarrow \frac{A_o}{81} = A_o e^{-\Lambda \cdot \kappa T} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3^4} = e^{-\kappa \Lambda T} \Rightarrow 4 \cdot \ln 3 = \kappa \cdot \Lambda T \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 4 \ln 3 = \kappa \cdot \frac{\ln 3}{23} \Rightarrow \kappa = 92$$

$$\beta. E_o - E_{\kappa} = \frac{80}{81} E_o \Rightarrow E_{\kappa} = \frac{E_o}{81} \Rightarrow \frac{1}{2} D A_{\kappa}^2 = \frac{1}{81} \frac{1}{2} D A_o^2 \Rightarrow A_{\kappa} = \frac{A_o}{9}$$

$$\frac{A_o}{9} = A_o \cdot e^{-\Lambda \cdot t} \Rightarrow 2 \ln 3 = \kappa \Lambda T$$

η οποία συνδυαζόμενη με την (1) δίνει $\kappa=46$.

γ. Όταν το σώμα έχει εκτελέσει 46 πλήρεις ταλαντώσεις τότε έχει χάσει τα 80/81 της αρχικής του ενέργειας συνεπώς του υπολείπεται το 1/81. Από τη διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε

$$E_o = E_{\text{τελ}} + Q \Rightarrow Q = E_o - E_{\text{τελ}} \Rightarrow Q = E_o - \frac{E_o}{81} \Rightarrow Q = 8,1J - 0,1J = 8J$$

δ. Τη χρονική στιγμή στην οποία η μείωση του πλάτους είναι ίση με το πλάτος της φθίνουσας ταλάντωσης θα έχουμε

$$|\Delta A| = A \Rightarrow A_o - A = A \Rightarrow A_o = 2A \Rightarrow A_o = 2A_o e^{-\Lambda t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\Lambda t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\Lambda}$$

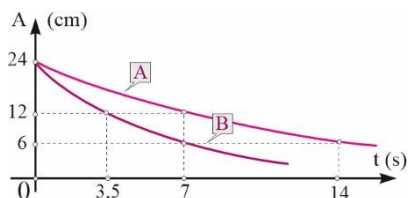
Δηλαδή η χρονική στιγμή είναι ίση με τον χρόνο υποδιπλασιασμού του πλάτους.

8.Γ.6

$$\alpha. \frac{A_o}{2} = A_o e^{-\Lambda_A t_A} \Rightarrow t_A = \frac{\ln 2}{\Lambda_A} = \frac{0,7}{0,1} s \Rightarrow t_A = 7s$$

$$\frac{A_o}{2} = A_o e^{-\Lambda_B t_B} \Rightarrow t_B = \frac{\ln 2}{\Lambda_B} = \frac{0,7}{0,2} s \Rightarrow t_B = 3,5s$$

β. Το διάγραμμα πλάτους - χρόνου δείχνεται στο διπλανό σχήμα.



$$\gamma. A_A = A_0 e^{-\Lambda_A t} \Rightarrow 6 = 24 e^{-\Lambda_A t} \Rightarrow e^{-\Lambda_A t} = \frac{1}{4}$$

$$A_B = 24 e^{-\Lambda_B t} = 24 e^{-2\Lambda_A t} \Rightarrow A_B = 24 (e^{-\Lambda_A t})^2 \Rightarrow$$

$$A_B = 24 \left(\frac{1}{4} \right)^2 \Rightarrow A_B = 1,5 \text{ cm}$$

$$\delta. e^{-\Lambda_A t} = \frac{1}{4} \Rightarrow 0,1t = 2 \ln 2 = 2 \cdot 0,7 \Rightarrow t = 14 \text{ s}$$