

Θέματα Β

9.B.1 α.

Η ιδιοσυχνότητα του κάθε συστήματος είναι:

$$f_{0,A} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_A}{m_A}} = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}, \quad f_{0,B} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_B}{m_B}} = \frac{5\sqrt{2}}{\pi} \text{ Hz}, \quad f_{0,\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_\Gamma}{m_\Gamma}} = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$$

Το σύστημα που θα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση σε κατάσταση συντονισμού είναι το Α, αφού η συχνότητα του διεγέρτη είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα, κατά συνέπεια θα ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος.

9.B.2 i. α. ii. β.

i. Η αρχική ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ και η καινούρια

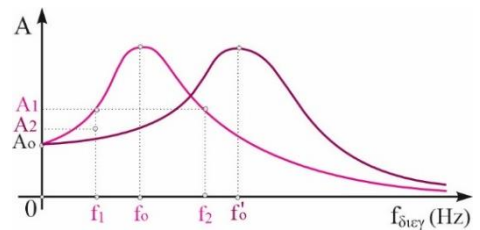
$$f'_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{4m}} \Rightarrow f'_0 = \frac{f_0}{2}$$

ii. Αρχικά το σύστημα βρισκόταν σε κατάσταση συντονισμού, αφού η συχνότητα του διεγέρτη ήταν ίση με την ιδιοσυχνότητα και το πλάτος ήταν μέγιστο. Μετά την αλλαγή της μάζας, άλλαξε η ιδιοσυχνότητα του συστήματος, οπότε το σύστημα δεν είναι πια σε συντονισμό και το πλάτος ελαττώθηκε.

9.B.3 α.

Στο σχήμα δίνεται η καμπύλη συντονισμού όταν η μάζα του ταλαντωτή είναι ίση με m (κόκκινη καμπύλη) και όταν η μάζα υποτετραπλασιαστεί, με συνέπεια η ιδιοσυχνότητα του συστήματος να διπλασιαστεί (καφέ καμπύλη), σύμφωνα με τη σχέση

$$f'_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m/4}} \Rightarrow f'_0 = 2f_0$$



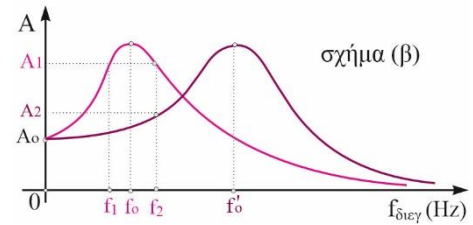
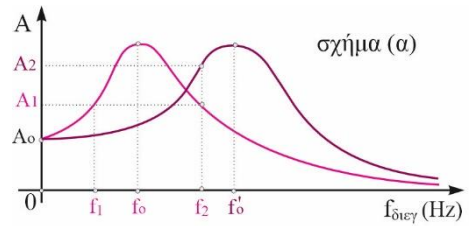
Η καμπύλη μετατοπίστηκε προς τα δεξιά και το πλάτος ταλάντωσης A_2 για την ίδια συχνότητα διεγέρτη μειώθηκε.

9.B.4 γ.

Όταν η μάζα υποτετραπλασιαστεί, η ιδιοσυχνότητα του συστήματος διπλασιάζεται, σύμφωνα με τη σχέση

$$f_0' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m/4}} \Rightarrow f_0' = 2f_0$$

Η καμπύλη συντονισμού μετατοπίζεται προς τα δεξιά και σύμφωνα με τα διαγράμματα δεν μπορούμε να γνωρίζουμε, για την ίδια συχνότητα διεγέρτη, αν το νέο πλάτος ταλάντωσης A_2 θα αυξηθεί, θα μειωθεί ή αν θα μείνει σταθερό σε σχέση με το A_1 .



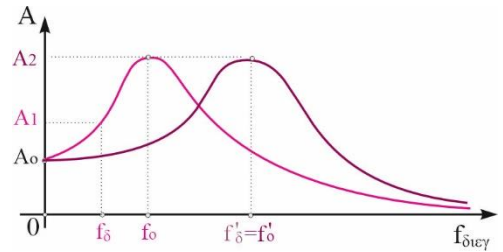
9.B.5 γ.

Αρχικά ισχύει $f_\delta = f_0/2$.

Η νέα συχνότητα του διεγέρτη είναι $f_\delta' = 4f_\delta$.

Η νέα ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι

$$f_0' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m'}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m/4}} \Rightarrow f_0' = 2f_0 = 4f_\delta$$



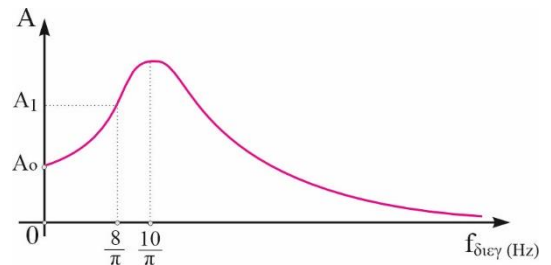
Άρα μετά τις αλλαγές ισχύει $f_\delta' = f_0'$, δηλαδή το σύστημα έρχεται σε κατάσταση συντονισμού και το πλάτος θα αυξηθεί.

9.B.6 α.

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος ισούται με

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$$

και είναι μεγαλύτερη από τη συχνότητα του διεγέρτη. Αν η συχνότητα του διεγέρτη αρχίσει να μειώνεται, θα απέχει περισσότερο από την ιδιοσυχνότητα του συστήματος και όπως προκύπτει από την καμπύλη συντονισμού, το πλάτος της ταλάντωσης διαρκώς θα μειώνεται.



9.B.7 β.

Η διεγείρουσα δύναμη $F_{εξ}$ ισούται με $F_{εξ} = -F' = b\upsilon$, άρα είναι ανάλογη της ταχύτητας και γίνεται μέγιστη στη Θ.Ι. που και η ταχύτητα είναι μέγιστη. Άρα, το σώμα τη στιγμή $3T/4$ έχει φάση $\kappa \cdot 2\pi$, οπότε για $\kappa=1$ έχουμε

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \Rightarrow 2\pi = \frac{2\pi}{T} \frac{3T}{4} + \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

9.B.8 β.

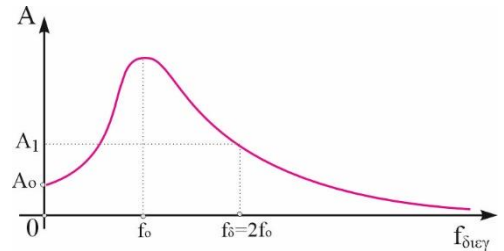
Η συχνότητα της ταλάντωσης είναι η συχνότητα του διεγέρτη, που αρχικά είναι $f_\delta = f_0 + f_0 = 2f_0$.

Για να προκύψει συντονισμός πρέπει να μεγαλώσει η ιδιοσυχνότητα του συστήματος και να γίνει ίση με τη συχνότητα του διεγέρτη. Άρα

$$f'_0 = f_\delta = 2f_0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m'}} = 2 \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m' = m/4$$

και το ποσοστό μεταβολής της μάζας είναι

$$\pi\% = \frac{\Delta m}{m} 100\% = \frac{m' - m}{m} 100\% = \frac{\frac{m}{4} - m}{m} 100\% \Rightarrow \pi\% = -75\%$$

**9.B.9 α.**

Η διεγείρουσα δύναμη $F_{εξ}$ ισούται με $F_{εξ} = -F' = b\upsilon$ και η μέγιστη τιμή της είναι

$$F_{εξ, \max} = b\upsilon_{\max} = b\omega_0 A = 2\pi f_0 bA \quad (1)$$

Η μέγιστη δύναμη επαναφοράς είναι $F_{\max} = DA = m\omega_0^2 A = (2\pi f_0)^2 mA \quad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\frac{F_{εξ, \max}}{F_{\max}} = \frac{2\pi f_0 bA}{(2\pi f_0)^2 mA} = \frac{b}{2\pi f_0 m}$$

9.B.10 α.

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (1)$$

Η συχνότητα του διεγέρτη ισούται με

$$f_{\delta} = \frac{1}{T_{\delta}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{f_0}{2}$$

Για να προκύψει συντονισμός πρέπει να μεγαλώσει η συχνότητα του διεγέρτη και να γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, δηλαδή σε ποσοστό

$$\pi\% = \frac{\Delta f_{\delta}}{f_{\delta}} 100\% = \frac{f_{\delta}' - f_{\delta}}{f_{\delta}} 100\% = \frac{f_0 - f_{\delta}}{f_{\delta}} 100\% = \frac{2f_{\delta} - f_{\delta}}{f_{\delta}} 100\% \Rightarrow \pi\% = 100\%$$

9.B.11 β.

Η ιδιοσυχνότητα του συστήματος ισούται με

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{10}{\pi} \text{ Hz}$$

Για να μεγιστοποιηθεί το πλάτος της ταλάντωσης, πρέπει η συχνότητα του διεγέρτη - δίσκου να είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, άρα για τη συχνότητα του δίσκου ισχύει

$$f_{\delta} = \frac{N}{t} \Rightarrow \frac{10}{\pi} = \frac{N}{2} \Rightarrow N = \frac{20}{\pi} \text{ στροφές}$$

9.B.12 α.

Εφόσον η περίοδος T της ταλάντωσης, δηλαδή του διεγέρτη είναι ίση με το αντίστροφο της ιδιοσυχνότητας του συστήματος, η συχνότητα του διεγέρτη ισούται με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, άρα το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού

$$T_{\text{ταλ}} = T_{\delta} = \frac{1}{f_0} \Rightarrow \frac{1}{f_{\delta}} = \frac{1}{f_0} \Rightarrow f_{\delta} = f_0$$

Η ταχύτητα του ταλαντωτή, τη χρονική στιγμή $t=7T/12$, ισούται με

$$v = v_{\max} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{7T}{12} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$v = \frac{2\pi}{T} A \sin\frac{5\pi}{3} \Rightarrow v = \frac{\pi}{T} A$$

Η διεγείρουσα δύναμη $F_{\varepsilon\xi}$ είναι

$$F_{\varepsilon\xi} = -F' = b v \Rightarrow F_{\varepsilon\xi} = b \frac{\pi}{T} A$$

και ο ρυθμός προσφοράς ενέργειας από τη διεγείρουσα δύναμη είναι

$$P_{F_{εξ}} = F_{εξ} v = b v^2 = b \left(\frac{\pi}{T} A \right)^2 = b \frac{\pi^2}{T^2} A^2 = b \frac{\pi^2}{\left(2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \right)^2} A^2 \Rightarrow P_{F_{εξ}} = \frac{b k A^2}{4m}$$

9.B.13 β.

Εφόσον το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση συντονισμού, η συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης ισούται με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος, άρα η σταθερά του ελατηρίου ισούται με

$$f_0 = f_{\delta} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{10}{\pi} \Rightarrow k = 400 \text{ N/m}$$

Σε μια τυχαία θέση του σώματος, ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$\Sigma F = ma \Rightarrow F_{εξ} + F_{ελ} + F' = ma \Rightarrow F_{εξ} - kx - bv = ma \Rightarrow F_{εξ} - 400x - 1v = 1a \Rightarrow F_{εξ} = a + v + 400x$$

9.B.14 β.

Από το διάγραμμα προκύπτει ότι για τις δύο διαφορετικές συχνότητες του διεγέρτη f_1 και f_2 , το πλάτος των ταλαντώσεων είναι ίδιο. Από την καμπύλη συντονισμού καταλαβαίνουμε ότι η συχνότητα συντονισμού, δηλαδή η ιδιοσυχνότητα του συστήματος βρίσκεται ανάμεσα στις συχνότητες f_1 και f_2 . Από το διάγραμμα βρίσκουμε ότι οι περίοδοι των δύο ταλαντώσεων είναι ίσες με:

$$\frac{3}{2} T_1 = 12 \text{ s} \Rightarrow T_1 = 8 \text{ s}, \quad 2T_2 = 12 \text{ s} \Rightarrow T_2 = 6 \text{ s}$$

και οι δύο συχνότητες του διεγέρτη είναι ίσες με:

$$f_1 = \frac{1}{T_1} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{8} \text{ Hz}, \quad f_2 = \frac{1}{T_2} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{6} \text{ Hz}$$

Άρα, η ιδιοσυχνότητα του συστήματος μπορεί να ισούται με $1/7 \text{ Hz}$, που είναι ανάμεσα στις συχνότητες f_1 και f_2 .

9.B.15 γ.

Όταν το σώμα βρεθεί στη θέση $x=A/2$, επιβραδυνόμενο, κατευθύνεται προς την ακραία θετική θέση, άρα η ΑΔΕΤ δίνει την ταχύτητά του, που είναι θετική και ισούται με

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow k A^2 = k \left(\frac{A}{2} \right)^2 + m v^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

Η διεγείρουσα δύναμη $F_{εξ}$ ισούται με

$$F_{εξ} = -F' = bυ = b \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} A = \frac{\sqrt{km}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} A \Rightarrow F_{εξ} = \frac{\sqrt{3}}{4} kA$$

Η δύναμη επαναφοράς είναι $F = -kx = -k \frac{A}{2}$.

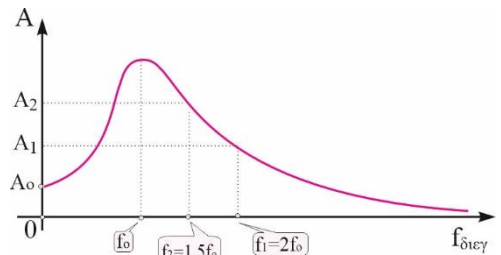
Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει

$$\frac{F_{εξ}}{F} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} kA}{-k \frac{A}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

9.B.16 β.

Αρχικά ισχύει $f_1 = 2f_0$. Η νέα συχνότητα του διεγέρτη είναι $f_2 = f_1 - f_1/4 = 3f_1/4 = 1,5f_0$.

Άρα, μετά την αλλαγή, η νέα συχνότητα του διεγέρτη είναι πιο κοντά στην ιδιοσυχνότητα του συστήματος και το πλάτος της ταλάντωσης θα αυξηθεί.



Από το διάγραμμα προκύπτει ότι αρχικά η περίοδος της ταλάντωσης ήταν ίση με

$$4T_1 = t_1 \Rightarrow T_1 = \frac{t_1}{4}$$

Η νέα περίοδος ισούται με

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{3f_1/4} \Rightarrow T_2 = \frac{4}{3f_1} = \frac{4T_1}{3} \Rightarrow T_2 = \frac{t_1}{3}$$

δηλαδή τώρα ο ταλαντωτής εκτελεί 3 πλήρεις ταλαντώσεις στο ίδιο χρονικό διάστημα και το σωστό είναι το διάγραμμα (β), που το πλάτος ταυτόχρονα μεγαλώνει.

9.B.17 α.

Η διεγείρουσα δύναμη $F_{εξ}$ ισούται με $F_{εξ} = -F' = bυ$.

Η μέγιστη τιμή της είναι $F_{εξ, \max} = bυ_{\max}$ και η μέγιστη ισχύς της ισούται με

$$P_{\max} = F_{εξ, \max} υ_{\max} = bυ_{\max}^2$$

Τη στιγμή που η επιτάχυνση ισούται με $\frac{α_{\max} \sqrt{3}}{2}$, ο ταλαντωτής βρίσκεται σε απομάκρυνση

$$\alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{\alpha_{\max} \sqrt{3}}{2} = -\omega^2 x \Rightarrow \frac{\omega^2 A \sqrt{3}}{2} = -\omega^2 x \Rightarrow x = -\frac{A \sqrt{3}}{2}$$

Όταν το σώμα βρεθεί στη θέση $x = -\frac{A \sqrt{3}}{2}$, η ΑΔΕΤ δίνει την ταχύτητά του, που ισούται με

$$E = U + K \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow k A^2 = k \left(\frac{\sqrt{3} A}{2} \right)^2 + m v^2 \Rightarrow v = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} A = \pm \frac{1}{2} v_{\max}$$

και η ισχύς της διεγείρουσας δύναμης ισούται με

$$P_{F_{\varepsilon\pi}} = F_{\varepsilon\pi} v = b v^2 = b \left(\pm \frac{1}{2} v_{\max} \right)^2 \Rightarrow P_{F_{\varepsilon\pi}} = \frac{P_{\max}}{4}$$

9.B.18 α.

Από την εξίσωση της απομάκρυνσης προκύπτει ότι η γωνιακή ιδιοσυχνότητα είναι $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$.

Η διεγείρουσα δύναμη $F_{\varepsilon\pi}$ ισούται με $F_{\varepsilon\pi} = -F' = b v$.

Η μέγιστη τιμή της είναι $F_{\varepsilon\pi, \max} = b v_{\max}$ και από τη μέγιστη ισχύ της, προκύπτει ότι η σταθερά απόσβεσης b ισούται με

$$P_{\max} = F_{\varepsilon\pi, \max} v_{\max} = b v_{\max}^2 \Rightarrow P_{\max} = b \omega_0^2 A^2 = b 2^2 A^2 \Rightarrow b = \frac{P_{\max}}{4 A^2}$$

9.B.19 γ.

Στη θέση που η διεγείρουσα δύναμη έχει ίσο μέτρο με τη δύναμη επαναφοράς, ισχύει

$$F_{\varepsilon\pi} = F_{\varepsilon\pi} \Rightarrow -F' = k x \Rightarrow b v = k x \Rightarrow \frac{\sqrt{k m}}{2} v = k x \Rightarrow \frac{1}{4} k m v^2 = k^2 x^2 \Rightarrow \frac{1}{4} m v^2 = k x^2 \Rightarrow \frac{1}{4} \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \frac{1}{4} K = U \Rightarrow \frac{K}{U} = 4$$

9.B.20 β.

Εφόσον το σύστημα είναι σε κατάσταση συντονισμού είναι $\omega = \omega_0$ και εφόσον η μέγιστη δύναμης απόσβεσης $F' = -b v$, ισούται με F_0 προκύπτει ότι

$$F_0 = b v_{\max} \Rightarrow v_{\max} = \frac{F_0}{b} \quad (1)$$

και η ενέργεια της ταλάντωσης E ισούται με

$$E = K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{F_0}{b} \right)^2 \Rightarrow E = \frac{m F_0^2}{2 b^2}$$

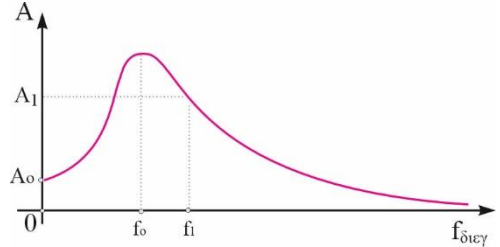
9.B.21 γ.

Με τη νέα συχνότητα του διεγέρτη το σύστημα έρχεται σε κατάσταση συντονισμού, αφού το πλάτος μεγιστοποιείται, άρα είναι

$$f_0 = f_2 = f_1 - \frac{f_1}{2} = \frac{f_1}{2}$$

Το νέο πλάτος είναι σε σχέση με το παλιό

$$A_2 = A_1 + \frac{A_1}{2} = 3 \frac{A_1}{2}$$



Η διεγείρουσα δύναμη $F_{εξ}$ ισούται με $F_{εξ} = -F' = b v$ και η μέγιστη τιμή της στη 2^η περίπτωση, είναι

$$F_{\max} = b v_{2,\max} = b \omega_2 A_2 = 2\pi f_2 b A_2 = 2\pi \frac{f_1}{2} b \frac{3A_1}{2} \Rightarrow F_{\max} = 1,5\pi b f_1 A_1$$

9.B.22 β.

Η διεγείρουσα δύναμη $F_{εξ}$ ισούται με $F_{εξ} = -F' = b v$.

Η μέγιστη τιμή της είναι $F_{εξ,\max} = b v_{\max}$ και ο μέγιστος ρυθμός προσφοράς ενέργειας είναι

$$P_{\max} = F_{εξ,\max} v_{\max} = b v_{\max}^2$$

Ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας είναι ίσος με το ένα τέταρτο του μέγιστου ρυθμού προσφοράς ενέργειας από τον διεγέρτη, όταν η ταχύτητα είναι θετική

$$P_{F'} = \frac{P_{\max}}{4} \Rightarrow F' v = b v^2 = \frac{b v_{\max}^2}{4} \Rightarrow v = \frac{v_{\max}}{2}$$

και από την εξίσωση της ταχύτητας προκύπτει η πρώτη λύση

$$v = v_{\max} \sin \omega t \Rightarrow \frac{v_{\max}}{2} = v_{\max} \sin \omega t \Rightarrow \sin \omega t = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{T}{6}$$